KTH Matematik
Examinator: Lars Filipsson
Lärare: Kristian Bjerklöv, Tomas Ekholm, Axel Hultman, Kirsti Mattila och Jan-Olov Strömberg

LÖSNINGSFÖRSLAG
SF1625 Envariabelanalys
Kontrollskrivning 2 den 22 november kl 17.15-18.15
för CDATE, CDEPR, CINEK, CMAST och COPEN

1. **Bestäm med hjälp av partiell integration alla primitiva funktioner till funktionen $g(t) = t\cos t$.**

Lösning. Vi använder formeln för partiell integration och får

$$\int t\cos t\,dt = t\sin t - \int \sin t\,dt = t\sin t + \cos t + C$$

där C är en godtycklig konstant.

SVar: De primitiva funktionerna till $g(t)$ utgörs av $G_C(t) = t\sin t + \cos t + C$ där C är en konstant som kan väljas fritt.

2. **A. Approximera integralen $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ med hjälp av en Riemannsumma med två termer.**

   B. Förklara varför ditt svar i A kan användas som en (grov) approximation av $\pi/4$.

Lösning. A. En Riemannsumma fås genom följande procedur. Man delar in integrationsintervallet i ett antal delintervall och väljer en punkt i varje delintervall att räkna ut integrandens funktionsvärde i. Sedan tar man, på varje delintervall funtionsvärdet gånger delintervallets längd. Till sist summerar man alla sådan termer. Den summa man får då är en Riemannsumma.

Vi delar därför in intervallet mellan 0 och 1 på x-axeln i två lika stora delar med längd 1/2, delningspunkten är då $x = 1/2$. På delintervallet från 0 till 1/2 väljer vi punkten 0 och räknar ut integrandens funktionsvärde i denna punkt till $1/(1+0^2) = 1$. På delintervallet från 1/2 till 1 väljer vi punkten 1 och räknar ut integrandens funktionsvärde i denna punkt till $1/(1+1^2) = 1/2$. Vi får Riemannsumman

$$1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 3/4.$$

B. Eftersom Riemannsumman är en approximation av integralen och integralen kan beräknas till

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = [\arctan x]_0^1 = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4}$$

så kan Riemannsumman uppfattas som en (mycket grov) approximation till $\pi/4$.

(OBS: det finns valfrihet i proceduren, både när man delar in i delintervall och när man väljer punkt i varje delintervall, så Riemannsumman ovan är bara ett av många korrekta svar på denna uppgift)

3. **A. Skriv om den generaliserade integralen** $\int_1^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$ **med hjälp av substitutionen** $u = \sqrt{x}$**.**

B. Beräkna integralen med hjälp av din omskrivning.

Lösning. A. Om vi gör substitutionen $u = \sqrt{x}$, där ju u är injektiv på intervallet $[1, \infty)$, så är $du = (1/(2\sqrt{x}))dx$ och $x = 1 \Leftrightarrow u = 1$ och $x = \infty \Leftrightarrow u = \infty$. Vi får med hjälp av detta omskrivningen

$$\int_1^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = \int_1^\infty 2e^{-u}du.$$

B. Vi använder omskrivningen ovan och får

$$\int_1^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = \int_1^\infty 2e^{-u}du = \lim_{R\to\infty} \int_1^R 2e^{-u}du = \lim_{R\to\infty} [-2e^{-u}]_1^R = \frac{2}{e}.$$

Svar: A. $\int_1^\infty 2e^{-u}du$. B. $2/e$.