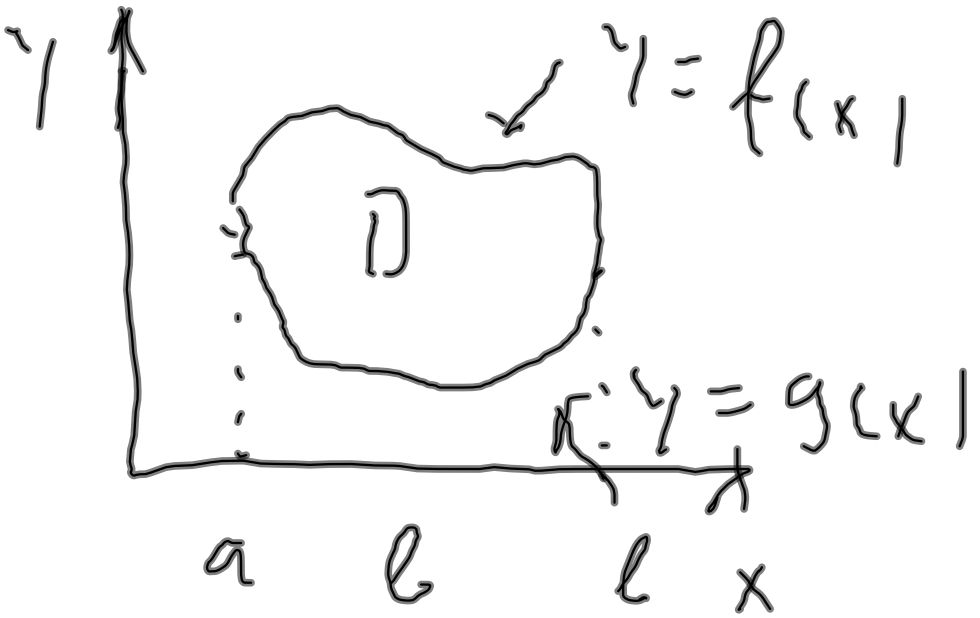
Trippelintegral

Lite introduktion:

En vanlig envariabel-integral innebär att vi beräknar en area



$$A = \int_a (f(x)-g(x))\,dx$$

Detta kan också betraktas

som en dubbelintegral

genom att vi tar en

funktion $f(x,y)=1$

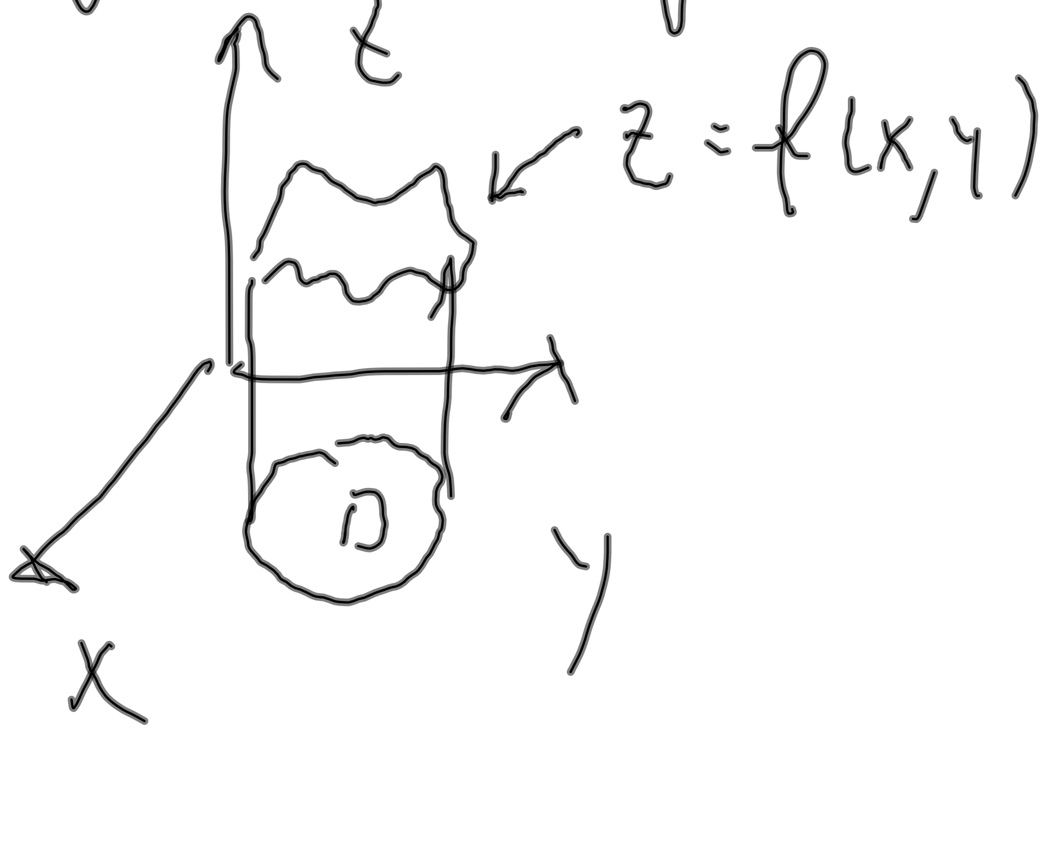
och integrerar

$$A = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= \iint_D 1\,dx\,dy$$

apr 14-10:03

Men med mer generell $f(x,y)$ motsvarar en dubbel-integral en volym



En trippelintegral med $f(x,y,z)=1$ kan tolkas som en volym. Vad händer för generella f?

Vi kan tolka den som en beräkning

apr 14-10:06

av massa om f representerar densitet.

Om vi har f som är negativ kan vi tolka trippelintegralen som total laddning om f är laddnings-

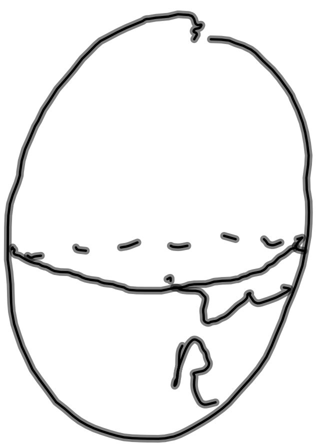
apr 14-10:08

dimensionen.

Vi tittar på ett enkelt specialfall

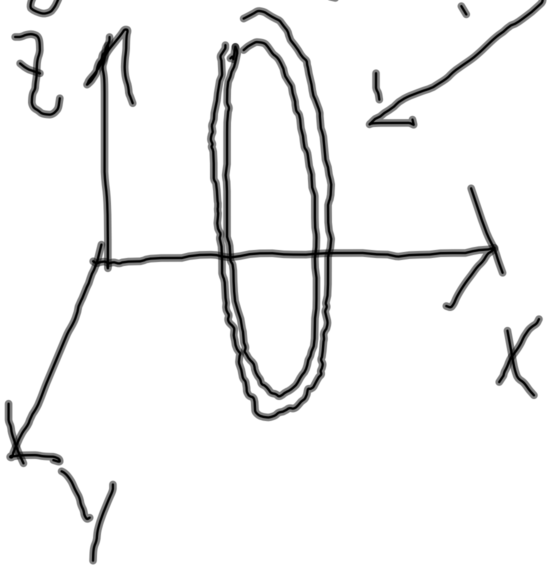
Volymen av ett klot med radie R.

apr 14-10:10



Hur beräknar vi volymen?

Med vad vi lärt oss hittills så kan vi göra så här:



Vi lägger ett snitt för ett visst x.

vilket blir en cirkelskiva.
Klotet beskrivs av

$$x^2+y^2+z^2 \leq R^2$$

Om vi håller x fixt
gäller $y^2+z^2 \leq R^2-x^2$
vilket blir en cirkelskiva
med radie $\sqrt{R^2-x^2}$

apr 14-10:13

Arean av den blir

$$\pi(R^2-x^2)=A(x)$$

Volymen blir

$$V=\int_{-R}^{R}\pi(R^2-x^2)\,dx$$

$$=\pi\left[R^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-R}^{R}=\frac{4\pi R^3}{3}$$

Nu gör vi det här igen men tolkar allt som en trippelintegral.

Vi sätter $f(x,y,z)=1$

och $K=\{(x,y,z):$
$x^2+y^2+z^2\le R^2\}$

Vi vill beräkna

$$\bar{V} = \iiint_K 1 \cdot dx\,dy\,dz$$

Vad betyder då

denna integral?

apr 14-10:18

Vi kan tänka oss K uppdelad i många små kuber med en liten volym ΔV. Vi räknar ut summan av alla dessa kubers volym.

Rent praktiskt går n

utvärderingen till så

att vi integrerar

3 gånger.

Först i z-led:

Fixera x, y

Integrera över z

$$A(x,y) = \int_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} 1 \, dz$$

$$= \Big[z \Big]_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} =$$

$$= 2\sqrt{R^2-x^2-y^2}$$

apr 14-10:22

Integrera sedan över y

Fixera x

$$B(x) = \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} A(x,y)\,dy$$

$$= \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} 2\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dy$$

apr 14-10:24

Denna integral är
rätt knepig men går
att räkna ut.

Vi får $B(x) = \pi(R^2 - x^2)$

Integrera sedan i x-led

$$V = \int_{-R}^{R} B(x)\,dx =$$

apr 14-10:26

$$= \int_{-R}^{R} \pi (R^2 - x^2)\, dx =$$

$$= \frac{4\pi R^3}{3}$$

apr 14-10:28

Trippelintegral mer generellt

Vi har någon kropp K i $\mathbb{R}^3$.

Vi har en funktion $f(x,y,z)$.

apr 14-10:29

Vi gör en uppdelning av den i små kuber med volym ΔV.

Vi låter Φ som är konstant på varje kub.

Φ:s värde på varje kub kan (t.ex.) väljas till värdet på f i kubens mittpunkt.

Vi säger att integralen

$$I(\Phi) = \sum_{ijk} \Phi_{ijk} \Delta V$$

d.v.s. vi summerar över alla kuber.

Om det finns ett tal I^* så att $I(\Phi) \to I^*$ när $\Delta V \to 0$ oberoende av hur vi valt $\bar{\Phi}$ (tidigare sagt om vi väljer $\bar{\Phi}_{ij}$ till mittpunktens värde eller någon annan punkt i kulan.)

<u>Så</u> är f integrerbar

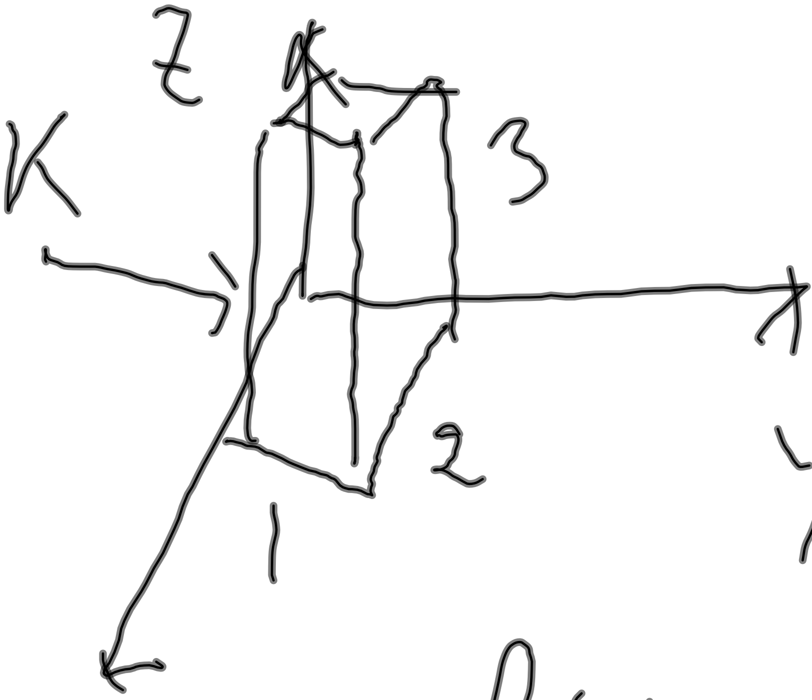
och $\iiint\limits_K f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$

$= I^*$

Några praktiska beräkningar

Ex: Vi har en kub med hörn i $(0,0,0)$ och sidor $2, 1, 3$ i positiv led d.v.s.

apr 14-10:37



$$f(x,y,z) = \frac{x+y}{1+z}$$

Beräkna $\iiint_K f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$

1) Fixera x, y och integrera i z-led

$$B(x,y) = \int_0^3 \frac{x+y}{1+z}\,dz =$$

$$= (x+y)\Big[\ln|1+z|\Big]_0^3 =$$

apr 14-10:41

$= (x+y)\ln 4$

2) Fixera x och integrera i y-led:

$$A(x) = \int_0^1 (x+y)\ln 4 \, dy$$

$$= \ln 4 \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_0^1 =$$

apr 14-10:42

$$= \ln 4 \left(x + \frac{1}{2} \right)$$

3) Integrem i x-led

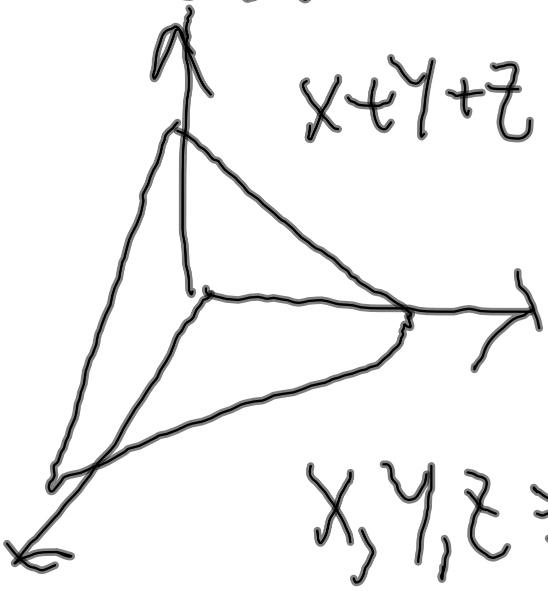
$$I = \int_{0}^{2} A(x)\,dx =$$

$$= \int_{0}^{2} \ln 4 \left(x + \frac{1}{2} \right) dx =$$

$$= \ln 4 \left[\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} \right]_0^2 =$$

$$= 3 \ln 4 = 6 \ln 2$$

Ex Vi har ett simplex



$x + y + z \leq 1$

$x, y, z \geq 0$

$K = \{(x,y,z) : 0 \le x, 0 \le y, 0 \le z, x+y+z \le 1\}$

$f(x,y,z) = x^2 y$

1) Fixera x, y

Integrera i z-led

apr 14-10:58

z varierar mellan

0 och $1-x-y$

$$B(x,y)=\int_0^{1-x-y} x^2y\,dz=$$

$$=\left[x^2yz\right]_0^{1-x-y}=$$

$$= x^2 y(1-x-y) =$$

$$= x^2y - x^3y - x^2y^2$$

2) Fixera x och integrera i y-led

y varierar mellan 0 och $1-x$

$$A(x) = \int_0^{1-x} (x^2 y - x^3 y - x^2 y^2)\, dy$$

$$= \left[\frac{x^2 y^2}{2} - \frac{x^3 y^2}{2} - \frac{x^2 y^3}{3} \right]_0^{1-x}$$

$$= \frac{x^2}{6} - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{2} - \frac{x^5}{6}$$

apr 14-11:08

3) Integrem i x-led

$$I = \int_0^1 \left(\frac{x^2}{6} - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{2} - \frac{x^5}{6} \right) dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{18} - \frac{x^4}{8} + \frac{x^5}{10} - \frac{x^6}{36} \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{360}$$

apr 14-11:09

Ex: Vi har en kropp K som vi får genom att ta cylindern

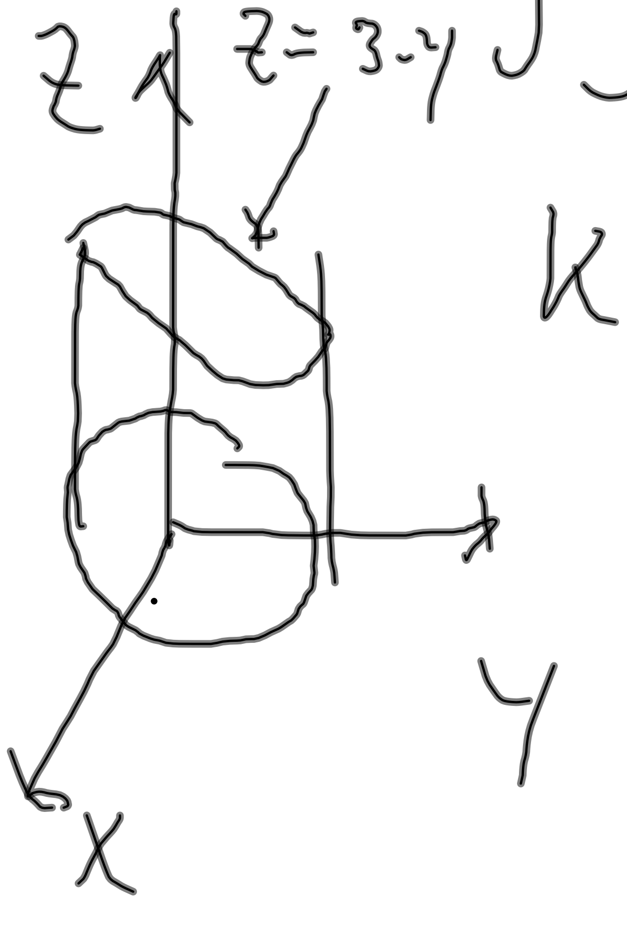
$$\{(x,y,z) : x^2+y^2 \leq 1, 0 \leq z\}$$

och "kapar" den med

planet $z = 3 - y$

(Planet blir "tak")

Beräkna $\iiint_K z \, dx\, dy\, dz$



Vi gör som vanligt

Integrera först i

z-led. Fixera x, y

$$B(x,y) = \int_0^{3-y} z \, dz =$$

$$= \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^{3-y} = \frac{9}{2} - 3y + \frac{y^2}{2}$$

apr 14-11:14

Tänk efter nu!

Det återstår att integrera $B(x,y)$ i xy-planet. Vi skall integrera över enhetscirkeln C.

apr 14-11:17

Integralen blir

$$\iint_C \left(\frac{9}{2} - 3y + \frac{y^2}{2} \right) dx\,dy$$

Nu finns några "bra genvägar".

$$\iint_C \frac{9}{2}\,dx\,dy =$$

$$\frac{9}{2} \cdot \text{cirkelns area} =$$

$$= \frac{9\pi}{2}$$

apr 14-11:20

Utnyttja ny symmetri

$$\iint_C (-3y)\,dx\,dy = 0$$

Återstår $\displaystyle\iint_C \frac{y^2}{2}\,dx\,dy$

Nu måste vi räkna lite.

Använd polära koordinater

$$\iint_C y^2 \, dx\, dy =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 (r^2 \sin^2\varphi)\, r \, dr \right) d\varphi$$

obs!

$$= \int_0^{2\pi} \sin^2\varphi \, d\varphi \cdot \int_0^1 r^3 \, dr$$

$$\int_0^1 r^3\,dr = \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

$$\sin^2\varphi = \frac{1-\cos 2\varphi}{2}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2\varphi\,d\varphi =$$

apr 14-11:25

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos 2\varphi)\,d\varphi$$

$$= \frac{1}{2}\left[\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2}\right]_0^{2\pi} =$$

$$= \pi$$

apr 14-11:27

$$\iint_C \frac{y^2}{2}\,dx\,dy = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{4}$$

$$= \frac{\pi}{8}$$

$$I = \frac{9\pi}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{37\pi}{8}$$

Lite kort om generaliserade integraler

Antag att vi har

$$f(x,y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}$$

Vad händer om vi

apr 14-11:29

integrerar över hela $\mathbb{R}^2$?

Vi vill beräkna

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{dx\,dy}{1+x^2+y^2}$$

apr 14-11:30

I detta fall kan

vi använda polära

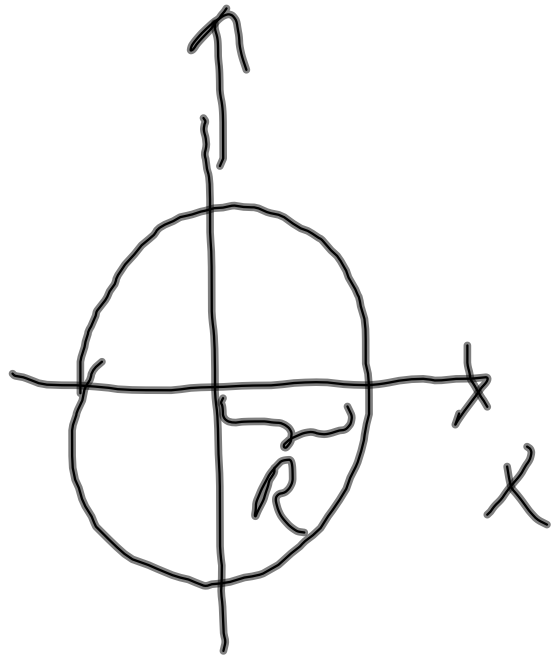
koordinater

Integranden blir

$$\frac{1}{1+r^2}$$

apr 14-11:31

Vi börjar med att integrera över en cirkel med radie R.



Vi får integralen

$$I_R = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^R \frac{1}{1+r^2}\, r\,dr\right)d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^R \frac{r}{1+r^2}\,dr$$

$$=$$

$$2\pi\left[\frac{\ln|1+r^2|}{2}\right]_0^R =$$

$$= \pi \ln(1+R^2)$$

Om vi låter $R \to \infty$

så går $I_R \to \infty$

apr 14-11:34

Vi sätter

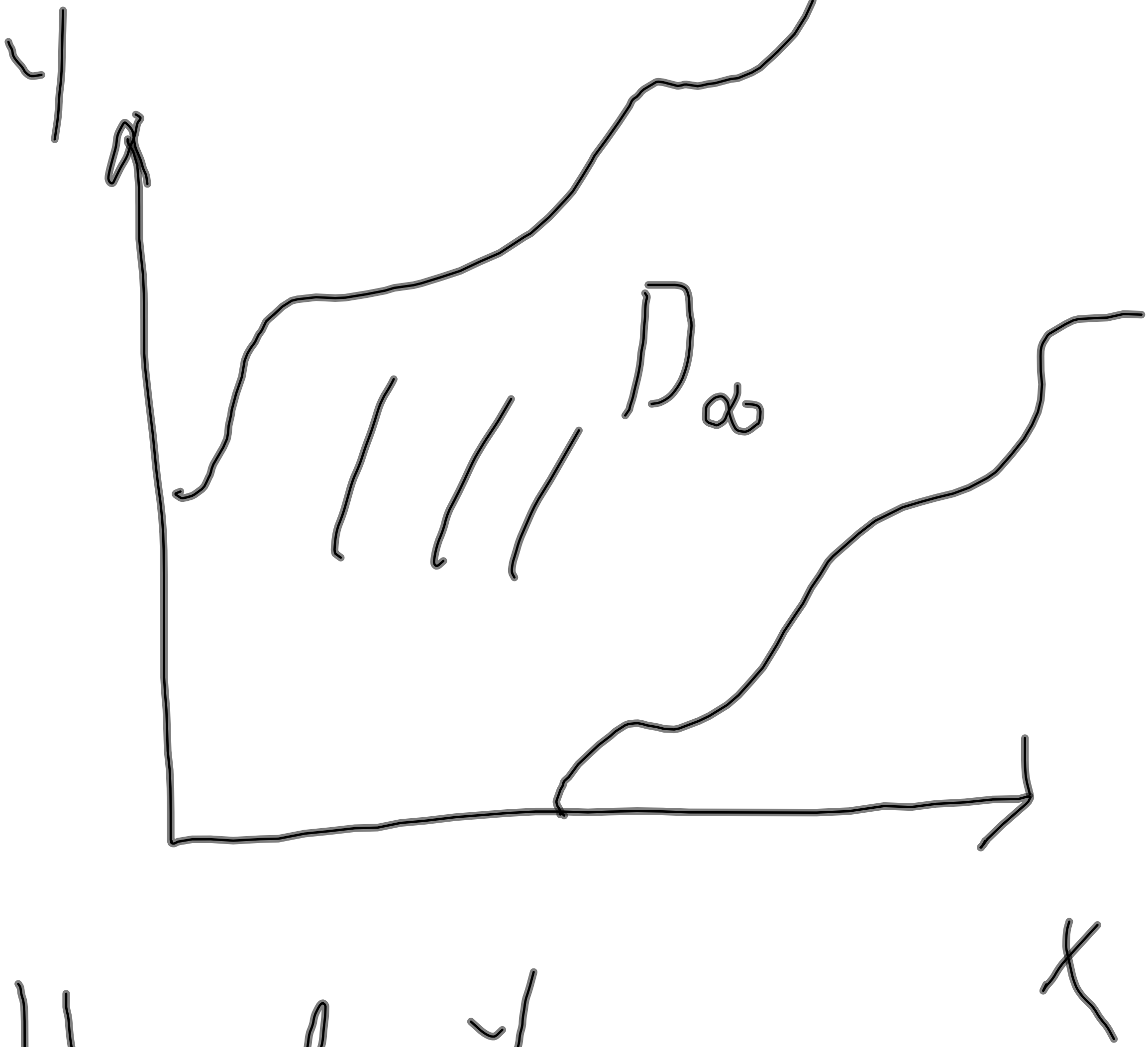
$$\iint_R \frac{1}{1+x^2+y^2}\,dx\,dy = \infty$$

apr 14-11:35

Generell metod

Antag att vi har en funktion $f(x,y) \geq 0$ som vi vill integrera över ett oändligt område D_∞.

Symboliskt:



Hur beräknas

$$\iint_{D_\infty} f(x,y)\,dx\,dy\,?$$

Vi väljer en följd av ändliga områden $D_1, D_2, \ldots$ så att $D_1 \subseteq D_2 \subseteq \ldots$ och så att följden växer mot hela D_∞.

apr 14-11:38

Symboliskt:

Sätt $I_k = \iint\limits_{D_k} f(x,y)\,dx\,dy$

apr 14-11:39

Då sätter vi

$$\iint_{D_\infty} f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{k\to\infty} I_k$$

apr 14-11:40

Detta kan vara ∞
eller något tal.

I första fallet divergerar
integralen.

I andra fallet konvergerar
integralen.

Obs: Om inte

$f(x,y) \geq 0$ blir

det mer komplicerat.

Sätt $f^+ = \max(f,0)$

$f^- = -\min(f,0)$

apr 14-11:43

Avgör om

$$\iint_{D_\infty} f^+ \, dx\,dy$$ och

$$\iint_{D_\infty} f^- \, dx\,dy$$ konvergerar

Om båda konvergerar

så konvergerar

$$\iint_{D_\infty} f\,dx\,dy$$ och

blir $$\iint_{D_\infty} f^+\,dx\,dy - \iint_{D_\infty} f^-\,dx\,dy$$

apr 14-11:45