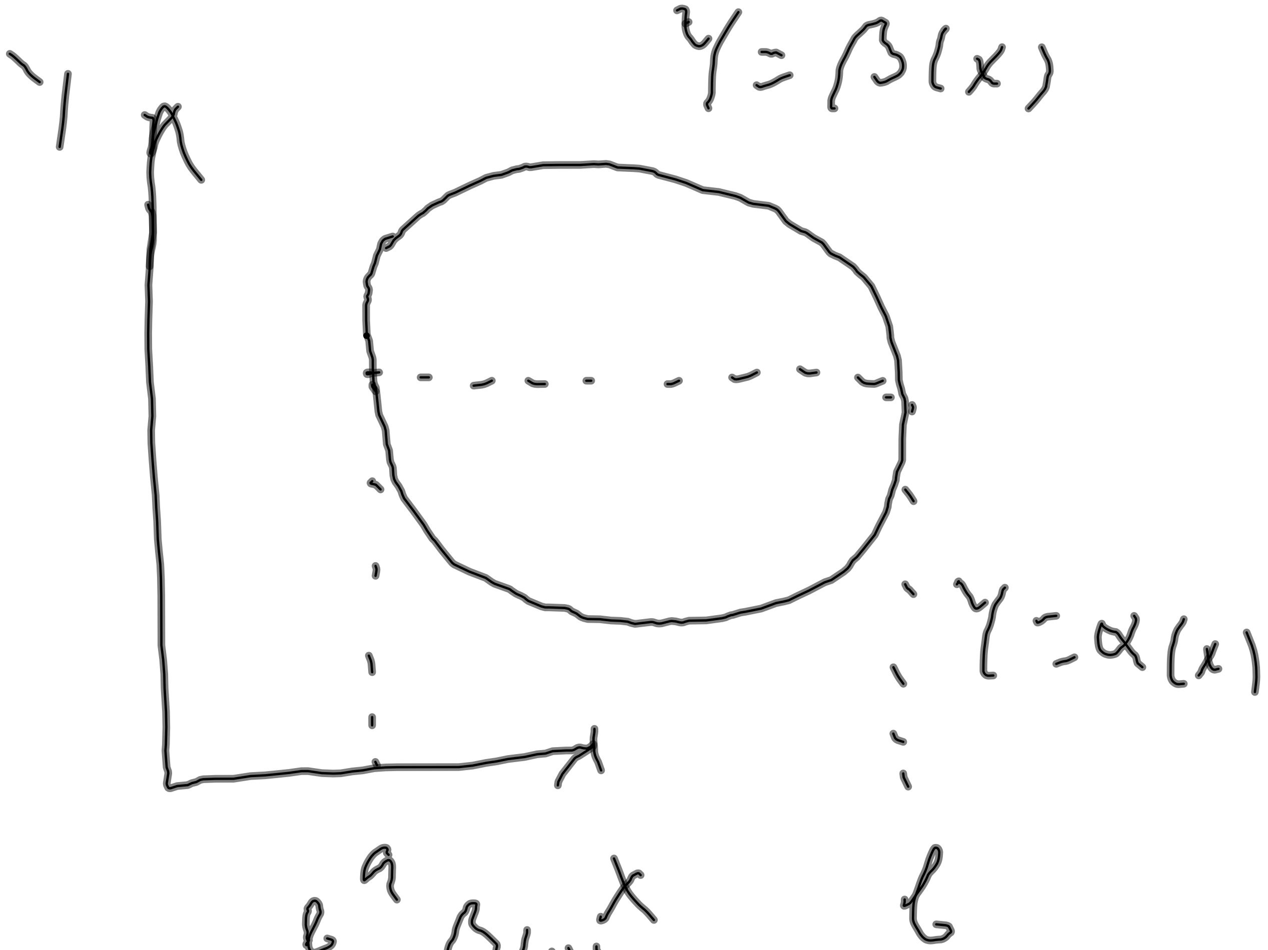
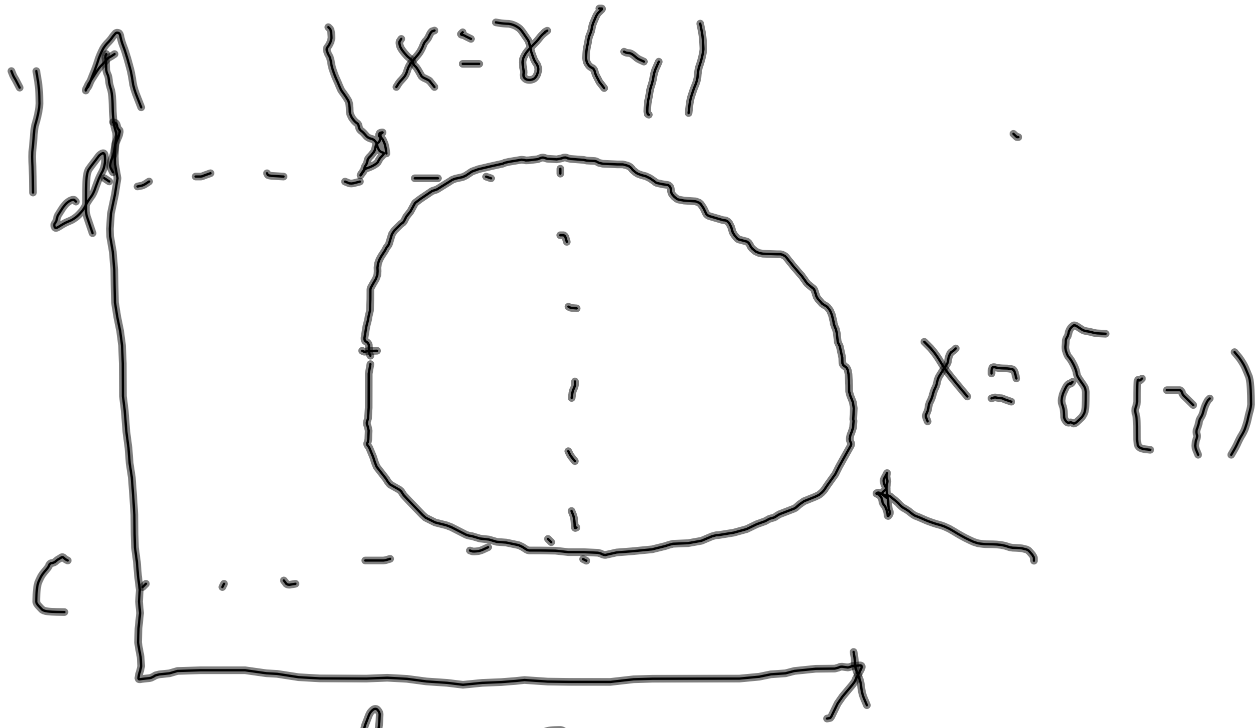
Integration över godtyckliga områden

Omkastning av integrationsordningen.

apr 12-12:56



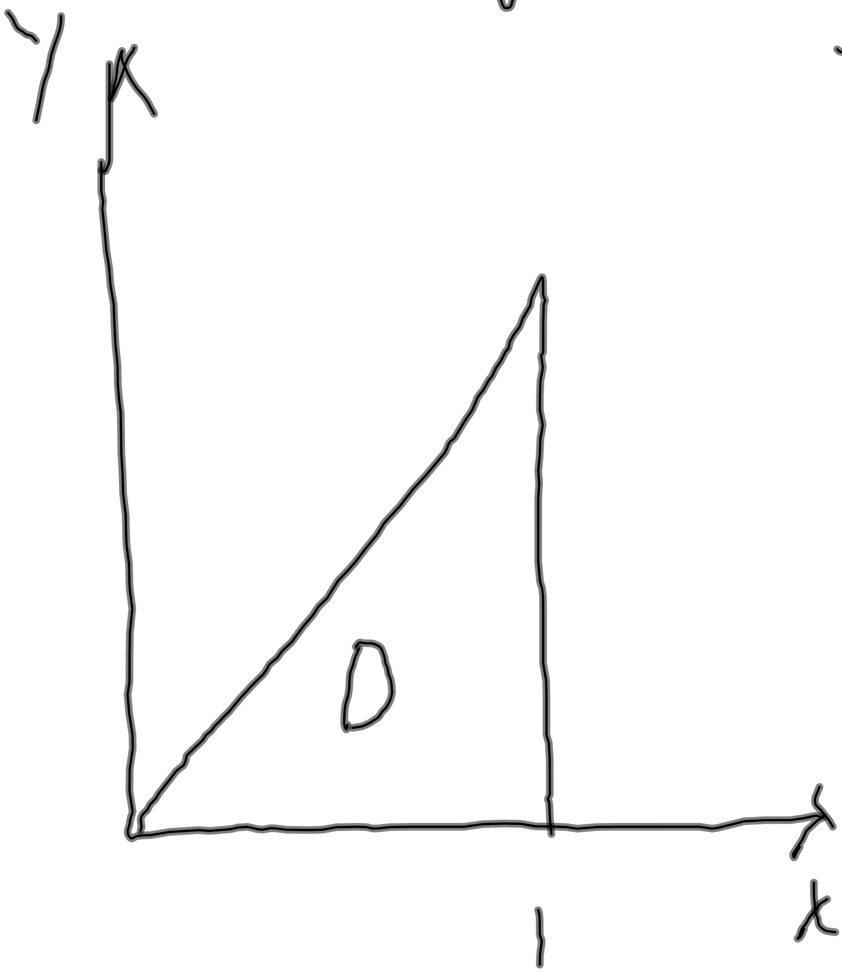
$$I = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$



$$I = \int_c^d \left(\int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x,y)\,dx \right) dy$$

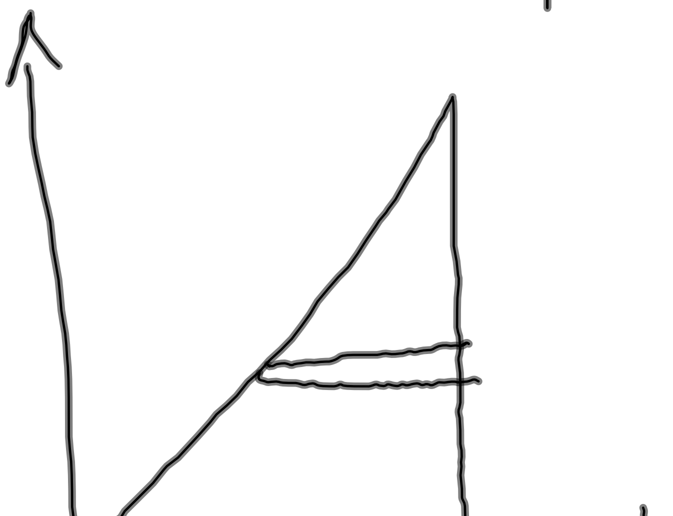
Det kan vara stor skillnad på svårigheterna med olika integrationsordning-ar.

Ex:



$$f(x,y) = e^{x^2}$$

Om vi integrerar i x-led först får vi



$$A(y) = \int_y^1 e^{x^2}\,dx$$

Men e^{x^2} går inte

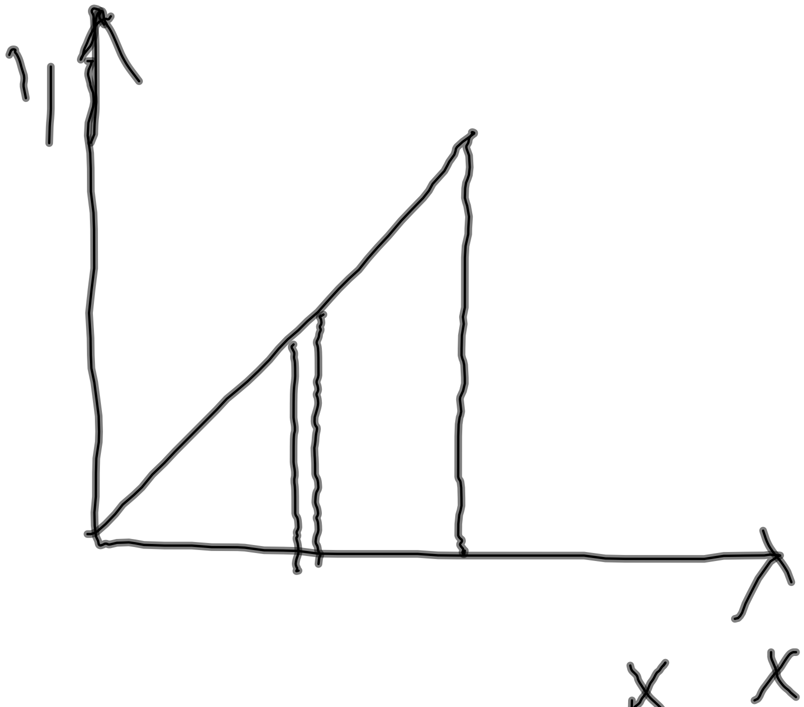
att integrera på

sluten form!

Försök med andra

ordningen: Y först

apr 12-13:08



$$A(x) = \int_0^x e^{x^2}\,dy =$$

$$= \left[y e^{x^2} \right]_0^x = x e^{x^2}$$

Sedan integrerar vi i x-led:

$$I = \int_0^1 x e^{x^2} \, dx =$$

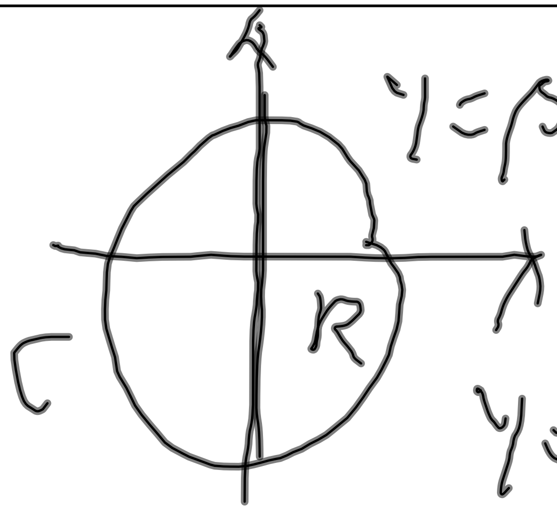
$$= \left[\frac{e^{x^2}}{2} \right]_0^1 = \frac{e}{2} - \frac{1}{2}$$

Nivåkurvemetoden

Vi tittar på ett enkelt exempel:

Beräkna en cirkels area

apr 12-13:14



$y = \beta(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$

$y = \alpha(x) = -\sqrt{R^2 - x^2}$

(ok: Vi vet att det är πR^2.)

En möjlig metod är att sätta $f(x,y) = 1$

och beräkna

$$\iint_C 1 \cdot dx\,dy$$

Arean är då

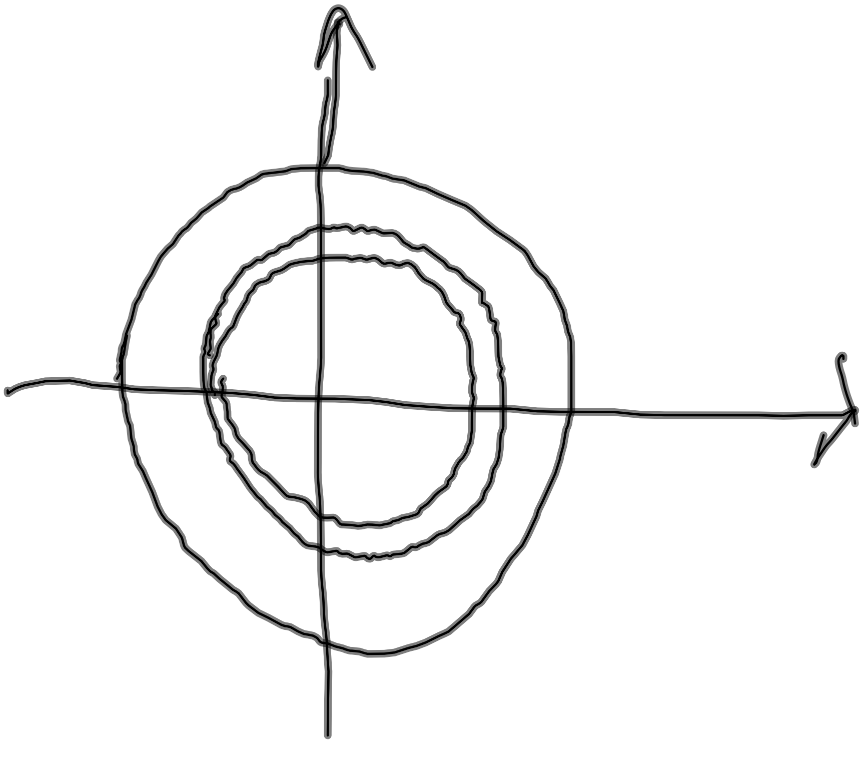
$$\int_{-R}^{R} \left(\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} 1\,dy \right) dx =$$

$$= \int_{-R}^{R} 2\sqrt{R^2 - x^2}\, dx$$

Denna integral blir svår!

Men det finns ett enklare sätt.

"Lökskalsmetoden":
Vi snittar längs
något annat än
koordinataxlarna.



apr 12-13:21

Ett "skal" är en cirkel

med radie x $(0 \leq x \leq R)$

och med tjocklek Δx

Ett sådant skal har

area $2\pi x \Delta x$

Om vi "skalar" hela

cirkeln i tillräckligt

apr 12-13:23

tunna skal och summerar får vi

$$A = \int_0^R 2\pi x \, dx =$$

$$= \left[\pi x^2\right]_0^R = \pi R^2$$

apr 12-13:25

Principen mer generellt:

Försök hitta en typ av nivåkurvor

$g(x,y)=h$ som

passar problemet

Integrera sedan i "h-led".

apr 12-13:26

(Ta hänsyn till längden av nivåkurvorna)

(I vårt fall hade nivåkurvorna formen
$\sqrt{x^2+y^2} = 4$)

Ex: Beräkna

$$\iint_D \frac{1}{1+x+y}\,dx\,dy$$

över

Vi kan definiera nivåkurvor

$x+y=u$ där $0 \leq u \leq 1$

De passar bra eftersom

$$\frac{1}{1+x+y} = \frac{1}{1+u}$$

apr 12-13:31

På en nivåkurva

$X+Y=u$ har alltså

f konstant värde $\dfrac{1}{1+u}$

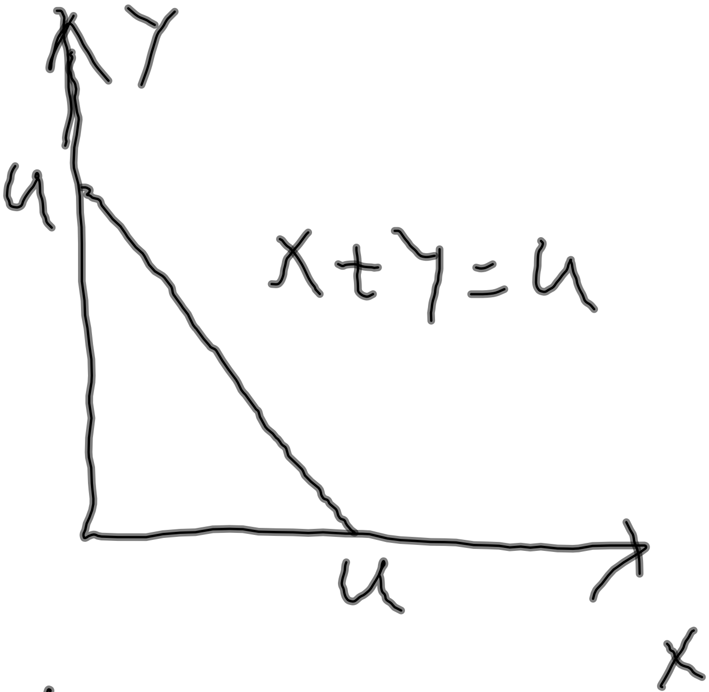
Om vi integrerar

längs en nivåkurva

så får vi $\dfrac{1}{1+u}$ · (längden

av kurvan.)

apr 12-13:33



Längden blir $\sqrt{2}\,u$

Om vi snittar längs dessa nivåkurvor och integrerar får vi

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1+u} \cdot \sqrt{2}\, u \, du$$

$$= \sqrt{2} \int_0^1 \left(\frac{u}{1+u} \right) du =$$

$$= \sqrt{2} \int_0^1 \left(\frac{u+1}{1+u} - \frac{1}{1+u} \right) du =$$

$$\sqrt{2}\int_0^1 \left(1-\frac{1}{1+u}\right)du =$$

$$\sqrt{2}\,\Big[u-\ln|1+u|\Big]_0^1$$

$$=\sqrt{2}\,(1-\ln 2)$$

Nivåkurvemetoden är ett första steg för att anpassa integrationsprocessen till problemets form. Genom variabelbyte tar vi steget fullt ut.

apr 12-13:39

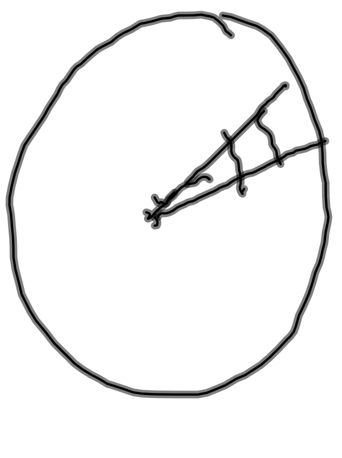
Viktigaste variabelbytet

är polära koordinater

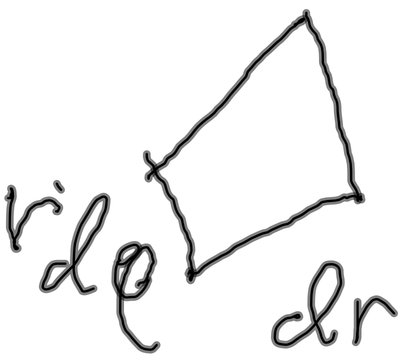
som passar symmetriska

problem.

Cirkeln igen.



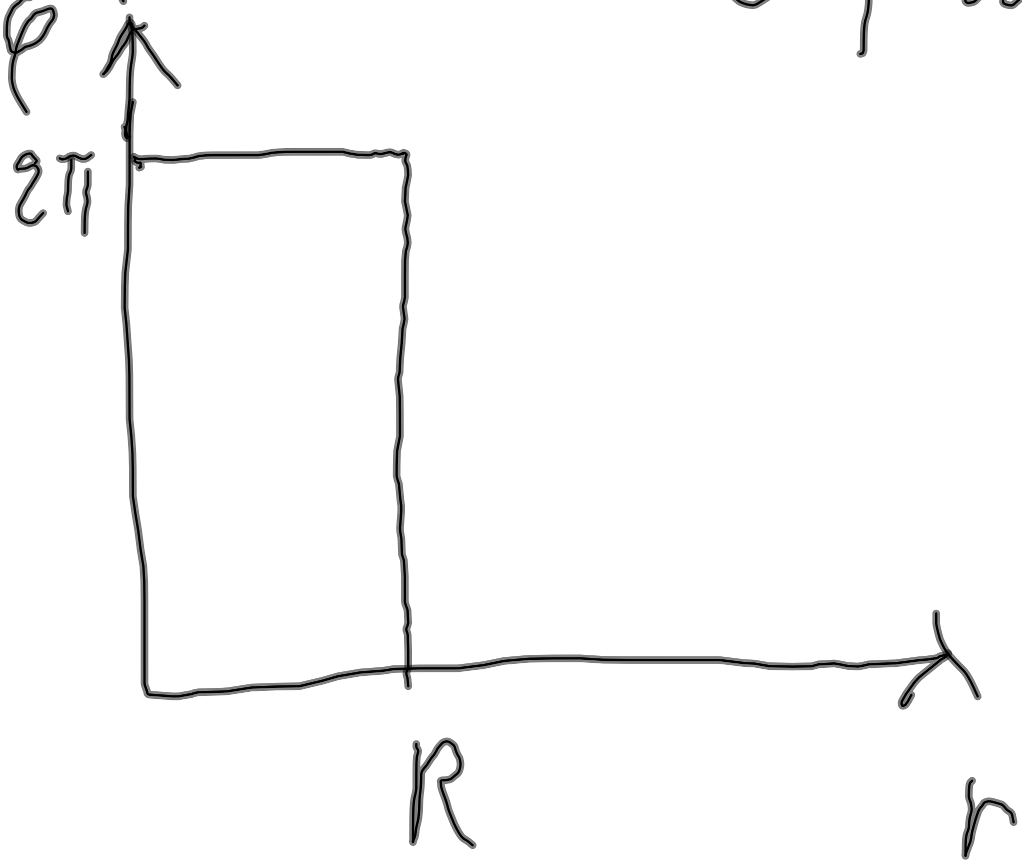
Vi kan dela upp cirkeln i små områden



Istället för rektanglar

Arean för ett sådant område är r dr dθ

En cirkel med radie R har följande "form" i re-planet



Om vi till exempel vill beräkna arean av en cirkel så skall vi beräkna

$$\iint_C 1 \cdot dx\,dy$$

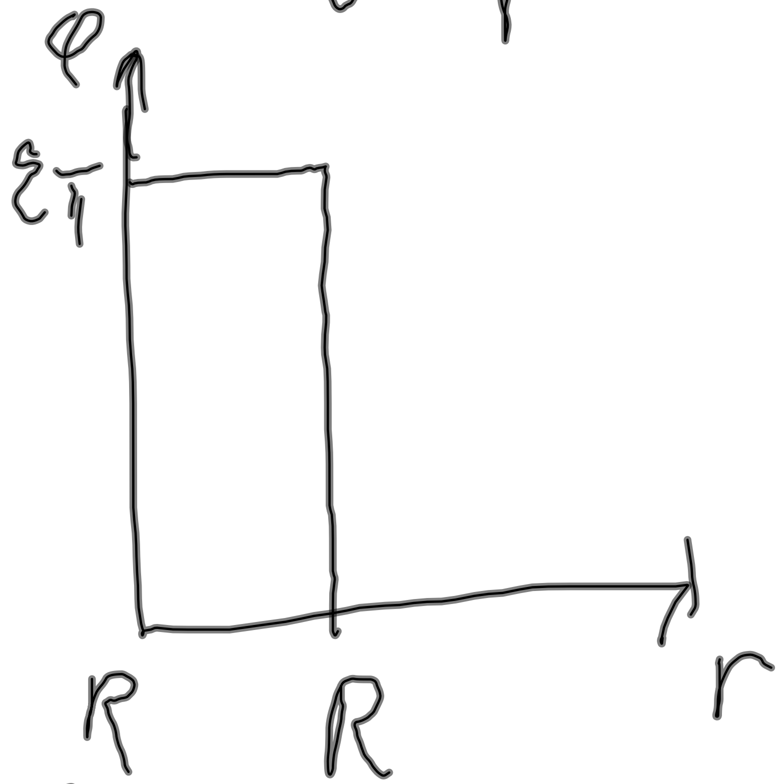
apr 12-13:46

Om vi spiltar med
cirkelsektorer så skall
vi summera alla
värde.
Det ger samma sak
som att i re-planet
beräkna

apr 12-13:47

integralen av r

över



$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^{R} r \, dr =$$

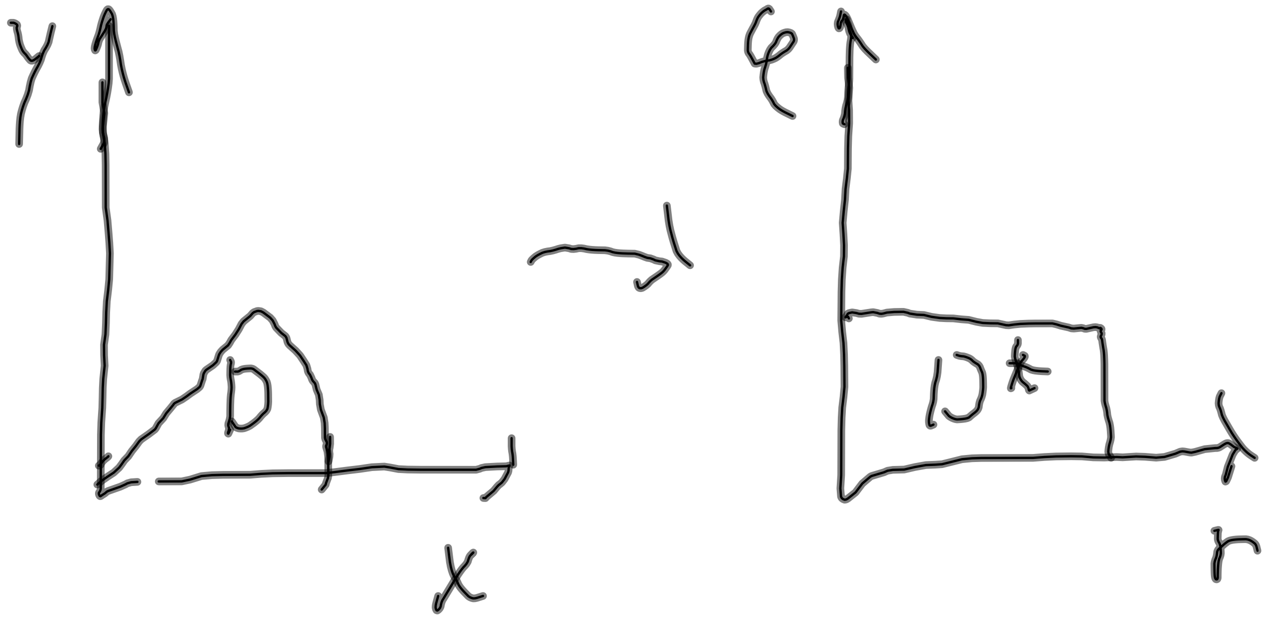
$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^R d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{R^2}{2} d\varphi =$$

$$= \left[\frac{R^2}{2} \varphi \right]_0^{2\pi} = \pi R^2$$

apr 12-13:49

Polära koordinater



Vi vill beräkna

$$I = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

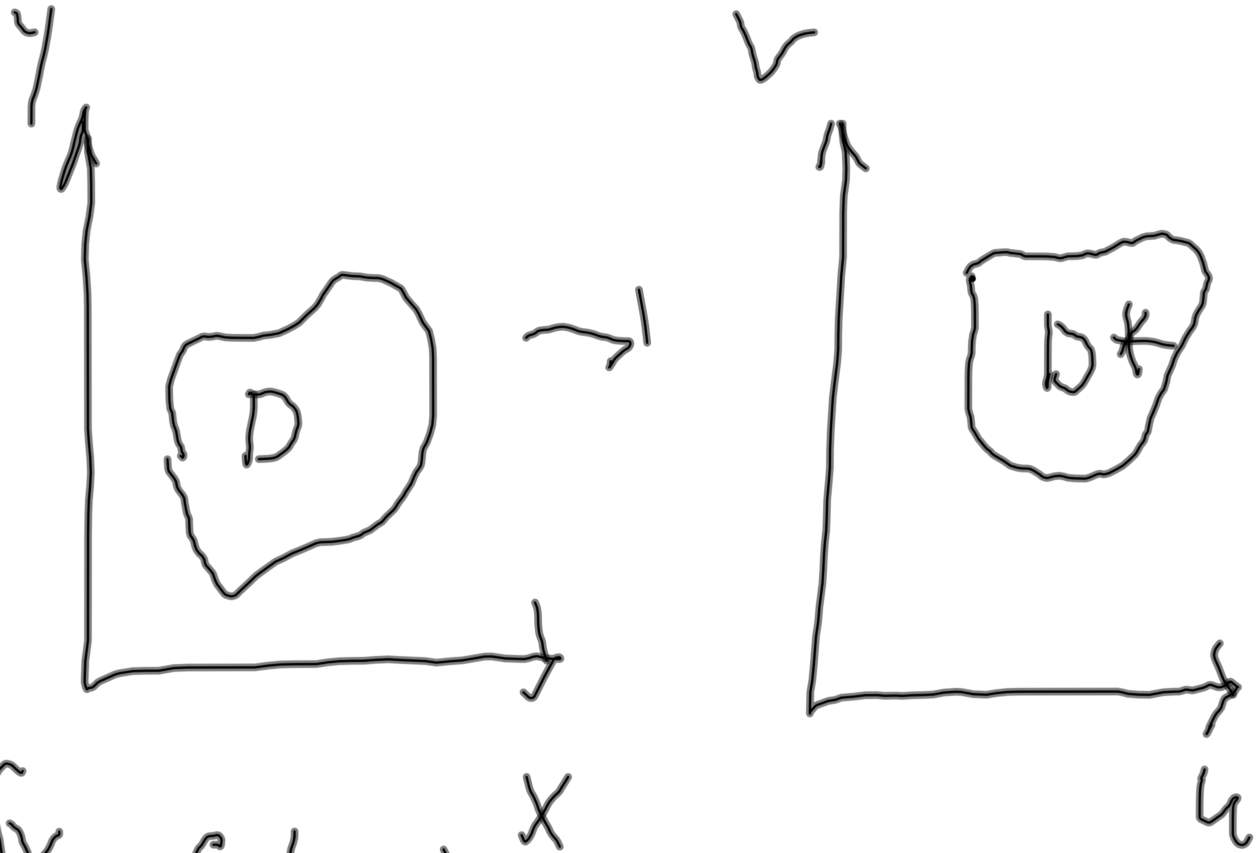
apr 12-14:03

Genom att byta till polära koordinater får vi

$$I = \iint_{D^*} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, dr\, d\theta$$

Obs!

Mer generellt variabelbyte



$$\begin{cases} x = g(u,v) \\ y = h(u,v) \end{cases}$$

Om vi vill beräkna

$$I = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

så kan den beräknas som

$$\iint_{D^*} f(g(u,v), h(u,v))\,\left|J(u,v)\right|\,du\,dv$$

$J(u,v)$ = funktional-

determinanten

$$\frac{d(x,y)}{d(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Skälet till att göra variabelbyte är oftast att D^* är mycket enklare än D.

Vi ser på ett exempel.

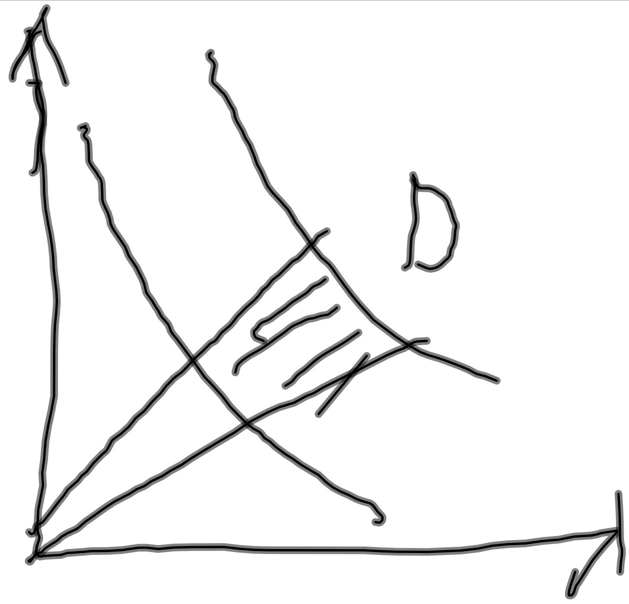
Vi har de 4

nivåkurvorna

$$\begin{cases} xy = 2 \\ xy = 1 \\ \dfrac{y}{x} = 1 \\ \dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

De begränsar ett

område. Beräkna arean av det.



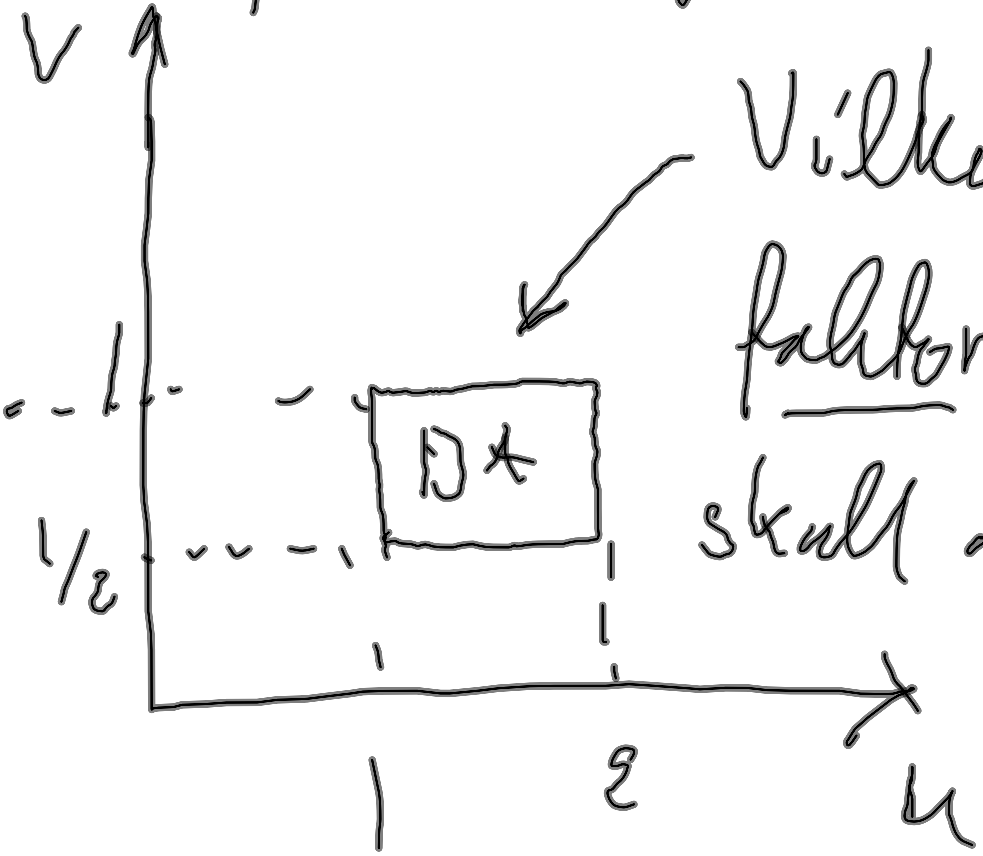
Vi använder variabelbyte.

Vi sätter

$$\begin{cases} u = xy \\ v = \dfrac{y}{x} \end{cases}$$

Vårt område D

transformeras till



Vilken faktor skall användas?

D^* har arean $\frac{1}{2}$ i uv-planet.
Det är *inte* arean vi söker.

Vi måste ta reda

på $\dfrac{d(x,y)}{d(u,v)}$

Vi vill beräkna

$\dfrac{\partial x}{\partial u}$ o.s.v.

Men vi har $u(x,y)$ och $v(x,y)$ givna!

apr 12-14:21

(En möjlighet är att lösa ut x, y som funktioner av u, v. Men det är inte nödvändigt.)

$$\frac{d(u,v)}{d(x,y)}$$ kan beräknas.

apr 12-14:24

$$\frac{d(u,v)}{d(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = \frac{y}{x} + \frac{y}{x}$$

$$= 2\frac{y}{x} = 2v.$$

Men vi vill ha

$$\frac{d(x,y)}{d(u,v)}$$

Vi vet att

$$\frac{d(x,y)}{d(u,v)} = \left(\frac{d(u,v)}{d(x,y)}\right)^{-1} =$$

apr 12-14:27

$$= (2v)^{-1} = \frac{1}{2v}$$

Arean är

$$\iint_{D^*} \frac{1}{2v}\,du\,dv =$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^2 \left(\int_{1/2}^1 \frac{dv}{v} \right) du =$$

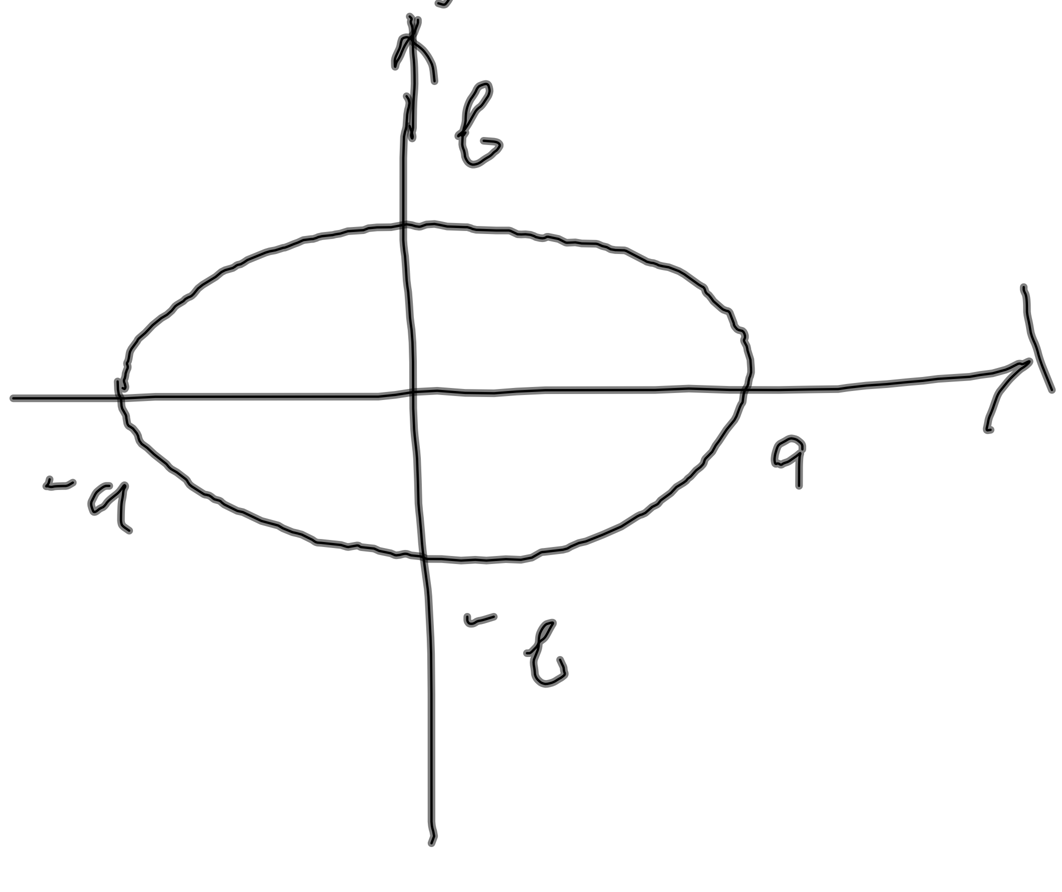
apr 12-14:28

$$= \frac{1}{2} \int_1^2 \left[\ln|v| \right]_{1/2}^{1} du =$$

$$= \frac{1}{2} \int_1^2 \ln 2 \cdot du =$$

$$= \frac{1}{2} \left[u \ln 2 \right]_1^2 = \frac{1}{2} \ln 2$$

Ex: Beräkna arean av en ellips med axlar a, b



Vi kan försöka lösa problemet genom variabel-byte.

Randen kan parametriseras

som $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$

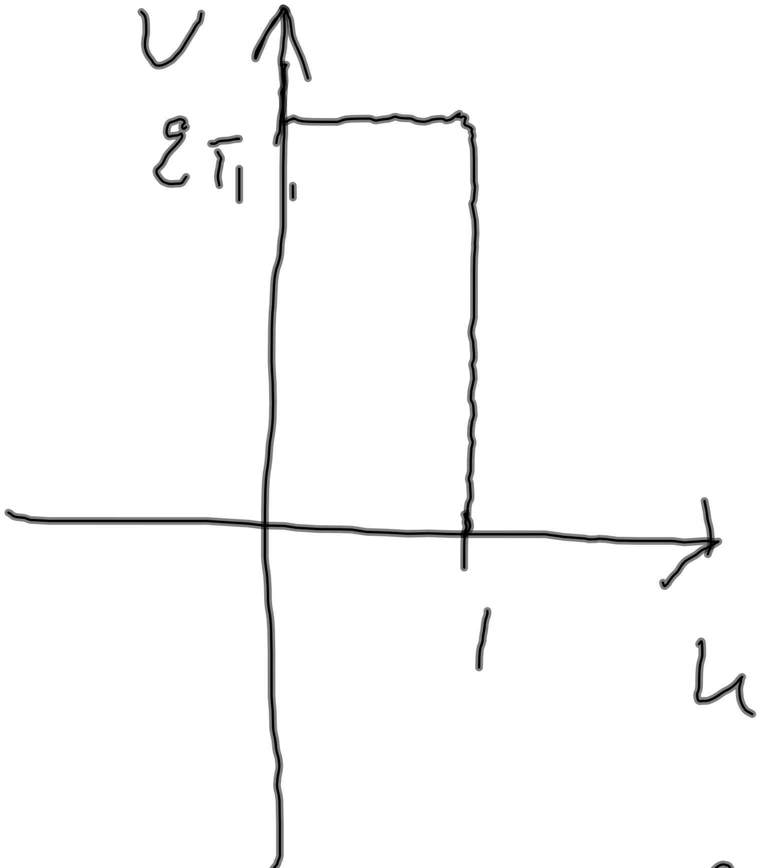
Men det är inget variabelbyte.

Vi kan sätta

$$\begin{cases} X = a \cdot u \cos v \\ Y = b \cdot u \sin v \end{cases}$$

(Det är "nästan" som polära koordinater.)

Ellipsen får följande form i uv-planet:



Ett bra område!

Vad blir $J(u,v)$?

$$\frac{d(x,y)}{d(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a\cos v & -au\sin v \\ b\sin v & bu\cos v \end{vmatrix}$$

$$= abu\cos^2 v + abu\sin^2 v$$

$$= abu$$

Arean av ellipsen ges av integralen

apr 12-14:38

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^1 abu\,du\,dv$$

$$= ab\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 u\,du\right)dv$$

$$= ab\int_0^{2\pi}\left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1 dv =$$

$$= ab \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\, dv =$$

$$\frac{ab}{2}\Big[\, v \,\Big]_0^{2\pi} = ab\pi$$