KTH Matematik

Seminarium 2 i kursen SF1625 Envariabelanalys

1. Derivera med avseende på variabeln x och avgör för vilka x derivatan existerar (skriftligt svar och muntlig förklaring räcker på denna uppgift):

   A. $x^3e^{-x^2} + x \ln x$

   B. $a + bx + \tan cx$

   C. $\arctan \dfrac{1}{x}$

   D. $\cos^3 x$

   E. $\sin \sqrt{x}$

   F. $\dfrac{ax+b}{cx+d}$

   G. $\arcsin(e^x)$

   H. $(\ln |x|)^2$

   J. 3^x

   Derivationsregler behandlas i kapitel 3.3. Det är viktigt att träna ordentligt på att derivera! Lös gärna alla uppgifterna 3.9-3.14 i övningsboken!

2. Bestäm alla lokala extrempunkter och alla eventuella asymptoter, skissa kurvan $y = g(t)$ och bestäm värdemängden till funktionen g om:

   A. $g(t) = te^{-t^2/2}$

   B. $g(t) = \ln(1 + t^2) - \arctan t$

   Kap 4.1 handlar om kurvritning, kap 4.2 handlar om extremvärden och kap 2.5 innehåller ett avsnitt om asymptoter.

3. A. Hur kan du veta att ekvationen $x^5 - 6x + 1 = 0$ har *exakt en* lösning x i intervallet $[-1, 1]$?

B. Beräkna en approximation av denna lösning med hjälp av Newton-Raphsons metod. Ta $x_0 = 0$ och gör tre iterationer. Använd gärna miniräknare. Vad tror du om noggrannheten i approximationen?

C. Förklara hur formeln $x_n = x_{n-1} - \dfrac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$ hänger ihop med idén bakom Newton-Raphsons metod, som kan sammanfattas: linjär approximation!

Om Newton-Raphsons metod att lösa ekvationer står att läsa i kap 4.5. När det gäller användning av derivata för att skissa funktionsgrafer och bestämma om en funktion är växande/avtagande på ett intervall så är kap 4.1 och 3.5 relevanta. Om egenskaper hos kontinuerliga funktioner på slutna begränsade intervall står i kap 2.2.

4. Låt $h(x) = (x^2 - 1)e^{2x-4}$.

A. Bestäm en ekvation för tangenten till kurvan $y = h(x)$ i den punkt på kurvan som har x-koordinat 2.

B. Använd svaret på uppgift A ovan för att beräkna en approximation av funktionsvärdet $h(2.1)$.

Läs om differentialer och linjär approximation i kapitel 3.8.

5. Vid laseroptimering försöker man minimera laserfläckens storlek på målet genom att variera strålen ut från lasern på lämpligt sätt. Man använder formeln

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda z}{\pi \omega_0^2}\right)^2}$$

där ω är radien av laserfläcken på målet, ω_0 är radien ut från lasern, λ är våglängden (fix) och z är avståndet (fixt) till målet. Om våglängden är 500 nm, hur liten laserfläck kan man få om lasern riktas mot ett mål på månen?

I kapitel 4.3 finns flera exempel som visar hur man kan lösa optimeringsproblem med hjälp av derivata.

6. Låt $f(x) = x \ln x$. Svara på följande frågor (motivering krävs):

Vad är definitionsmängden för f? Är f begränsad? Är f strängt växande? Finns det något intervall där f är strängt avtagande? Är f inverterbar? Är det sant att $f(x) > -1/3$ för alla positiva tal x ?

Förutom den första frågan, den om definitionsmängden, så handlar det här om att dra slutsatser om funktionen med hjälp av dess derivata. Kapitel 4.1 och 4.2 är relevanta!

7. Frivillig uppgift. När luft expanderar adiabatiskt (utan värmeutbyte med omgivningen) uppfyller trycket p och volymen V sambandet

$$p \cdot V^{1.4} = \text{ konstant.}$$

Vid en viss tidpunkt är trycket 5 atm och volymen 56 liter. Vid samma tidpunkt ökar volymen med hastigheten 4 liter per sekund. Hur snabbt ändras trycket vid denna tidpunkt?

Kapitel 3 innehåller mycket om begreppet derivata och dess tolkningar. I slutet av kapitel 3.2 finns ett litet avsnitt som särskilt handlar om derivator i tillämpningar. Uppgiften ovan är hämtad ur Persson och Böiers Övningar i analys i en variabel.

Ovanstående uppgifter ska lösas inför seminarietillfälle 2. Till seminariet ska du ha med dig lösningar på dessa uppgifter, skrivna på ett papper per uppgift, med namn och personnummer på. Lösningarna (med undantag för uppgift 1) ska vara väl motiverade och tydligt skrivna. Även en person som inte är insatt i problemet i förväg ska lätt kunna läsa och förstå dina lösningar. Rita figur, förklara alla beteckningar du inför, använd vårt svenska språk för att förklara hur du resonerar!

Vid seminariet kommer lösningarna att behandlas och diskuteras. Exempel på vad som kan hända: några uppgifter samlas in och rättas av lärare, några uppgifter kamraträttas, dvs rättas av andra studenter, några uppgifter blir lösta på tavlan av studenter (t ex av dig!). Precis vad som ska hända och vad du ska göra får du veta när du kommer dit. Men du måste vara så förberedd att du kan förklara alla dina lösningar framme vid tavlan inför de andra studenterna.

Godkänd vid ett seminarietillfälle blir du om du både närvarar vid hela seminarietillfället och på ett korrekt och bra sätt utför de uppgifter du blir tilldelad, dvs räknar och förklarar vid tavlan, rättar andra studenters lösningar, lämnar in korrekta och välskrivna lösningar osv.

Godkänd på hela seminarieserien blir du om du är godkänd på minst 4 av de 6 seminarietillfällena. Klarar du det får du automatiskt 3 poäng på uppgift 3 vid det ordinarie skriftliga tentamenstillfället och det ordinarie omtenamenstillfället (och endast vid dessa tillfällen). Väl godkänd blir du om du är godkänd på alla 6 seminarietillfällena och du får då på motsvarande sätt 4 poäng på uppgift 3. Om du har 3 poäng på uppgiften genom seminarierna och vill höja till 4 poäng behöver du göra hela uppgiften korrekt vid tentamen.

Det är tillåtet att samarbeta när du löser uppgifterna, men det är inte tillåtet att skriva av en lösning eller lämna in en lösning som du inte arbetat med själv. Var och en ska skriva sina egna lösningar. Och observera detta: det räcker inte att du har med dig lösningar, du ska i detalj kunna förklara varje steg i lösningarna. Om du inte muntligt och skriftligt kan förklara din egen lösning riskerar du att inte bli godkänd.