KTH Matematik

Seminarium 1 i kursen SF1625 Envariabelanalys

1. Beräkna/förenkla så långt som möjligt (skriftligt svar och muntlig förklaring räcker på denna uppgift):

   A. $5x^2 + e^{\ln 3x + \ln 2x}$

   B. $\dfrac{e^x}{e^y} \cdot e^{y-x}$

   C. $\displaystyle\sum_{k=1}^{8} 2^k$

   D. $\sin\left(\dfrac{47\pi}{6}\right)$

   E. $\cos\left(-\dfrac{13\pi}{3}\right)$

   F. $\arctan\sqrt{3} + \arctan 1$

   G. $\cos\left(\arcsin\frac{1}{5}\right)$

   H. $\dbinom{8}{3}$

   Summasymbolen förklaras i appendix B och formeln för en geometrisk summa återfinns i kap 1.4. Trigonometrin har sin plats i kap 1.9. Binomialkoefficienter finns i kap 1.4.

2. Lös ekvationerna:

   A. $\cos 3x = -1/2$

   B. $\ln 2x + \ln 3x = \ln 3$

   C. $|4x - 2| = x$

   Trigonometri finns i kap 1.9 och logaritmer i kap 1.7. Absolutbelopp förklaras i bokens i kap 1.3, där också belysande exempel kan läsas.

3. A. Beräkna gränsvärdet: $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^5 + 10\ln x + e^x}{e^{2x} + x^2}$

B. När man i optiken analyserar diffraktion i s k gitter med N spalter uppkommer uttrycket $\left(\dfrac{\sin(Nx)}{\sin x}\right)^2$. En fysikbok påstår att detta är lika med N^2 för alla x som gör nämnaren till 0. Naturligtvis menar man inte att man kan sätta in 0 i nämnaren, utan man vill säga att

$$\left(\frac{\sin(Nx)}{\sin x}\right)^2 \to N^2, \text{ när } x \to k\pi, \text{ för varje heltal } k.$$

Hur inser man det? (N är alltså ett fixt positivt heltal här.)

C. Gränsvärdena $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x}$ och $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$ är ganska svåra att utreda från grunden. Det är emellertid enklare att visa att: om det ena av dem är $= A$ så måste det andra vara $= 1/A$ (där $A \neq 0$). Hur skulle det gå till? (Här lär vi oss att generalisera sats 8 i kap 2.)

Om gränsvärden står det både i kapitel 1 och 2. Slutsatserna i kapitel 1.6.4 och 1.7.3 är mycket viktiga och bör läggas på minnet. Kapitel 2 handlar allmänt om gränsvärde och kontinuitet.

4. A. Avgör, utan att använda miniräknare, vilket av talen $\dfrac{10^{26} - 3}{10^{26} + 4}$ och $\dfrac{10^{26} - 4}{10^{26} + 3}$ som är störst.

B. Avgör, utan att använda miniräknare, vilket av talen $\sqrt{2}^{\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)}$ och $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$ som är störst.

C. En parkeringsmätare tar betalt enligt följande: första påbörjade timmen kostar 4 kronor och därefter kostar det 2 kronor för varje ytterligare timme, upp till det maximala dagsbeloppet 10 kronor. Låt $f(t)$ vara parkeringskostnaden som funktion av tiden t timmar. Skissa funktionsgrafen $y = f(t)$ för $0 \leq t \leq 24$. Är f en kontinuerlig funktion?

För A och B, Se kapitel 1.6 om potenser och potensfunktionen. För C, se kapitel 2.2-2.3 om kontinuerliga funktioner. För D, se kapitel 1.6-1.8.

5. A. Härled formeln för den geometriska summan $a + ax + ax^2 + \cdots + ax^n$ och beräkna sedan $2 \cdot 2^{1/2} \cdot 2^{1/4} \cdot 2^{1/8} \cdot \cdots \cdot 2^{1/2^n}$.

B. Släktforskning?: Vi vill räkna ut hur många "direkta" förfäder (dvs föräldrar, mor- och farföräldrar, osv) som vi har om vi tittar tillbaka 300 år. Anta att en ny generation uppstår vart 25:e år. Hur många förfäder har vi när vi tittar tillbaka 300 år?

Se kapitel 1.4.4 om geometrisk summa.

6. En lösnings surhetsgrad anges med pH-värdet. Detta definieras som $pH = -\lg h$ där h är vätejonkoncentrationen i mol per liter och lg är 10-logaritmen. En lösning med pH-värde 7 är neutral, en lösning med lägre pH kallas sur och en lösning med högre kallas basisk. Säg nu att vi har två lösningar A och B. Vätejonkoncentrationen i lösning B är 10 gånger högre än den i lösning A. Vilken av lösningarna har lägst pH-värde, dvs är surast? Precis hur skiljer sig pH-värdet för lösning B från pH-värdet för lösning A?

Läs om lograritmlagarna kapitel 1.7. Lär dig dem ordentligt! Potenslagarna i kapitel 1.6 också!

7. Frivillig uppgift.

A. Låt $f(x) = \dfrac{\sin(2x)}{x} + a \arctan x + b$. Bestäm konstanterna a och b så att $\lim_{x\to 0} f(x) = 3$ och $\lim_{x\to\infty} f(x) = \pi$.

B. Bestäm konstanten k så att funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1-kx)}{x}, & x \neq 0 \\ 3, & x = 0 \end{cases}$$

blir konstinuerlig i origo.

C. Låt $f(x) = \ln(x^2 + 5)$ och $g(x) = 3e^{2x+5}$. Är dessa funktioner inverterbara? Bestäm i förekommande fall inversen, samt inversens definitions- och värdemängd. Och om någon av funktionerna inte skulle vara inverterbar, förklara varför!

Se kapitel 2 om gränsvärden och kontinuitet, och kap 1.8 om inverser.

Ovanstående uppgifter ska lösas inför seminarietillfälle 1. Till seminariet ska du ha med dig lösningar på dessa uppgifter, skrivna på ett papper per uppgift, med namn och personnummer på. Lösningarna (med undantag för uppgift 1) ska vara väl motiverade och tydligt skrivna. Även en person som inte är insatt i problemet i förväg ska lätt kunna läsa och förstå dina lösningar. Rita figur, förklara alla beteckningar du inför, använd vårt svenska språk för att förklara hur du resonerar!

Vid seminariet kommer lösningarna att behandlas och diskuteras. Exempel på vad som kan hända: några uppgifter samlas in och rättas av lärare, några uppgifter kamraträttas, dvs rättas av andra studenter, några uppgifter blir lösta på tavlan av studenter (t ex av dig!). Precis vad som ska hända och vad du ska göra får du veta när du kommer dit. Men du måste vara så förberedd att du kan förklara alla dina lösningar framme vid tavlan inför de andra studenterna.

Godkänd vid ett seminarietillfälle blir du om du både närvarar vid hela seminarietillfället och på ett korrekt och bra sätt utför de uppgifter du blir tilldelad, dvs räknar och förklarar vid tavlan, rättar andra studenters lösningar, lämnar in korrekta och välskrivna lösningar osv.

Godkänd på hela seminarieserien blir du om du är godkänd på minst 4 av de 6 seminarietillfällena. Klarar du det får du automatiskt 3 poäng på uppgift 3 vid det ordinarie skriftliga tentamenstillfället och det ordinarie omtentamenstillfället (och endast vid dessa tillfällen). Väl godkänd blir du om du är godkänd på alla 6 seminarietillfällena och du får då på motsvarande sätt automatiskt 4 poäng på uppgift 3. Om du har 3 poäng på uppgiften genom seminarierna och vill höja till 4 poäng behöver du göra hela uppgiften korrekt vid tentamen.

Det är tillåtet att samarbeta med andra när du löser uppgifterna, men det är inte tillåtet att skriva av en lösning eller lämna in en lösning som du inte arbetat med själv. Var och en ska skriva sina egna lösningar. Och observera detta: det räcker inte att du har med dig lösningar, du ska i detalj kunna förklara varje steg i lösningarna. Om du inte muntligt och skriftligt ordentligt kan förklara din egen lösning riskerar du att inte bli godkänd!