Vi tittar först på

ett exempel:

Vi har en "kalott"

som ges av

$x^2+y^2+z^2 \leq 3^2, \ z \geq 2$

Den har en densitet

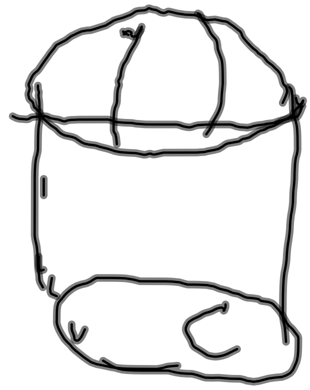
apr 26-12:55

$f(x,y,z) = 9 - x^2 - y^2$

Om vi projicerar kalotten på xy-planet får vi området

$x^2 + y^2 \leq 5$

kalla den C.



Beräkna $\iiint_K f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$

Börja med att integrera i z-led.

I varje punkt (x,y) i C får vi en integral

$B(x,y) =$

apr 26-13:06

$$= \int_{2}^{\sqrt{9-x^2-y^2}} (9-x^2-y^2)\,dz$$

$$= \Big[(9-x^2-y^2)z\Big]_{2}^{\sqrt{9-x^2-y^2}}$$

$$= (9-x^2-y^2)^{3/2} - 2(9-x^2-y^2)$$

Sedan beräknar vi

$$\iint_C B(x,y)\,dx\,dy$$

Använd polära koordinater:

Vi får

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{5}} \left((9-r^2)^{3/2} - 2(9-r^2) \right) r\,dr$$

$=$

apr 26-13:11

$$= 2\pi \int_0^{\sqrt{5}} \left((9-r^2)^{3/2} - 2(9-r^2) \right) r\,dr$$

Vi kan sätta $r^2 = t$

$2r\,dr = dt$

Vi får

$$\pi \int_0^5 \left((9-t)^{3/2} - 2(9-t) \right) dt$$

$$= \pi \left[(9-t)^2 - \frac{2}{5}(9-t)^{5/2} \right]_0^5$$

$$= \pi \left(4^2 - \frac{2}{5} 4^{5/2} - 9^2 + \frac{2}{5} 9^{5/2} \right) 0$$

$$= \frac{194\pi}{5}$$

Vi gick över till polära koordinater.

När vi gör ett variabelbyte på formen $(x,y,z) \to (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)$ säger vi att vi använder cylinder-koordinater

Vi tittar på

mer generella

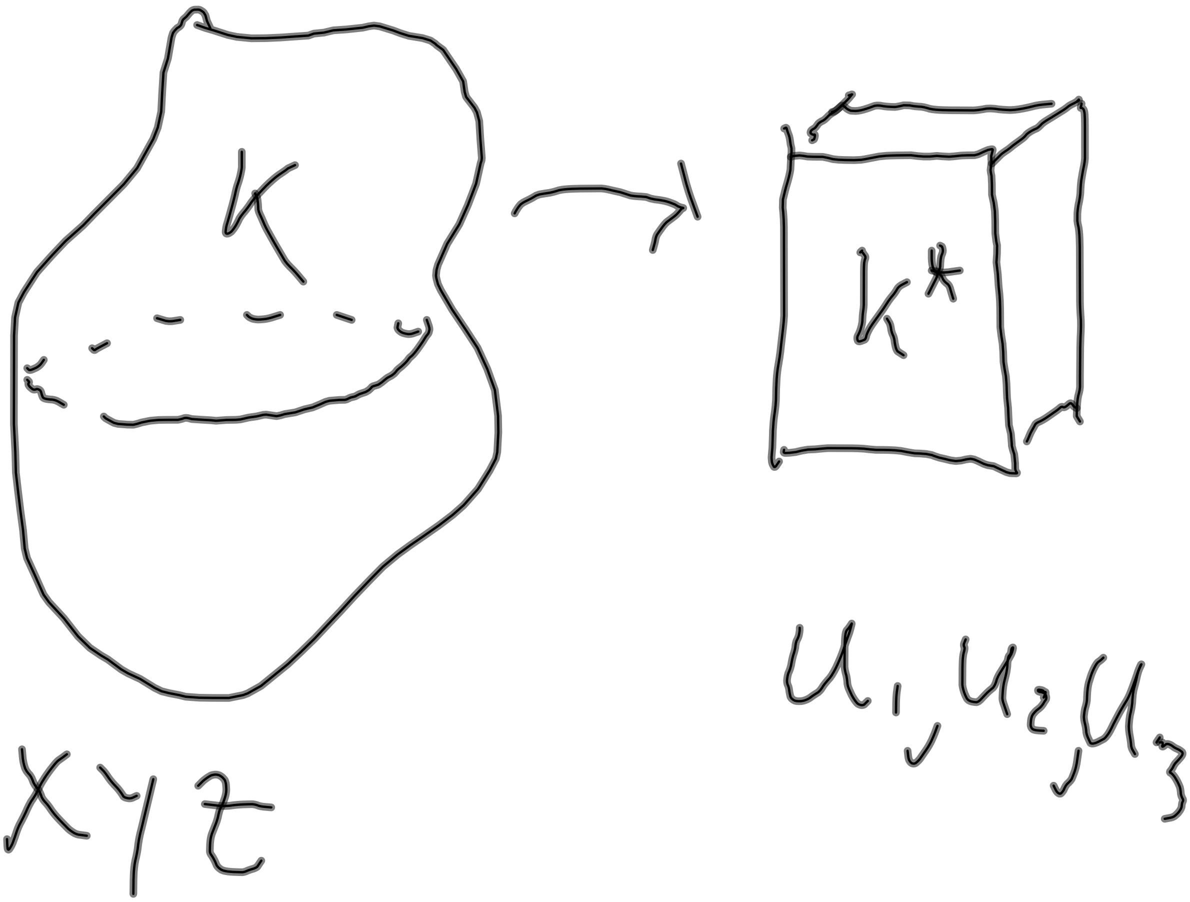
variabelbyten:

apr 26-13:17

Vi har (x,y,z)

och sätter

$$\begin{cases} x = g_1(u_1,u_2,u_3) \\ y = g_2(u_1,u_2,u_3) \\ z = g_3(u_1,u_2,u_3) \end{cases}$$



Då gäller att

$$\iiint_K f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz =$$

$$\iiint_{K^*} f(g_1, g_2, g_3)\,|J|\,du_1\,du_2\,du_3$$

där

$$J = \frac{d(x, y, z)}{d(u_1, u_2, u_3)} =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u_1} & \frac{\partial x}{\partial u_2} & \frac{\partial x}{\partial u_3} \\ \frac{\partial y}{\partial u_1} & \frac{\partial y}{\partial u_2} & \frac{\partial y}{\partial u_3} \\ \frac{\partial z}{\partial u_1} & \frac{\partial z}{\partial u_2} & \frac{\partial z}{\partial u_3} \end{vmatrix}$$

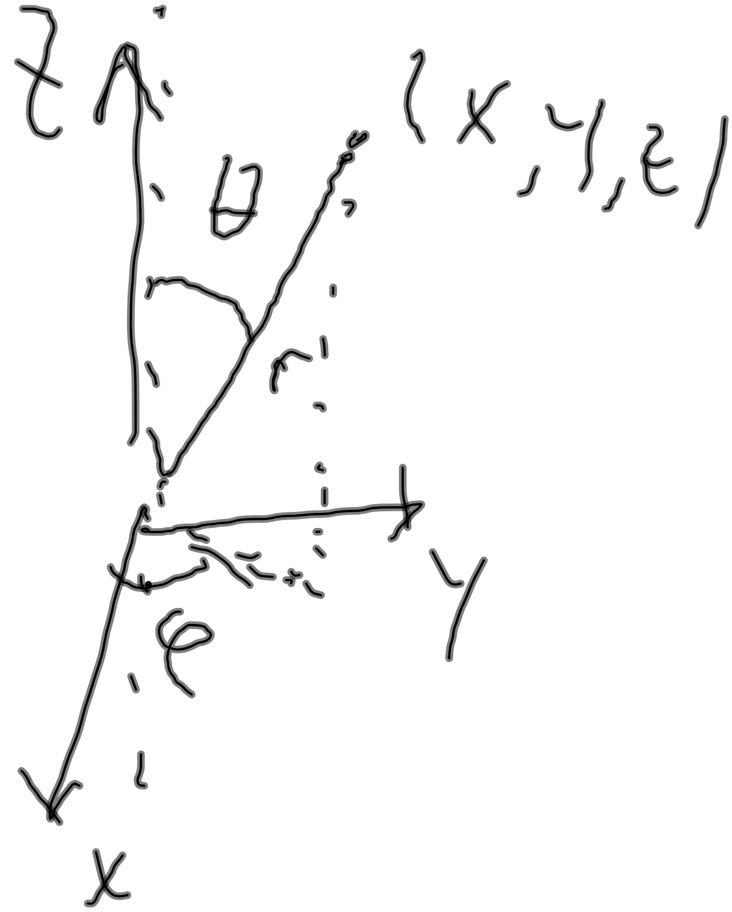
(Obs: g_1, g_2, g_3 är funktioner av u_1, u_2, u_3)

apr 26-13:21

Det viktigaste
exemplet är
rymdpolära koordinater

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

apr 26-13:23



Vad blir y i

det här fallet?

apr 26-13:24

Om vi räknar som vanligt får vi en 3x3-determinant. Diverse räknande ger

$y = r^3 \sin\theta$

(Kan inses geometriskt om man är bra på

apr 26-13:26

att tänka i 3 dimensioner)

Det säger att om

vi gör en liten ändring

$dr, d\varphi, d\theta$ i (r, φ, θ)-

rymden så motsvarar

den av en ändring

$r^2 \sin\theta \, dr d\varphi d\theta$ i

XYZ-rymden.

Vi beräknar volymen

för ett klot med

radie R.

apr 26-13:30

$$V = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} r^2 \sin\theta \, dr \, d\varphi \, d\theta$$

$$(f = 1)$$

$$= \int_0^R r^2 \, dr \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta$$

apr 26-13:31

$$= \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R \left[\varphi\right]_0^{2\pi} \left[-\cos\theta\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{R^3}{3} \cdot 2\pi \cdot 2 = \frac{4\pi R^3}{3}$$

Hur beräknar vi arean av ett klot?

Antag att arean av ett klot med radie r är A(r).

(Vi vill ta reda på

vad det är.)

Volymen av ett klot

med radien R måste

vara $\int_0^R A(r)\,dr$

apr 26-13:35

Vi vet att detta

är $\frac{4\pi R^3}{3}$.

Så $\frac{4\pi R^3}{3} = \int_0^R A(r)\,dr$

Derivera:

$$4\pi R^2 = A(r)$$

Multipelintegraler

Idén är precis som med trippelintegraler:

Integrera en gång
för varje variabel.

Håll koll på gränser.

Några enkla exempel

apr 26-13:39

1. Rätblock i $\mathbb{R}^n$.

$$K = \{(x_1, \ldots, x_n) : \alpha_1 \le x_1 \le \beta_1, \ldots, \alpha_n \le x_n \le \beta_n\}$$

(d.v.s. varje x_i ligger i $[\alpha_i, \beta_i]$ där α_i, β_i är givna.

apr 26-13:40

$$\int\int \cdots \int_K f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n$$

kan beräknas genom

$$I_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}) = \int_{\alpha_n}^{\beta_n} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_n$$

apr 26-13:42

$$I_{n-2} = \int_{\alpha_{n-1}}^{\beta_{n-1}} I_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1})\, dx_{n-1}$$

G.S.V.

$$I = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} I_1(x_1)\, dx_1$$

apr 26-13:43

2. "Klot" i $\mathbb{R}^n$.

$$K = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq R^2\}$$

Om vi vill beräkna

$$\iint_K \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n$$

kan vi göra det

Genom att sätta

$$I_{n-1}(x_1 \ldots x_{n-1}) = \int_{-\sqrt{R^2 - x_1^2 - \ldots x_{n-1}^2}}^{\sqrt{R^2 - x_1^2 - \ldots - x_{n-1}^2}} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_n$$

$$I_{n-2}(x_1, \ldots, x_{n-2}) = \int_{-\sqrt{R^2 - x_1^2 - \ldots - x_{n-2}^2}}^{\sqrt{R^2 - x_1^2 - \ldots - x_{n-2}^2}} I_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1})\, dx_{n-1}$$

apr 26-14:02

$$I = \int_{-R}^{R} I_1(x_1)\,dx$$

Specialfall:

$f = 1$ ger volymen.

Det går att visa att

apr 26-14:04

$V_n(R) = C_n R^n$

Volymen i n-dim.

Komplicerad.

$C_1 = 2\pi$

$C_2 = \pi$

$C_3 = \frac{4\pi}{3}$

$\vdots$

apr 26-14:06

Tentauppgift
2010-03-19
(Svåraste uppgiften)
Vi har ett simplex
i $\mathbb{R}^4$ som ges av

$0 \le x_1, \; 0 \le x_2, \ldots, 0 \le x_n$

$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n \le 1$

($n = 2$ ger

)

Beräkna volymen

apr 26-14:08

för simplexet.

Vi försöker först ställa upp relationen i

$$I_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}) = \int_0^{1-x_1-x_2-\dots-x_{n-1}} 1 \, dx_n$$

apr 26-14:09

$$\bar{I}_{n-2}(x_1,\dots,x_{n-2}) = \int_0^{1-x_1-\dots x_{n-2}} \bar{I}_n(x_1,\dots,x_{n-1})\,dx_{n-1}$$

$$\vdots$$

$$\bar{I}_1 = \int_0^{1-x_1} \bar{I}_2(x_1,x_2)\,dx_2$$

$$I = \int_0^1 I_1(x_1)\,dx_1$$

Det här talar om hur volymen kan beräknas. Men vi

apr 26-14:13

vill ha ett <u>explicit</u>

svar.

Om man testar

en del kan man

upptäcka ett mönster.

T.ex för $n=4$ får

vi

$$I_3 = 1 - x_1 - x_2 - x_3$$

$$I_2 = \frac{1}{2}(1 - x_1 - x_2)^2$$

$$I_3 = \frac{1}{6}(1 - x_1)^3$$

Vi testar och ser vad vi får när vi integrerar

$$I_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}) = \int_0^{1-x_1-\ldots-x_{n-1}} 1 \, dx_n =$$

$$= \left[X_n \right]_0^{1 - X_1 - \dots - X_{n-1}}$$

$$= 1 - X_1 - X_2 - \dots - X_{n-1}$$

$$I_{n-2} = \int_0^{1 - X_1 - \dots X_{n-2}} (1 - X_1 - \dots - X_{n-1})\, dX_{n-1}$$

$$= \left[-\frac{1}{2}(1-x_1-\dots-x_{n-1})^2\right]^{1-x_1-\dots-x_{n-2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(1-x_1-x_2-\dots-\overset{0}{x_{n-2}}\right)^2$$

Om vi gör samma sak

får vi i nästa steg

$$I_3 = \frac{1}{2\cdot 3}\left(1 - x_1 - \dots - x_{n-3}\right)^3$$

och nästa

$$I_4 = \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}\left(1 - x_1 - \dots - x_{n-4}\right)^4$$

$$\vdots$$

apr 26-14:21

I sista steget får vi

$$I = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n}$$

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

Så volymen blir

$$\frac{1}{n!}$$

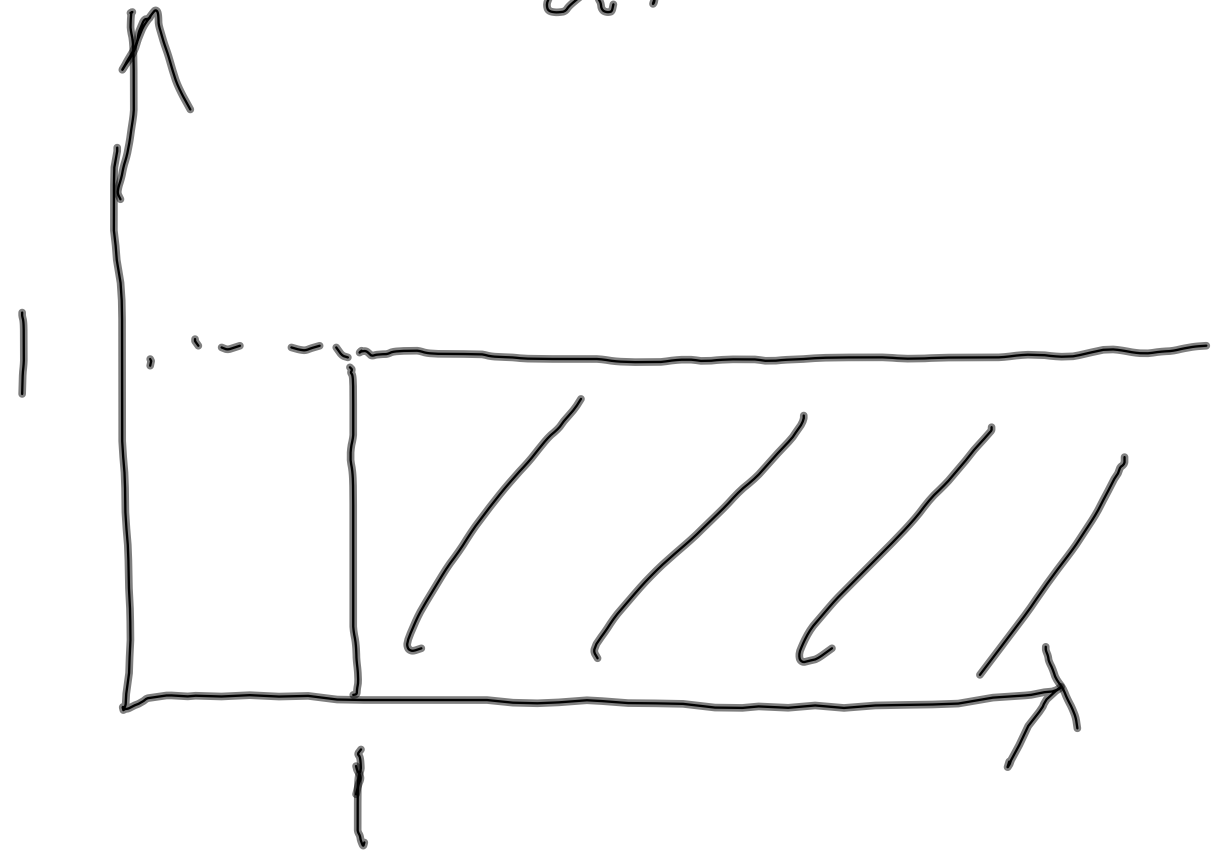
apr 26-14:22

Lite mer om generaliserade integraler

<u>Ex</u>: Vad blir

$$\iint_D \frac{1}{(x+2y)^2}\,dx\,dy$$

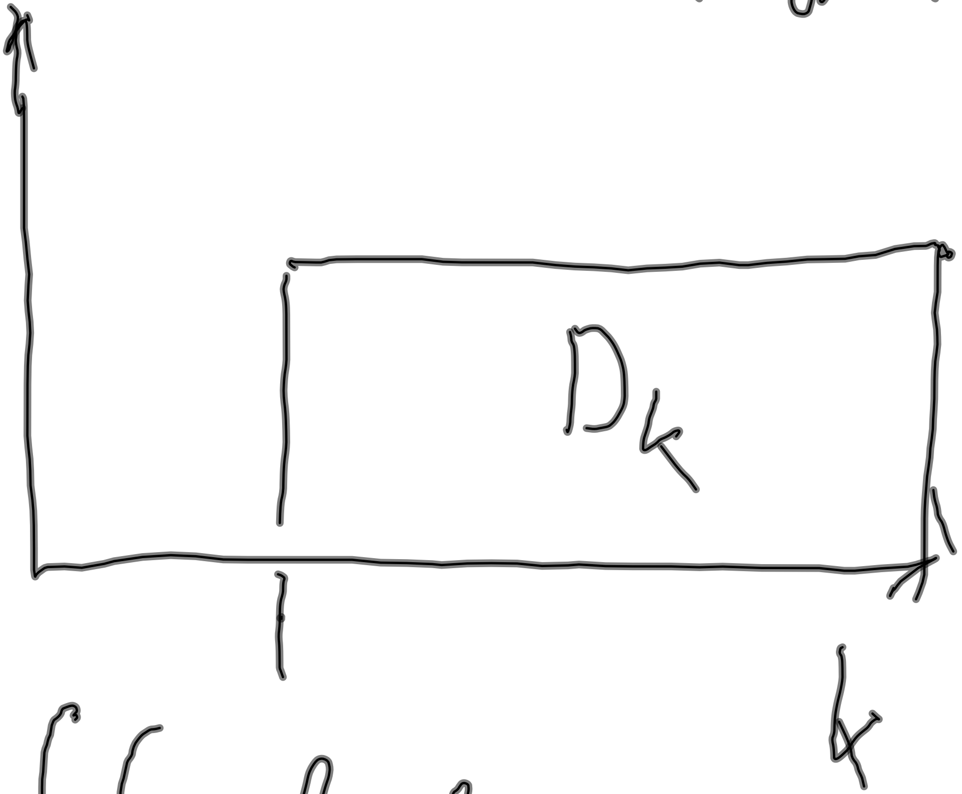
om D är



Vi integrerar över ändliga områden som

växer till D.

Vi kan t.ex sätta



$$\iint_{D_k} \frac{dxdy}{(x+y)^2} =$$

$$= \int_{1}^{k} \left(\int_{0}^{1} \frac{dy}{(x+y)^2} \right) dx =$$

$$= \int_{1}^{k} \left[-\frac{1}{x+y} \right]_{0}^{1} dx =$$

$$= \int_1^k \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx$$

$$= \Big[\ln|x| - \ln|x+1| \Big]_1^k$$

$$= \ln k - \ln k+1 + \ln 2$$

$$=$$

apr 26-14:28

$$= \ln \frac{k}{k+1} + \ln 2$$

$$\lim_{k \to \infty} \ln \frac{k}{k+1} + \ln 2$$

$$= 0 + \ln 2 = \ln 2$$

Så $\iint_D \frac{dx\,dy}{(x+y)^2} = \ln 2$

Berömt exempel.

$$\int e^{-x^2}\,dx$$ går inte

att lösa i enkla

funktioner.

Men det går att

visa att

apr 26-14:30

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$$

Beviset bygger på generaliserade dubbelintegraler och polära koordinater.

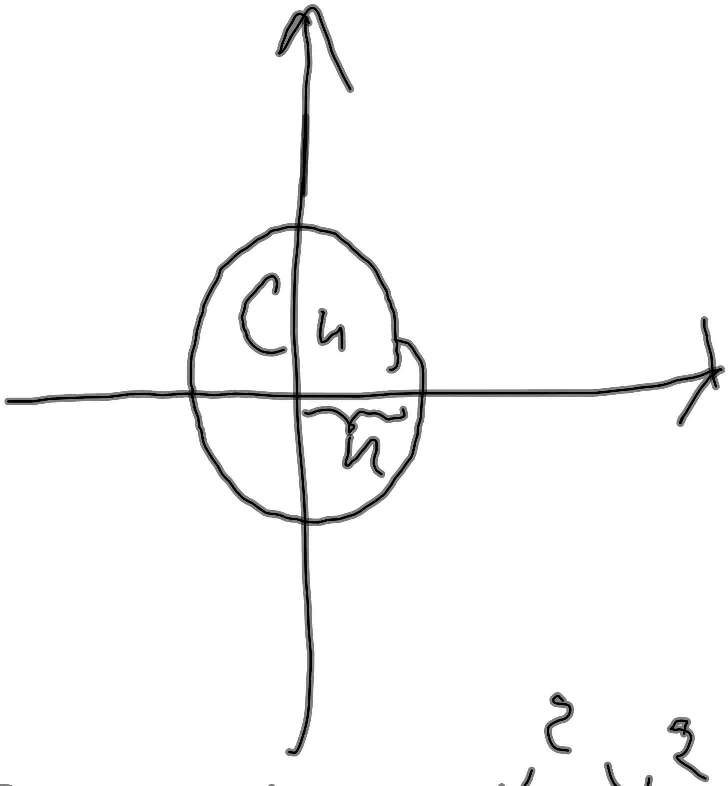
apr 26-14:32

Sätt $I = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$

Vi tolkar den på två sätt:

I. Vi försöker beräkna med polära koordinater

Vi väljer cirklar som växer mot ∞.



$$I_n = \iint\limits_{C_n} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$$

apr 26-14:35

Använd polära koordinater

$$I_n = \int_0^{2\pi} \int_0^n e^{-r^2} r \, dr \, d\theta$$

$$= 2\pi \cdot \left[-\frac{e^{-r^2}}{2} \right]_0^n =$$

$$= 2\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{e^{-n^2}}{2} \right) =$$

apr 26-14:36

$$= \pi\left(1-e^{-n^2}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} I_n =$$

$$\lim_{n\to\infty} \pi\left(1-e^{-n^2}\right) = \pi$$

$$\text{Så } I = \pi$$

II. Vi tänker nu på integralen så här:

$$I = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2}\,dy\,dx$$

apr 26-14:39

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\cdot e^{-y^2}\,dy\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy$$

Men vi kan ersätta båda

X och Y med t:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt\right)^2$$

apr 26-14:42

Nu vet vi att

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt\right)^2 = \pi$$

d.v.s.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}$$