Flervariabel-funktioner

$$z = f(x, y)$$

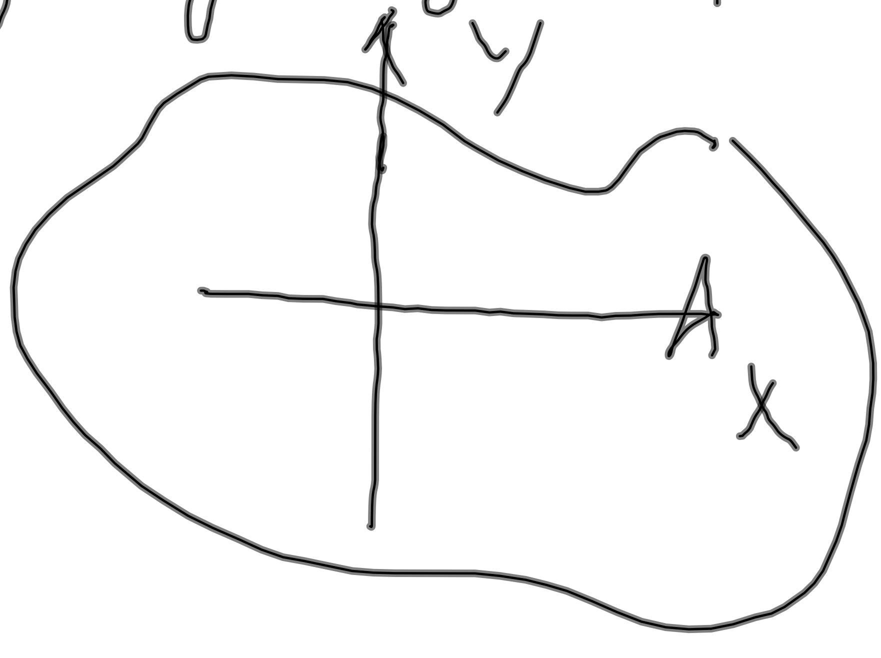
$$z = 3x^2 - 5y^2$$

$$z = \sin(x - 7y^3)$$

mar 21-10:02

Områden

$\mathbb{R}^2$ är mängden punkter (x,y) där x, y är godtyckliga tal.

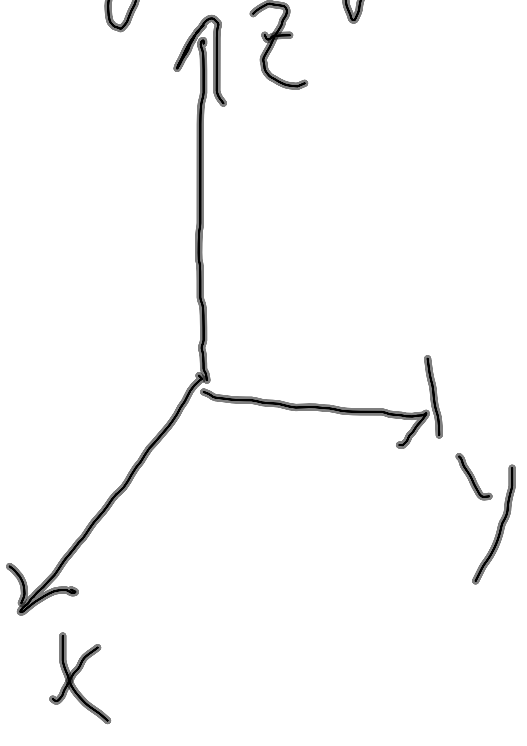


mar 21-10:12

$\mathbb{R}^3$ är mängden

(x, y, z) där x, y, z

är godtyckliga.



En funktion

$z = f(x, y)$ är

definierad i $\mathbb{R}^2$

Funktionsgrafen

$(x, y, f(x,y))$ ligger

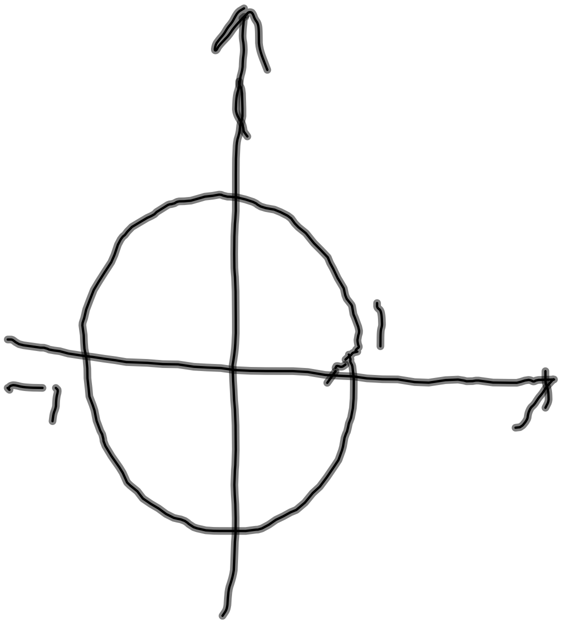
i $\mathbb{R}^3$.

mar 21-10:18

Vi kan definiera områden i $\mathbb{R}^2$:

"Informellt":

Vi kan tala om cirkeln med radie 1.



Vi vill kunna

definiera cirkeln

formellt.

mar 21-10:21

Görs vanligen i

denna form

$$D = \{(x,y) : P(x,y)\}$$

där P är ett villkor

T.ex enhetscirkel

$$C = \{(x,y) : x^2+y^2=1\}$$

mar 21-10:22

Vad är

$C_2 = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 1\}$?

Det är cirkelskivan

med radie 1.

Vad är

$C_3 = \{(x,y) : x^2+y^2 < 1\}$?

Cirkelskivan utan randen.

mar 21-10:24

Vad är

$$C_7 = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 7\}$$

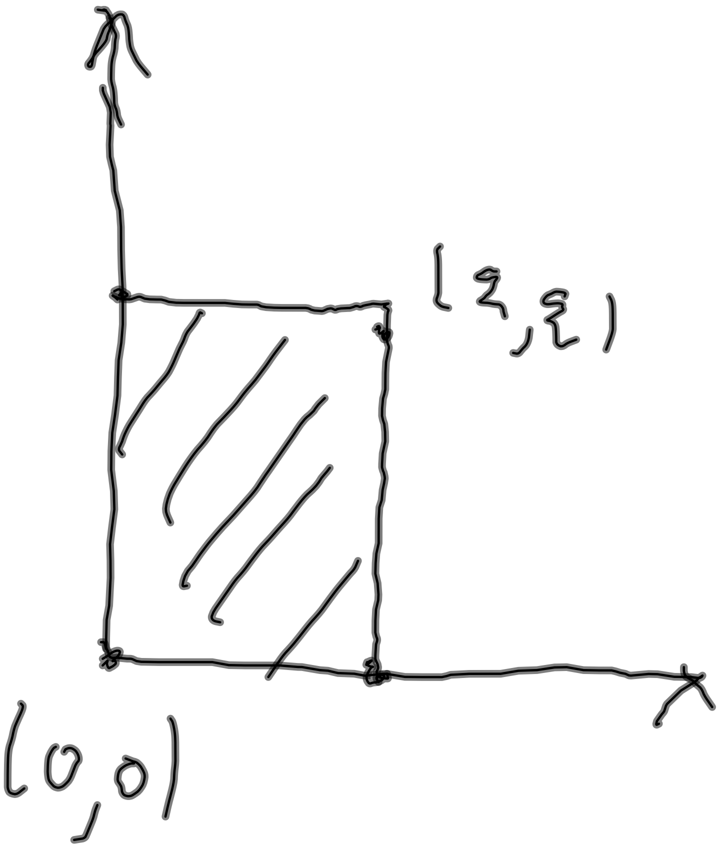
?

Cirkelskivan med radie

$\sqrt{7}$.

Vi har en kvadrat
K med hörn i:
(0,0), (0,2), (2,0), (2,2)
Hur beskriver vi den
med villkor P?
(Kvadraten är "fylld".)

mar 21-10:28



$$K = \left\{ (x,y) : \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{array} \right\}$$

Några formella definitioner.

Randen

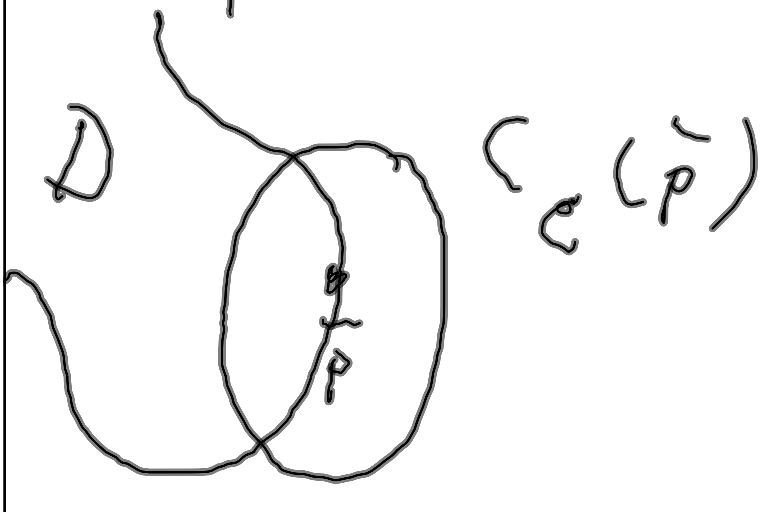
En punkt $\bar{p} = (x, y)$ är en randpunkt till D om det för varje $\varepsilon > 0$

mar 21-10:32

gäller att cirkelskivan

$C_\varepsilon(\bar{p})$ med mittpunkt

i $\bar{p}$ och radie ε



både innehåller punkter

i D och punkter utanför D.

Randen till D

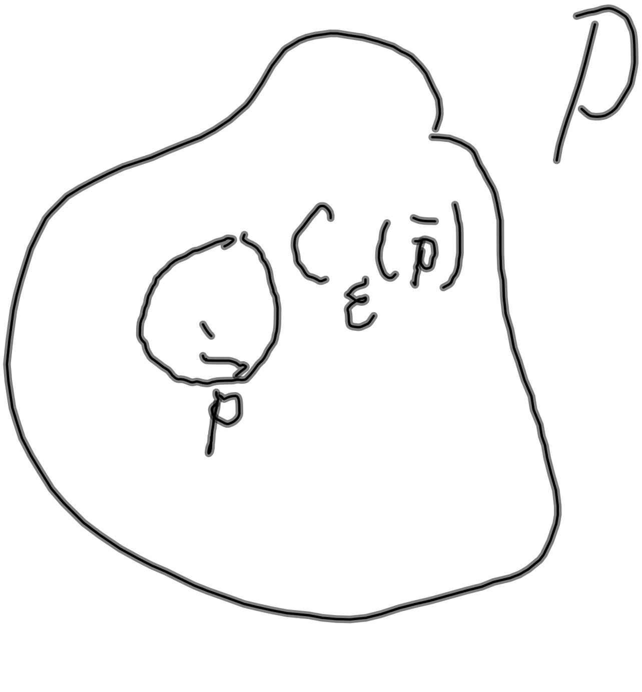
är mängden av alla randpunkter till D.

Inre punkter

$\bar{p} = (x, y)$ är en inre punkt till D om det är så att om

mar 21-10:36

ε är tillräckligt litet så innehåller $C_\varepsilon(\bar{p})$ bara punkter i D.



Öppna mängder

D är öppen om den bara innehåller inre punkter.

Ex: $\{(x,y) : x^2 + y^2 < 1\}$

mar 21-10:39

Slutna mängder

D är sluten om den innehåller alla randpunkter

Ex: $\{(x,y) : x^2+y^2 \leq 1\}$

mar 21-10:41

Test:

Är $\{(x,y) : x^2+y^2=1\}$

öppen eller sluten?

Svar: Sluten.

Test 2: Är alla mängder antingen öppna eller slutna?

Svaret är nej!

Hela randen behöver inte finnas med.

Ex: $\left\{ (x,y) : \begin{matrix} 0 < x < 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{matrix} \right\}$

Finns det mängder

som är både öppna

och slutna?

Ja: $\emptyset$ och hela $\mathbb{R}^2$!

<u>Sats:</u> Om D är öppen

så är komplementet $\bar{D}$

sluten och omvänt.

mar 21-10:47

Vi behöver ett mått på "storleken" hos en punkt

$\bar{p} = (x, y)$

<u>Def:</u> <u>Normen</u> för $\|\bar{p}\|$

är $\|\bar{p}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Så en cirkelskiva med radie 1 kan beskrivas med

$\{(x,y) : \|(x,y)\| \leq 1\}$

mar 21-11:06

Ett område D är

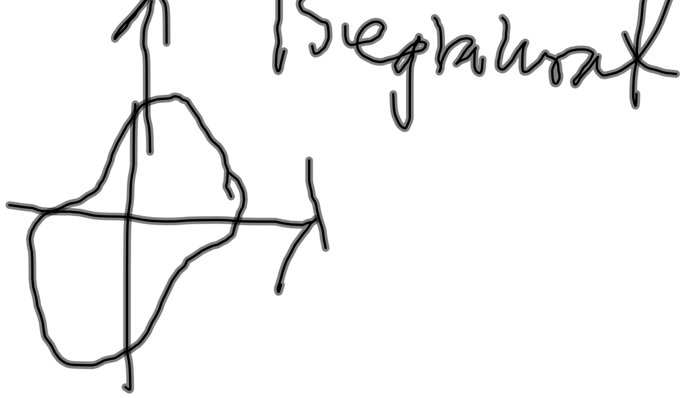
<u>begränsat</u> om det finns

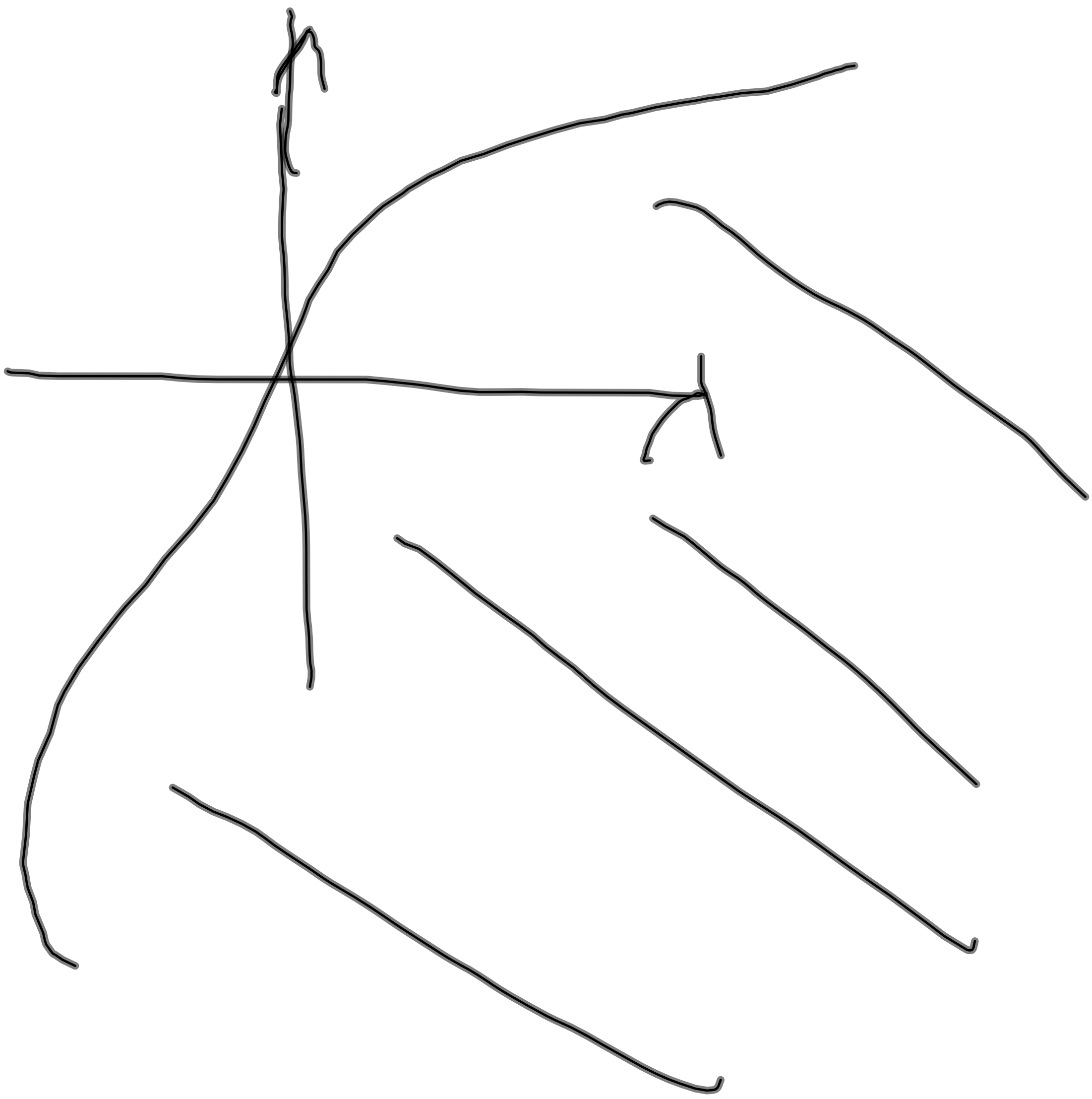
ett tal M så att

$\|\bar{p}\| < M$ för alla

$\bar{p} \in D$.

<u>Ex</u>





$\to \infty$

Obegränsat.

Def: Ett område D är **kompakt** om det är **slutet** och **begränsat**.

Kompakta områden är viktiga vid **optimering**

mar 21-11:12

Om f är definierad på D och är kontinuerlig så antar f sitt max och min värdemängd på D.

mar 21-11:14

Nu behandlar vi funktioner

Några definitioner

1. Definitionsmängd

Om $z = f(x,y)$ är definitionsmängden de punkter där f går att beräkna.

mar 21-11:16

Ex: $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

Vad är definitionsmängden?

Vi måste ha $4 - x^2 - y^2 \geq 0$

Så D är $\{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$

dvs en cirkelskiva med radie 2.

mar 21-11:17

<u>Ex</u> $z = e^{x-y^3}$

Definitionsmängden

är hela $\mathbb{R}^2$.

2. <u>Värdemängden</u>

Värdemängden är de

värden som z kan anta.

mar 21-11:20

Ex: $z = e^{x-y^3}$

Värdemängden är

$\{z : z > 0\}$

Ex: $z = x - y^3$

Värdemängden är

hela $\mathbb{R}$.

mar 21-11:22

Om vi har

$z = f(x,y)$, hur

kan vi få ett grepp

om hur den "ser ut"?

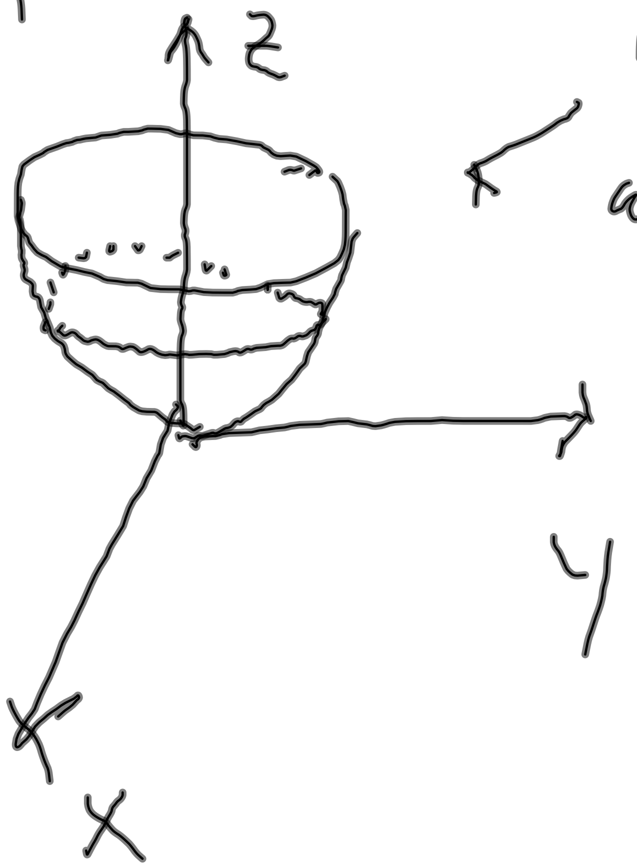
Vi tittar först på

$z = x^2 + y^2$.

mar 21-11:24

Vi kan "plotta" funktionen. Kan vi göra det "för hand"?

En del av funktionen



Går det att rita funktioner? Ofta mycket svårt.

Men det finns ett trick: Använd nivåkurvor.

Vi behöver bara rita 2-dimensionella figurer.

Metoden:

$z = f(x, y)$

Välj värden $k_0, k_1, k_2, \ldots$

på z. (T.ex $k_0 = 0$, $k_1 = 1$,

$k_2 = 2$, o.s.v.

)

Beräkna nivåkurvor

mar 21-11:34

$$C_0 = \{(x,y) : f(x,y) = k_0\}$$

$$C_1 = \{(x,y) : f(x,y) = k_1\}$$

$$C_2 = \{(x,y) : f(x,y) = k_2\}$$

$$\vdots$$

Dessa 2-dimensionella kurvor ritas sedan i ett 2-dimensionellt diagram.

mar 21-11:36

Ex: $z = f(x,y) = x^2+y^2$

$k_0 = 0$: $C_0 = \{(x,y) : x^2+y^2 = 0\}$

$= \{(0,0)\}$

$k_1 = 1$: $C_1 = \{(x,y) : x^2+y^2 = 1\}$

(enhetscirkel)

$k_2 = 2$: $C_2 = \{(x,y) : x^2+y^2 = 2\}$

(cirkel med radie $\sqrt{2}$)

mar 21-11:38

Rita i samma diagram