KTH Teknikvetenskap

SF1625 Envariabelanalys
Modelltentamen 1
Läsåret 2010-2011

Skrivtid: 5 timmar
Hjälpmedel: Inga
Examinator: Lars Filipsson
Kursansvariga lärare: Jockum Aniansson, Kristian Bjerklöv, Karim Daho, Tomas Ekholm, Lars Filipsson, Armin Halilovic, Jens Hoppe, Göran Hulth, Axel Hultman, Kirsti Mattila, Serguei Shimorin, Jan-Olov Strömberg.

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng.

På uppgifterna 1-3, som utgör del A, är det endast möjligt att få 0, 3 eller 4 poäng. Dessa tre uppgifter kan ersättas med resultat från den löpande examinationen. De två kontrollskrivningarna svarar mot uppgift 1 och 2 och seminarierna mot uppgift 3. Godkänd kontrollskrivning eller godkänd seminarieserie ger 3 poäng på motsvarande uppgift och väl godkänd kontrollskrivning eller seminarieserie ger 4 poäng. För att höja poängen från den löpande examinationen från 3 till 4 poäng krävs att hela uppgiften löses korrekt. Resultatet från den löpande examinationen kan endast tillgodoräknas vid ordinarie tentamen och ordinarie omtentamen för den aktuella kursomgången.

Uppgifterna 4-6 utgör del B och uppgifterna 7-9 utgör del C. Del C är främst till för de högre betygen.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av:

Betyg:	A	B	C	D	E	Fx
Poängsumma:	27	24	21	18	16	15
Poäng del C:	6	3	-	-	-	-

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar förklaras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng. *Lycka till!*

———- DEL A ———-

1. Bestäm i förekommande fall största och minsta värdet av funktionen $f(x) = xe^{-2x}$ på intervallet $[-1, 1]$. Besvara sedan också samma fråga för det öppna intervallet $(-1, 1)$.

2. Para ihop nedanstående integrander och primitiva funktioner. OBS: några blir över. Visa för varje par du hittar precis hur de hänger ihop genom en formel som innehåller antingen ett integraltecken eller också en deriveringssymbol.

$$\frac{x^4}{4!} \qquad 4!\left(-\frac{1}{x}\right)^5 \qquad 2\ln(x^4+1) \qquad 6\sinh x$$

$$x^2\ln x \qquad 2\arctan(x^2) \qquad \ln x^2 + 2\ln(e/x) \qquad \frac{24}{x^5}$$

$$0 \qquad 3e^x + 3e^{-x} \qquad 5!\left(-\frac{1}{x}\right)^6 \qquad 2x\ln x$$

$$\frac{4x}{x^4+1} \qquad 6e^x + 6e^{-x} \qquad \frac{x^5}{5!} \qquad x^2\ln x - \frac{x^2}{2}$$

3. Bestäm volymen av den rotationskropp som uppstår då det begränsade område som innesluts av kurvorna $y = 5x^{-3/2}$ och $y = \sqrt{x}$ samt linjen $x = 1$ roteras ett varv runt x-axeln.

———- DEL B ———-

4. Man konstruerar en ränna av tre likadana plankor som är 10 cm breda. En planka ligger på marken, de båda andra har vinkel θ med horisontalen. Hur ska θ väljas för att rännan ska rymma maximal mängd vatten?

5. På vilka intervall är funktionen $f(x) = \dfrac{\ln|x|}{x}$ strängt växande?

6. Skissa grafen till funktionen $f(x) = x\sqrt{2-x^2}$. Avgör speciellt om f har några lokala maxima eller minima samt om grafen har lodrät tangent någonstans.

——————- DEL C ——————-

7. A. Vad menas med att en funktion är kontinuerlig i en punkt x_0 ?
B. Ge exempel på en kontinuerlig funktion f som uppfyller att

$$\int_1^4 f(x)\,dx = -1 \quad \text{och} \quad \int_4^9 f(x)\,dx = 5.$$

8. Visa att $\sum_{k=1}^{n-1} \ln k < n\ln n - n + 1 < \sum_{k=2}^{n} \ln k$. Tips: betrakta integralen $\int_1^t \ln x\,dx$.

9. Finn ett tredjegradspolynom $p(x)$ sådant att $p(0) = f(0)$, $p'(0) = f'(0)$, $p''(0) = f''(0)$, $p'''(0) = f'''(0)$, där $f(x) = \int_0^x e^{t^2+t}\,dt$.