Inledning till integration

Lite repetition av envariabel-integration.

Två typer av integraler:

apr 11-12:56

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = \left[\sin x\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 - 0 = 1$$

De två typerna av integraler betyder olika

apr 11-13:02

saker men är

<u>beräkningsmässigt</u>

väsentligt lika.

I flervariabel är

de två typerna av

integraler men olika

apr 11-13:05

Varvanda.

Nästan alla typer av integraler är av andra typen d.v.s. integraler över ett bestämt område.

Obs: Vi har sett ett exempel på den första typen av integralproblem.

Ex: Hitta en funktion f så att

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos y \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -x \sin y$$

apr 11-13:08

Lösningen är

$f = x\cos y + C$

<u>Obs:</u> Att beräkna

$\int \cos x \, dx$ är

egentligen samma sak

som att lösa

apr 11-13:10

differentialekvationen

$f'(x) = \cos x$

I flervariabel har

vi dels problemet

att lösa partiella

differentialekvationer,

apr 11-13:11

dels problemet att
integrera.

Vi tittar nu på
dubbelintegralen

Vi ser först på
ett enkelt fall.

apr 11-13:12

Vi har en funktion

$z = f(x,y)$ definierad

på en rektangel R.

Vi börjar med att

anta att $f(x,y) \geq 0$

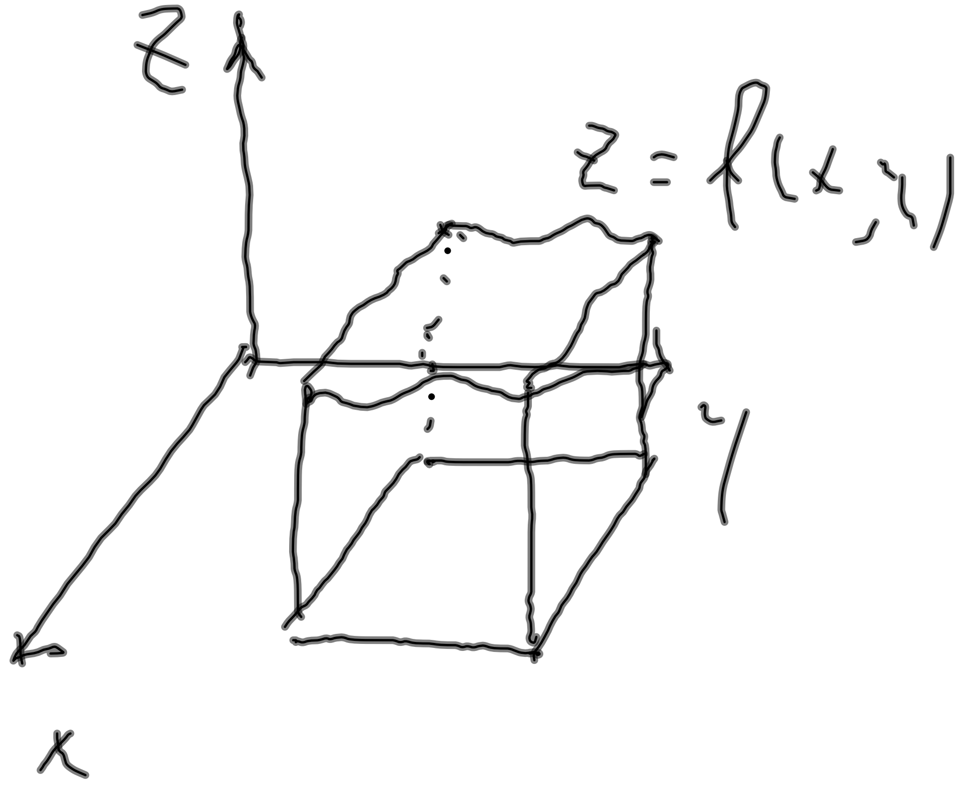
överallt på R.

apr 11-13:14

$$\iint\limits_{R} f(x,y)\,dx\,dy$$

är i princip volymen
av en låda med R
som <u>bas</u> och $f(x,y)$
som <u>lock</u>.

apr 11-13:15

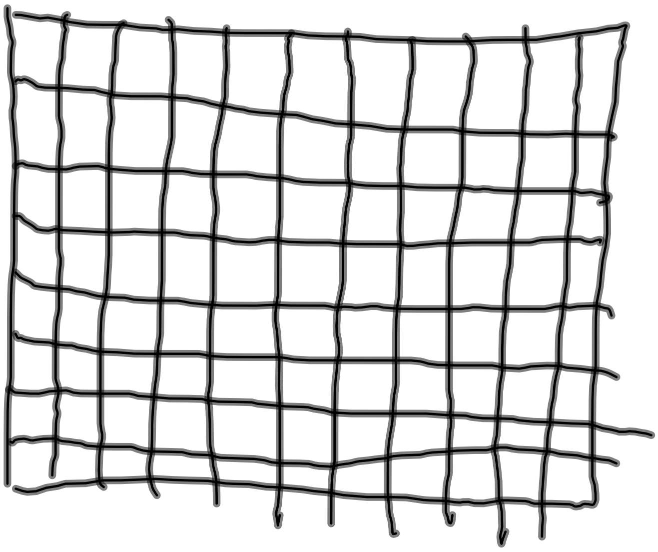


Hur kan volymen beräknas?

Idé: Vi kan använda en "trappfunktion".

apr 11-13:16

Dela in R i små rektanglar



R

Vi definierar en funktion $\bar{\Phi}$ som är <u>konstant</u>

på varje liten rektangel
och som "ungefär" är
liten med f. Vi kan
t.ex. låta $\bar{\Phi}$ ha
värdet av f i mittpunkten
på varje liten rektangel.

Vi kan numrera rektanglarna

apr 11-13:20

r_{21}	r_{22}	r_{23}
r_{11}	r_{12}	r_{13}

Φ_{ij} är funktionsvärdet

på Φ i rektangel r_{ij}

Antag att varje rektangel

har area ΔA

Då säger vi att

integralen av Φ

är $\sum_i \sum_j \Phi_{ij} \Delta A$

(I vårt tidigare exempel

får vi $(\Phi_{11} + \Phi_{12} + .. + \Phi_{23})$

$\cdot \Delta A$

apr 11-13:25

Integralen av Φ blir "ungefär" volymen.

Formell definition

Antag att om vi tar ett godtyckligt tal $\varepsilon > 0$ så kan vi

apr 11-13:27

hitta två trappfunktioner
Φ, Ψ så att

$$\Phi(x,y) \leq f(x,y) \leq \Psi(x,y)$$

på R och

$$I(\Psi) - I(\Phi) < \varepsilon .$$

Om alla funktioner

apr 11-13:28

för alla ε såger

vi att $f(x,i)$ är

<u>integrerbar</u> på R.

(Riemann-integrerbar
egentligen.)

Då går det att hitta

apr 11-13:30

ett tal I^* så att

$I(\Phi) \to I^*$ och

$I(\Psi) \to I^*$ då vi

delar in i mindre och

mindre rektanglar.

Talet I^* är $\iint\limits_R f(x,y)\,dx\,dy$

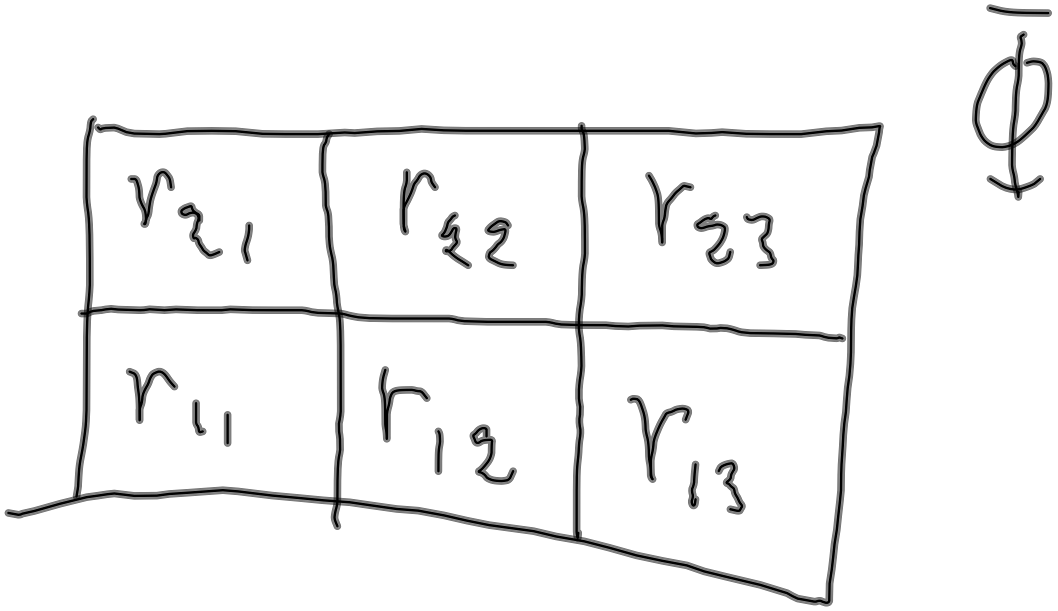
apr 11-13:32

Hur räknar vi ut
integralen rent
praktiskt?

Vi använder
"Brödskive-metoden"
Vi integrerar i en
variabel två gånger.

apr 11-13:34

Ex: Om vi har uppdelning



$$I(\Phi) = (r_{11} + \dots + r_{23})\Delta A$$

Vi kan dela upp i två

delsummor:

$$I(\Phi) = (r_{11} + r_{12} + r_{13})\Delta A$$

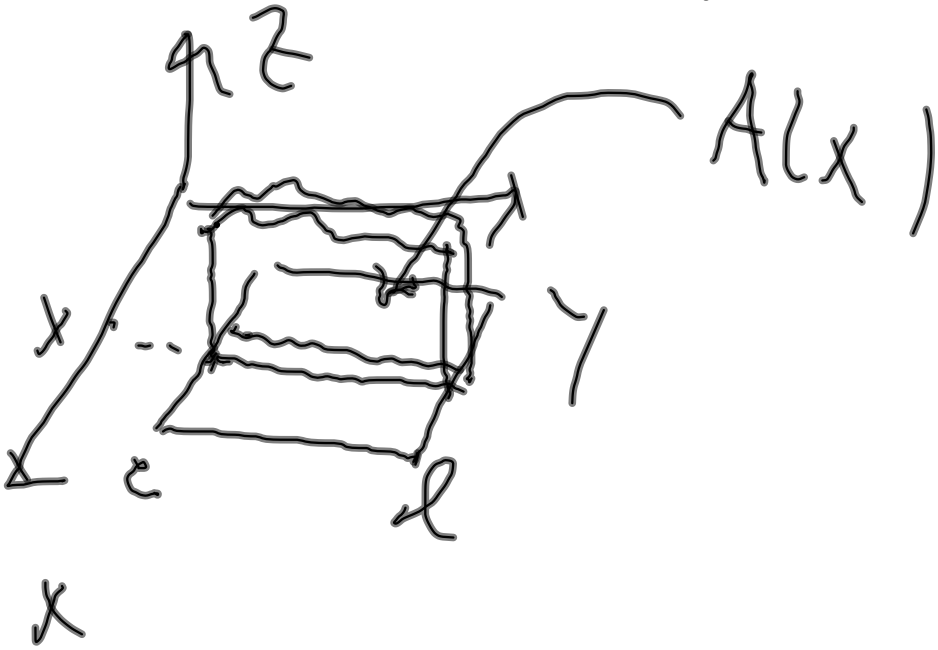
$$+ (r_{21} + r_{22} + r_{23})\Delta A$$

Dessa delar kan räknas ut först och sedan summeras.

Det motsvarar följande

apr 11-13:37

sätt att räkna;



Vad är volymen av en "skiva"? Om skivan har arean A(x) och tjockleken Δx

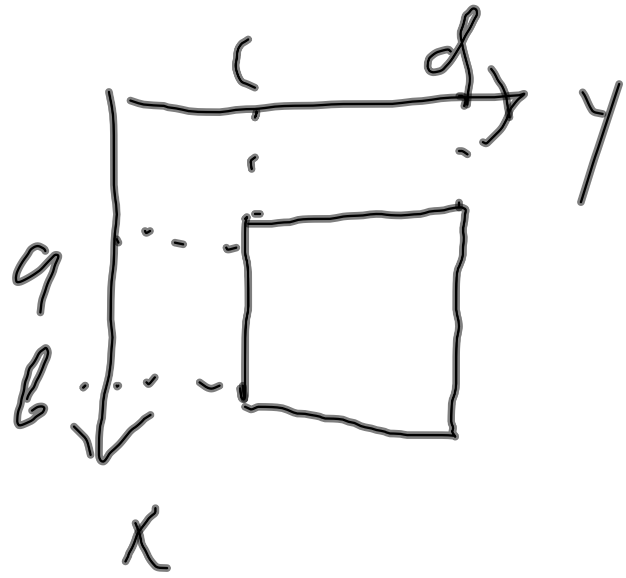
får vi volymen $A(x)\Delta x$

Hur beräknar vi $A(x)$

$$A(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy$$

Resten går att räkna ut.

apr 11-13:41



Sedan sätter vi

$$I = \int_a^b A(x)\,dx$$

apr 11-13:43

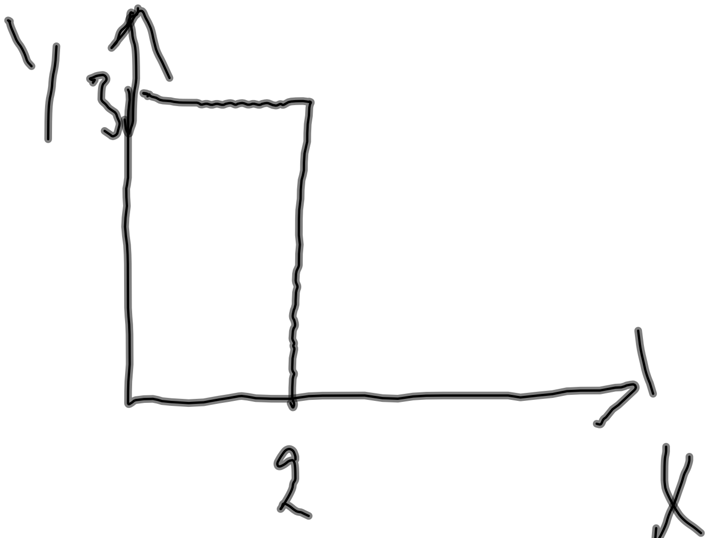
Deltta kan skrivas

$$I = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx$$

apr 11-13:45

Ex: Beräkna

$$\iint_R (xy+y^2)\,dx\,dy$$



1) Beräkna först

$$\int_0^3 (xy+y^2)\,dy =$$

$$= \left[\frac{xy^2}{2}+\frac{y^3}{3}\right]_0^3 = \frac{9x}{2}+9$$

Detta är $A(x)$.

apr 11-14:04

2) Beräkna sedan

$$\int_0^2 A(x)\,dx = \int_0^2 \left(\frac{9x}{2} + 9\right)dx$$

$$= \left[\frac{9x^2}{4} + 9x\right]_0^2 = 27$$

Integration på andra ledden. P.g.a. symmetrin kan vi snitta i y-led först (om vi vill.)

$$A(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$$

apr 11-14:07

$$I = \int_c^d A(y)\,dy$$

d.v.s.

$$I = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy$$

apr 11-14:09

I vårt exempel

1) Beräkna först

$$\int_0^2 (xy + y^2)\,dx =$$

$$= \left[\frac{x^2 y}{2} + xy^2\right]_0^2 = 2y + 2y^2$$

Detta är $A(y)$

2) Beräkna sedan

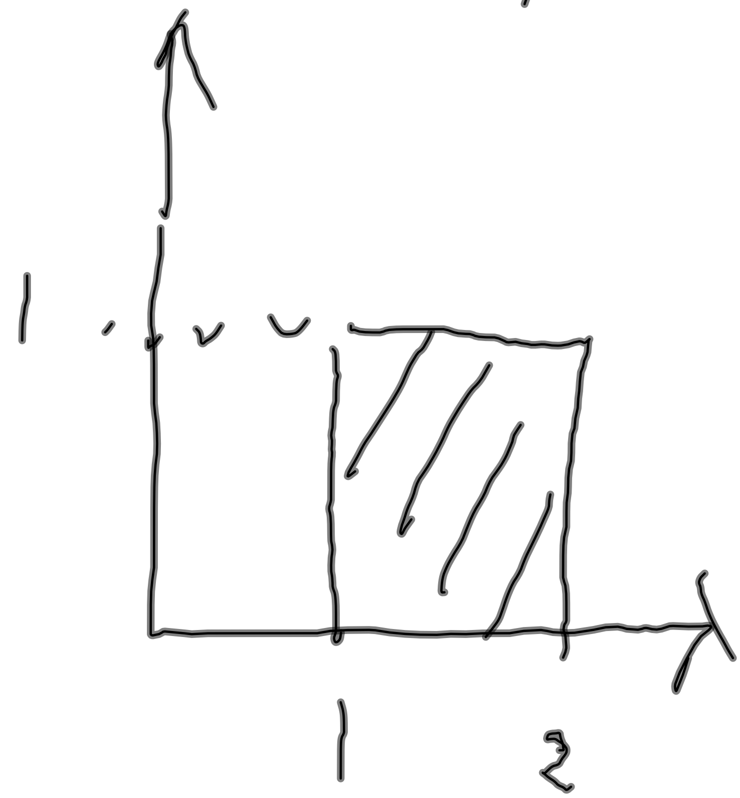
$$\int_0^3 A(y)\,dy = \int_0^3 (2y + 2y^2)\,dy$$

$$= \left[y^2 + \frac{2}{3}y^3 \right]_0^3 = 27$$

Ex: Beräkna

$$\iint_R x e^{x^2 - y} \, dx\,dy$$

över



apr 11-14:12

Metod I: Integrering

Y-led först.

$$\int_0^1 x e^{x^2-y}\,dy =$$

$$= \left[-xe^{x^2-y}\right]_0^1 = -xe^{x^2-1} + xe^{x^2}$$

apr 11-14:14

Sedun i x-led

$$\int_1^2 \left(-xe^{x^2-1} + xe^{x^2}\right)dx$$

$$= \left[-\frac{e^{x^2-1}}{2} + \frac{e^{x^2}}{2}\right]_1^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^4 - e^3 - e + 1\right)$$

apr 11-14:15

Metod II: Först i x-led

$$\int_1^2 x e^{x^2-4}\,dx = \left[\frac{e^{x^2-4}}{2}\right]_1^2$$

$$= \frac{e^{4-4}}{2} - \frac{e^{1-4}}{2}$$

apr 11-14:17

och sedan i y-led

$$\int_0^1 \left(\frac{e^{4-y}}{2} - \frac{e^{1-y}}{2} \right) dy$$

$$= \left[-\frac{e^{4-y}}{2} + \frac{e^{1-y}}{2} \right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^4 - e^3 - e + 1\right)$$

<u>Obs:</u> Även om de två metoderna (x eller y först) ger samma resultat så kan den ena vara <u>mycket</u> lättare än den andra.

apr 11-14:20

Vi känner specialfallet rektangel med $f \geq 0$.

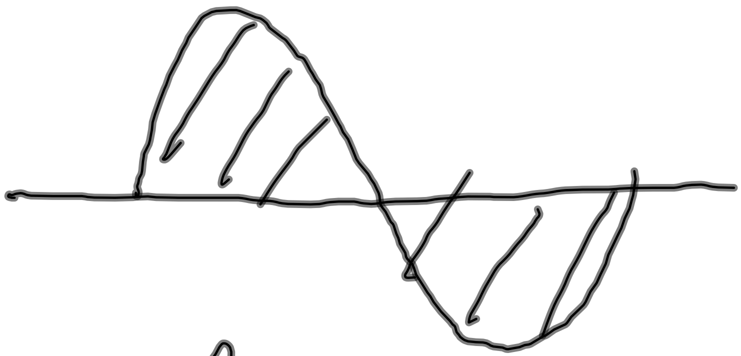
Vad händer om $f < 0$?

Positiva och negativa delar av en integral tar ut varandra.

apr 11-14:22

Ex

$$\int_0^{2\pi} \sin x \, dx = 0$$



Antag att vi har en låda med "tak" $z = f(x,y)$ och "golv" $z = g(x,y)$

Volymen fås genom

$$\iint_R (f(x,y) - g(x,y))\,dx\,dy$$

$$= \iint_R f(x,y)\,dx\,dy \; -$$

apr 11-14:24

$$\iint_R g(x,y)\,dx\,dy$$

Om $g(x,y) > f(x,y)$

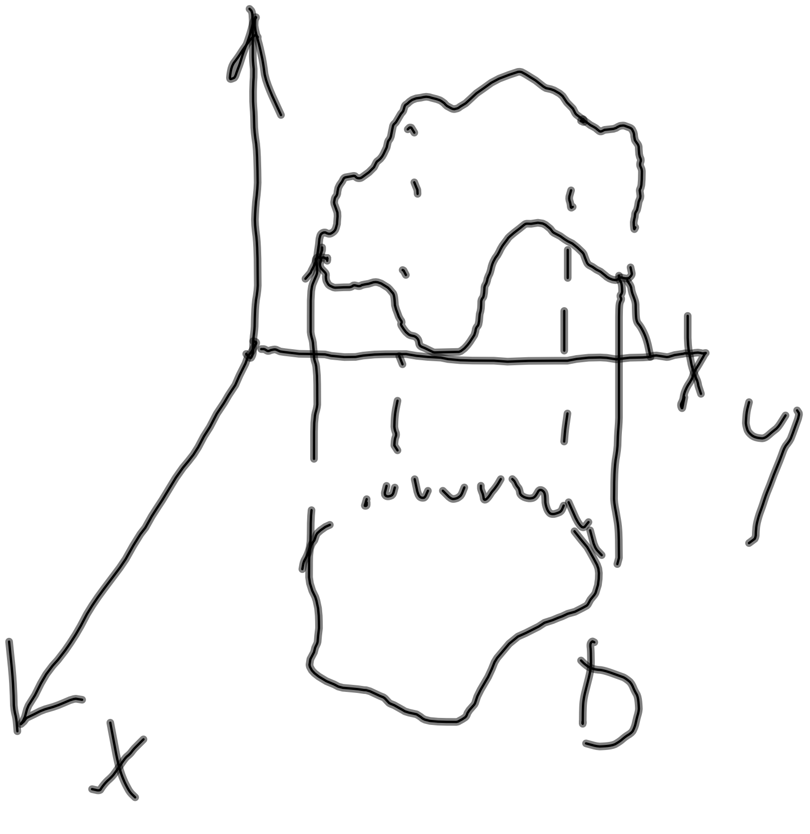
räknar vi volymen

som "negativ".

apr 11-14:25

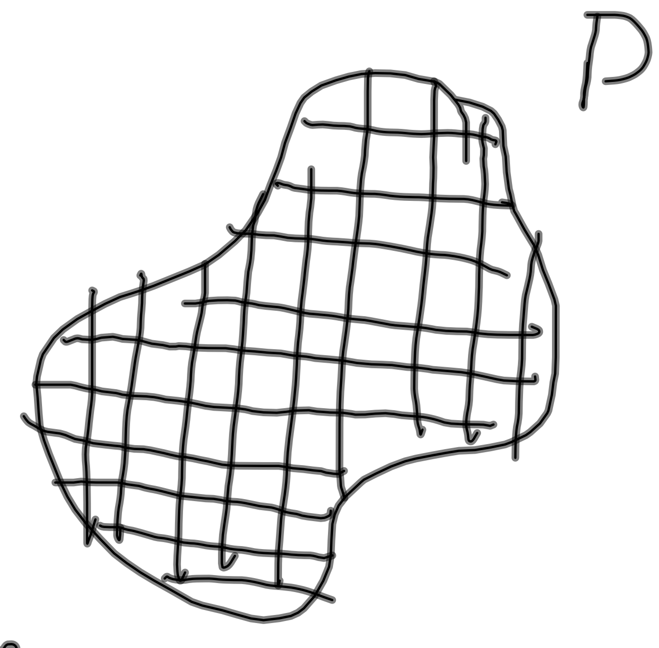
Nu något svårare:

Integration över ett godtyckligt område D.



apr 11-14:27

I princip kan vi dela in D i rektanglar



och bilda en trapp-funktion med en integral.

apr 11-14:29

Trappfunktionens integral blir då ungefär volymen.

$I(\Phi) \to I^*$ som

blir integralen

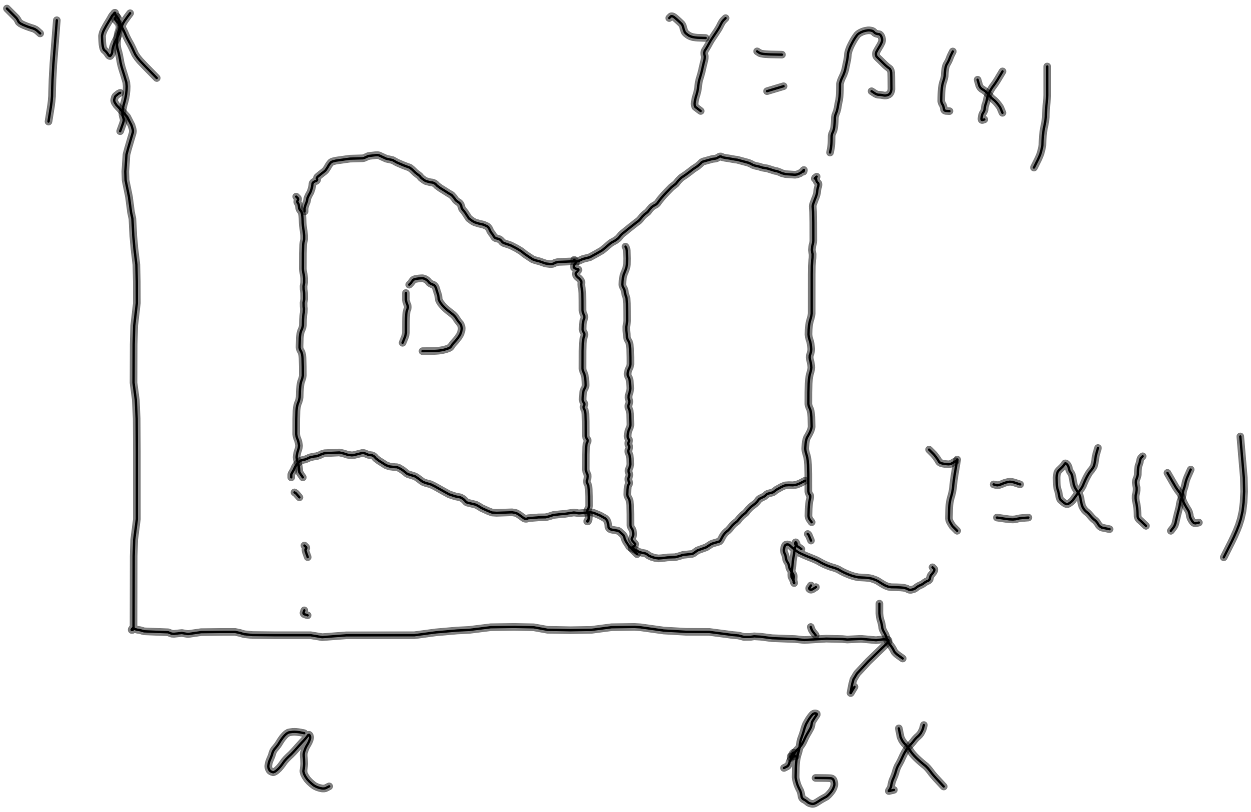
$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

Hur räknar vi ut integralen rent praktiskt?

"Brödskivemetoden" igen:

Vi ser på en speciell situation först:

apr 11-14:32



Då gäller vi

$$A(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy$$

apr 11-14:33

Sedan får vi

$$I = \int_a^b A(x)\,dx$$

Ex

D:

Beräkna $\iint_D \frac{x}{(1+y)^2}\,dx\,dy$

$$A(x) = \int_0^x \frac{x}{(1+y)^2}\,dy$$

$(\alpha(x) = 0,\ \beta(x) = x)$

apr 11-14:37

$$A(x) = \left[-\frac{x}{1+y} \right]_0^x =$$

$$= -\frac{x}{1+x} + x$$

$$I = \int_0^1 \left(-\frac{x}{1+x} + x \right) dx$$

apr 11-14:41

$$\frac{-x}{1+x} = \frac{-x-1}{1+x} + \frac{1}{1+x}$$

$$= -1 + \frac{1}{1+x}$$

$$I = \int_0^1 \left(-1 + \frac{1}{1+x} + x\right) dx$$

$$= \left[-x + \ln|1+x| + \frac{x^2}{2}\right]_0^1$$

apr 11-14:44

$$= -1 + \ln 2 + \frac{1}{2} =$$

$$\ln 2 - \frac{1}{2}$$

apr 11-14:46