Lite generellt om volymberäkningar

Kan beräknas som

1. $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$

eller

apr 27-10:02

$$2. \iiint_K 1 \cdot dx\,dy\,dz$$

Den första typen är viktigast.

apr 27-10:04

Vid beräkning av

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

kan man ta till olika knep:

1. Dela upp D i olika områden.

apr 27-10:05

2. Utnyttja symmetri.

3. Använd variabelbyte.

När man gör variabel-
byte skall man tänka
på

a. Hur området
förändras.

6. Hur integralen förändras.

<u>Ex</u>: Beräkna volymen som begränsas av sfären $x^2+y^2+z^2=6$

apr 27-10:08

och paraboloiden

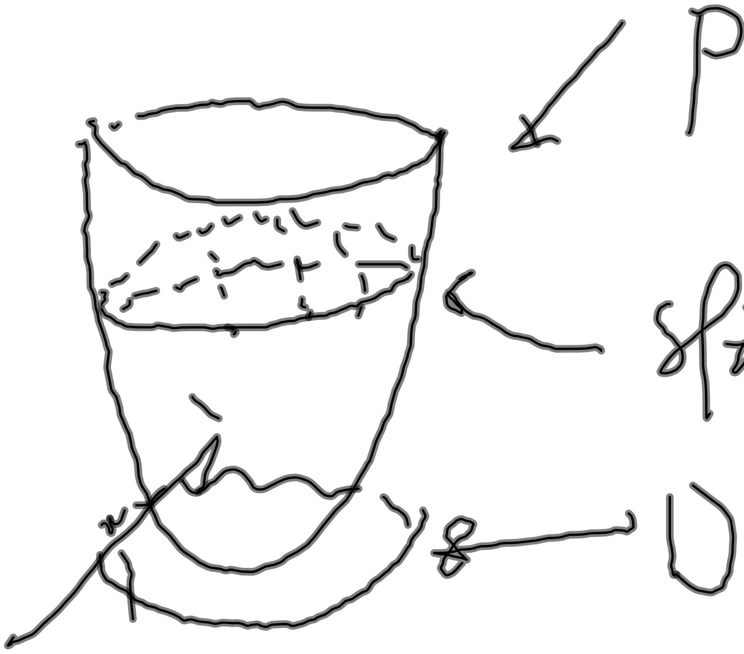
$$z = x^2 + y^2.$$

Obs: En viktig första del av uppgiften är att förstå hur området ser ut.

apr 27-10:11

Vi försöker skissa

paraboloid.



Kroppen vars volym vi vill beräkna.

$x^2+y^2+z^2=6$ är "tak"

$z=x^2+y^2$ är "golv".

Om vi vill beräkna volymen som

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$ måste

vi ta reda på D och f.

P.g.a. rotationssymmetri måste D vara en cirkel med en radie R.

Vad är R?

Sätt $x^2+y^2=R^2$ i skärningen mellan kurvorna.

apr 27-10:16

Då måste skärningen ha $z = R^2$ eftersom den ligger på paraboloiden.

Om vi tittar på klotytan gäller då $x^2+y^2+z^2=6$ d.v.s.

apr 27-10:17

$$R^2+(R^2)^2=6$$

$$R^4+R^2-6=0$$

Det ger $R^2 = 2, -3$

(fast -3 är omöjligt)

Så $R^2=2$ och $R=\sqrt{2}$.

C är en cirkel med

apr 27-10:19

radie $\sqrt{2}$.

$f(x,y) = $ (sfären) $-$

(paraboloiden)

$= \sqrt{6 - x^2 - y^2} - (x^2 + y^2)$

Använd nu polära koordinater.

apr 27-10:21

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \left(\sqrt{6-r^2} - r^2\right) r \, dr \, d\varphi$$

$$= 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} \left(\sqrt{6-r^2}\, r - r^3\right) dr$$

$$= 2\pi \left[-\frac{2}{3}\left(6-r^2\right)^{3/2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^{\sqrt{2}} =$$

apr 27-10:22

$$= 2\pi\left(\frac{6\sqrt{6}}{3} - \frac{8}{3} - 1\right)$$

$$= \frac{2\pi}{3}\left(6\sqrt{6} - 11\right)$$

apr 27-10:24

Exempel från boken (s 302)

Ett "tennistält" bildas av $z \geq 0$ och cylindrarna $x^2 + z^2 = 1$, $y^2 + z^2 = 1$

Beräkna volymen.

apr 27-10:25

$x^2+z^2=1$ är en

oändlig cylinder

i Y-axelns riktning.

$y^2+z^2=1$ är en cylinder

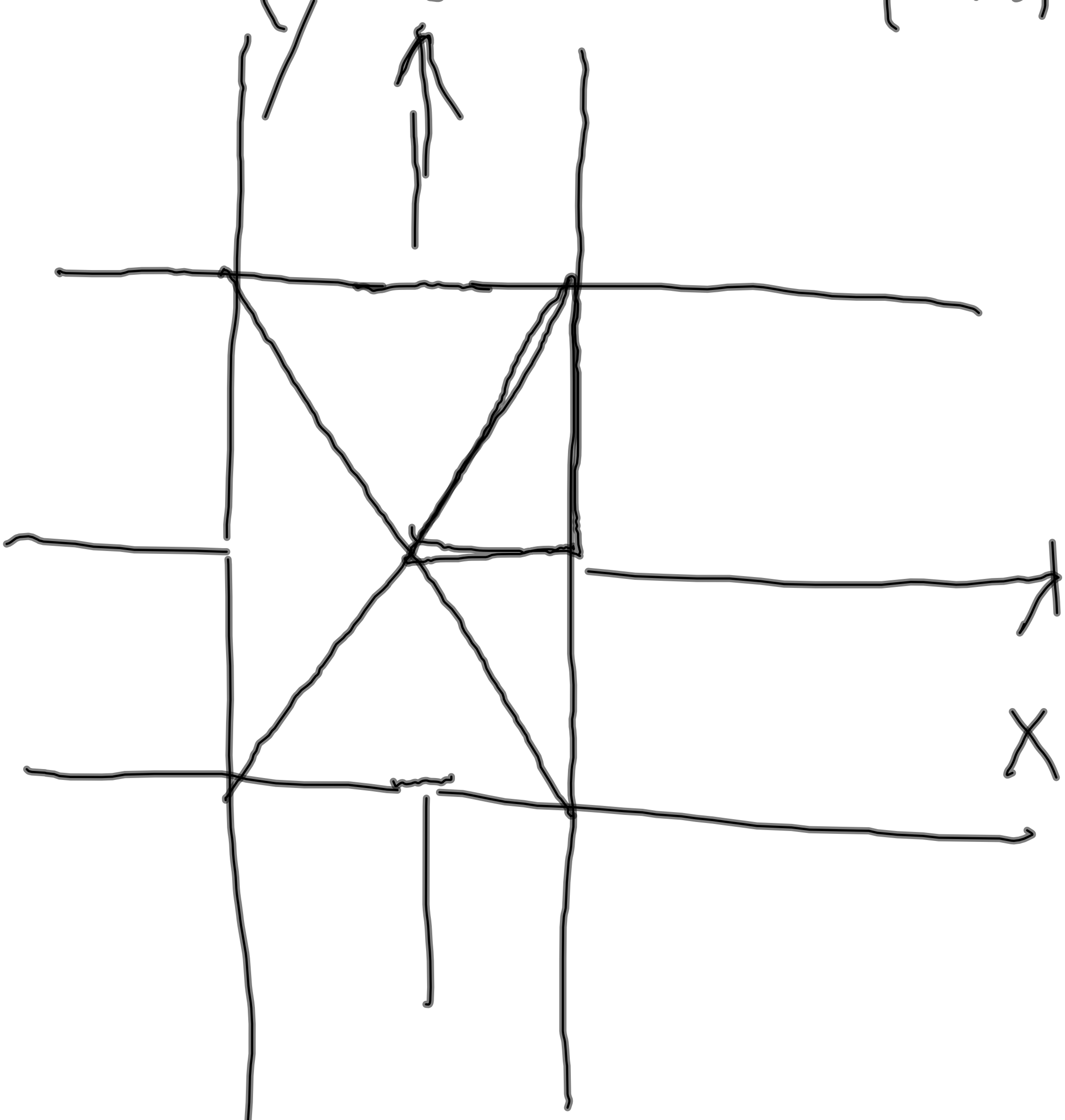
som är oändlig i

X-axelns riktning.

De skär varandra.

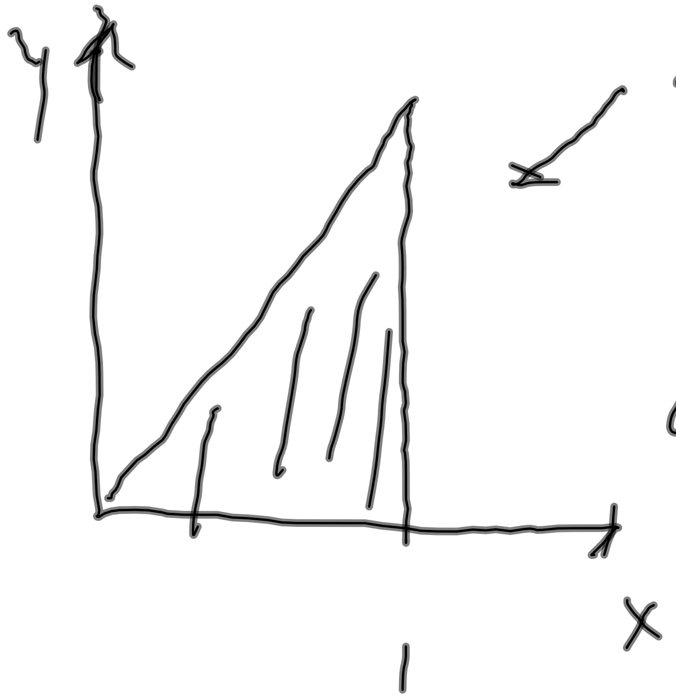
apr 27-10:27

Vi kan titta på skärningen ovanifrån



Området består av
4 symmetriska områden
med "cirkelbubbliga" tak.
Vi kan t.o.m. se att

området består av
8 symmetriska områden



Taket ges av $x^2 + z^2 = 1$

d.v.s. $z = \sqrt{1-x^2}$

$$V_{lilla} = \int_0^1 \int_0^x \sqrt{1-x^2}\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1 \left[\sqrt{1-x^2}\, y \right]_0^x dx$$

$$= \int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\, dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}\left(1-x^2\right)^{3/2} \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

apr 27-10:35

$$V = 8 \cdot V_{lilla} = \frac{8}{3}.$$

<u>Ex</u>: Beräkna volymen av en kropp K som begränsas av sfären $x^2+y^2+z^2=4$

apr 27-10:37

och cylindern

$$x^2+y^2=2y.$$

Först visa vi att

$x^2+y^2=2y$ verkligen

är en cylinder.

apr 27-10:38

Kvadratkomplettera

$$x^2 + y^2 = 2y$$

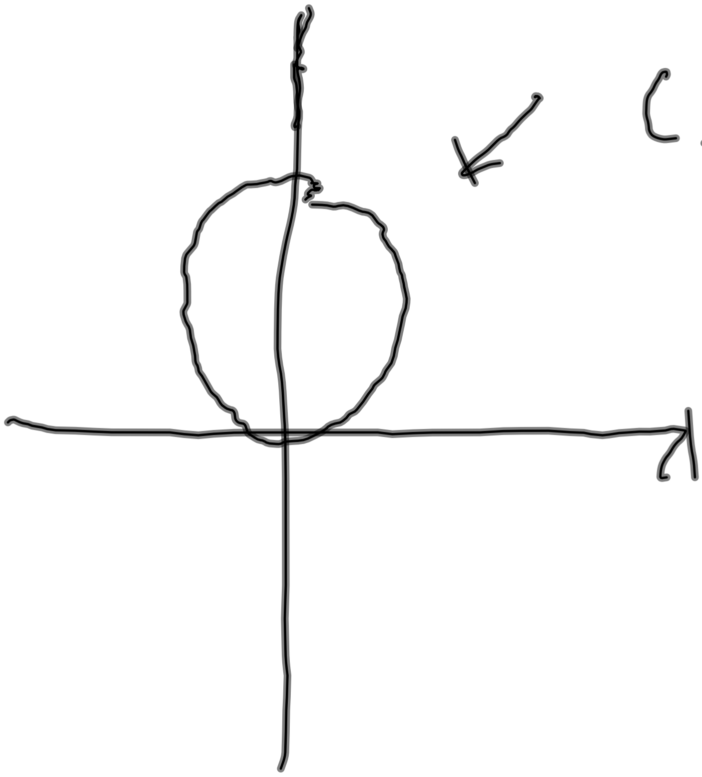
$$x^2 + y^2 - 2y = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2y + 1 - 1 = 0$$

$$x^2 + (y-1)^2 - 1 = 0$$

$$x^2 + (y-1)^2 = 1$$

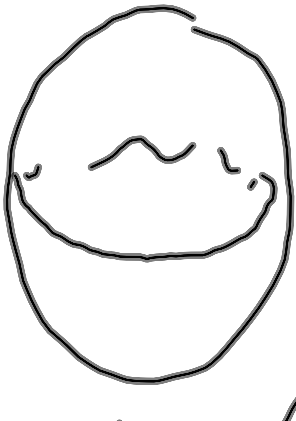
apr 27-10:40

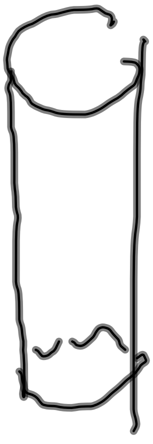


cirkel med radie 1 i (0,1)

Vi har

sfär

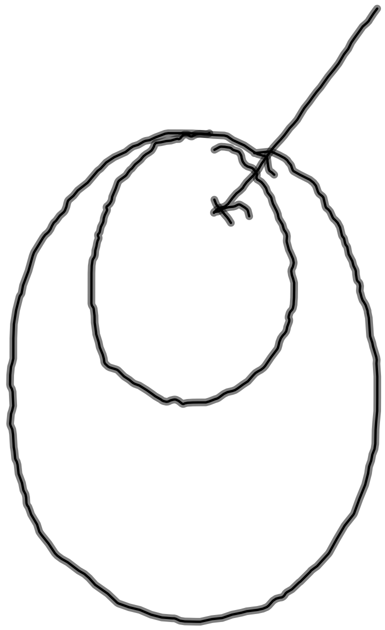




cylinder

och de skär varandra

I XY-planet blir skärningen



Tak och golv ges av skärytan.

Vi har identifierat hur kroppen ser ut.

Hur integrerar vi på bästa sätt?

Det verkar bra med polära koordinater.
Men det kan göras på två sätt

a) Polära koordinater centrerade i (0,0).

apr 27-10:44

Fördel: Skärningen får enkel form.

Nackdel: Området (lilla cirkeln) blir komplicerat.

b) Polära koordinater centrerade i (0,1)

apr 27-11:01

Fördel: Området
blir enkelt
Nackdel: Stärykten blir
komplicerad.

I vårt fall blir
metod a bäst.
Cirkeln blir faktiskt

apr 27-11:02

inte så svår.

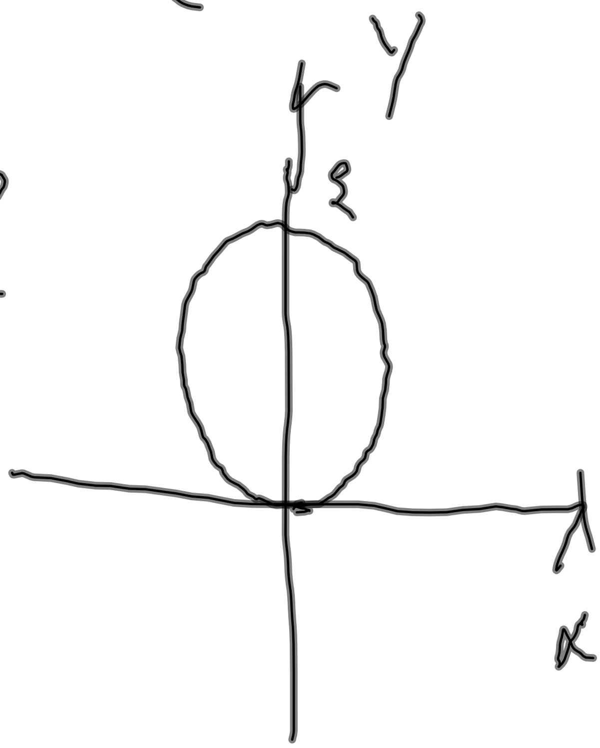
$x^2+y^2=2y$ blir

polärt

$r^2=2r\sin\varphi$

$r=2\sin\varphi$

$0\leq\varphi\leq\pi$



apr 27-11:04

Vi försöker då beräkna integralen över C av "taket" - "golvet"

För en punkt med polära koordinater (θ, r) fås att

apr 27-11:06

"taket" - "golvet"

$$\bar{a}r \ \sqrt{4-r^2} - \left(-\sqrt{4-r^2}\right)$$

$$= 2\sqrt{4-r^2}$$

$$V = \int_0^{\pi} \int_0^{2\sin\varphi} 2\sqrt{4-r^2} \, r \, dr \, d\varphi$$

apr 27-11:07

$$= 2\int_0^{\pi}\int_0^{2\sin\varphi} \sqrt{4-r^2}\, r\,dr\,d\varphi$$

$$\int_0^{2\sin\varphi} \sqrt{4-r^2}\, r\,dr =$$

$$= \left[-\frac{1}{3}(4-r^2)^{3/2}\right]_0^{2\sin\varphi} =$$

apr 27-11:09

$$= \frac{8}{3} - \frac{8}{3}\left(1-\sin^2\varphi\right)^{3/2}$$

Vi skall nu beräkna

$$\int_0^{\pi} \left(\frac{8}{3} - \frac{8}{3}\left(1-\sin^2\varphi\right)^{3/2} \right) d\varphi$$

apr 27-11:11

Nu måste vi vara försiktiga!

$$1-\sin^2\varphi = \cos^2\varphi$$

Om $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$

är $(1-\sin^2\varphi)^{3/2}$

$$= (\cos^2\varphi)^{3/2} = \cos^3\varphi$$

apr 27-11:12

Vi ser också att integralen är symmetrisk kring $\varphi = \frac{\pi}{2}$

$$\int_0^{\pi} \left(\frac{8}{3} - \frac{8}{3} \left(1 - \sin^2 \varphi\right)^{3/2} \right) d\varphi$$

$$= 2 \int_0^{\pi/2} \frac{8}{3} \left(1 - \cos^3 \varphi\right) d\varphi$$

apr 27-11:14

$$= \frac{16}{3}\int_0^{\pi/2} d\varphi - \frac{16}{3}\int_0^{\pi/2} \cos^3\varphi \, d\varphi$$

$$= \frac{8\pi}{3} - \frac{16}{3}\int_0^{\pi/2} (1-\sin^2\varphi)\cos\varphi \, d\varphi$$

Gör variabelbytet

apr 27-11:16

$t = \sin\varphi \quad dt = \cos\varphi \, d\varphi$

Integralen blir

$$\frac{8\pi}{3} - \frac{16}{3}\int_0^1 (1-t^2)\,dt$$

$$= \frac{8\pi}{3} - \frac{16}{3}\left[t - \frac{t^3}{3}\right]_0^1 =$$

apr 27-11:17

$$= \frac{8\pi}{3} - \frac{32}{9}$$

Vi har dessutom en faktor 2 sedan tidigare steg att ta hänsyn till.

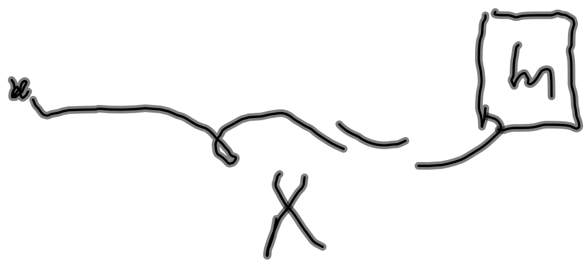
Volymen blir $\frac{16\pi}{3} - \frac{64}{9}$.

apr 27-11:18

En tillämpning av multipelintegraler:

Masscentrum (tyngdpunkt)

Moment



En (liten) kropp
med massa m på
avstånd x från
origo ger ett vridmoment
mx med avseende
på origo.
(Egentligen mgx)

apr 27-11:21

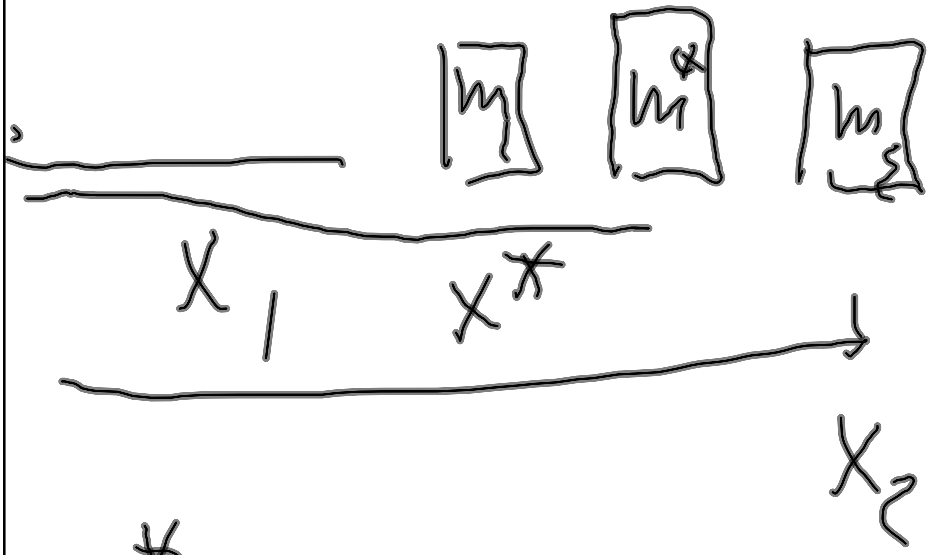
(Vi tänker på g som 1.)

Två kroppar med massor m_1, m_2 och avstånd x_1, x_2 ger totala momentet

$$m_1 x_1 + m_2 x_2$$

Dessa två kroppar kan

ersättas med en "fiktiv" kropp som ger samma vridmoment.



$m^* = m_1 + m_2$

och $x^* = \dfrac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$

Kroppen med massa

m^x och avstånd x^*

ger vridmoment

$m_1 x_1 + m_2 x_2$

Om vi har n olika

små kroppar kan

vi sätta

$m^* = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$

och $x^* = \dfrac{m_1 x_1 + \ldots + m_n x_n}{m_1 + \ldots + m_n}$

apr 27-11:26

Koordinaten x^* kallas för tyngdpunktens koordinat i x-led (eller bara tyngdpunkten.)

apr 27-11:28

Obs: Denna

beräkning kan

göras kring en

annan punkt än

origo. Men om vi

tar en annan punkt

apr 27-11:29

t.ex $x=a$ så får vi ändå att:

Kroppen med massan m^* och läge x^* ger samma vridmoment kring $x=a$ som alla kropparna tillsammans.

apr 27-11:30

Dessutom kan vi
visa att vridmomentet
kring X^* blir 0!

Om vi har tre
variabler kan vi
på samma sätt beräkna

apr 27-11:31

Y^* och Z^*.

Om vi har stora kroppar kan vi ersätta summorna med integraler

Om m ersätts med $\rho(x)$ (densitet)

apr 27-11:33

får vi i endimensionella fallet att

$$x^* = \frac{\int x\,\rho(x)\,dx}{\int \rho(x)\,dx}$$

Antag nu att vi har en kropp K i $\mathbb{R}^3$ med en varierad densitet $\rho(x,y,z)$

Massan hos kroppen är $M = \iiint_K \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$

apr 27-11:36

Masspunktens (tyngdpunktens)
koordinater (x^*, y^*, z^*)

ges av

$$x^* = \frac{1}{M} \iiint_K x \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

$$y^* = \frac{1}{M} \iiint_K y \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

apr 27-11:37

$$z^* = \frac{1}{M} \iiint\limits_K z\,\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

Ex Bestäm tyngdpunkten för ett simplex $x+y+z=1$

med densitet 1.

$$M = \iiint_K dx\,dy\,dz$$

= volymen

Från förra föreläsningen vet vi att $M = \frac{1}{6}$.

apr 27-11:40

$$\iiint_K x\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} x \, dz\,dy\,dx$$

$$=$$

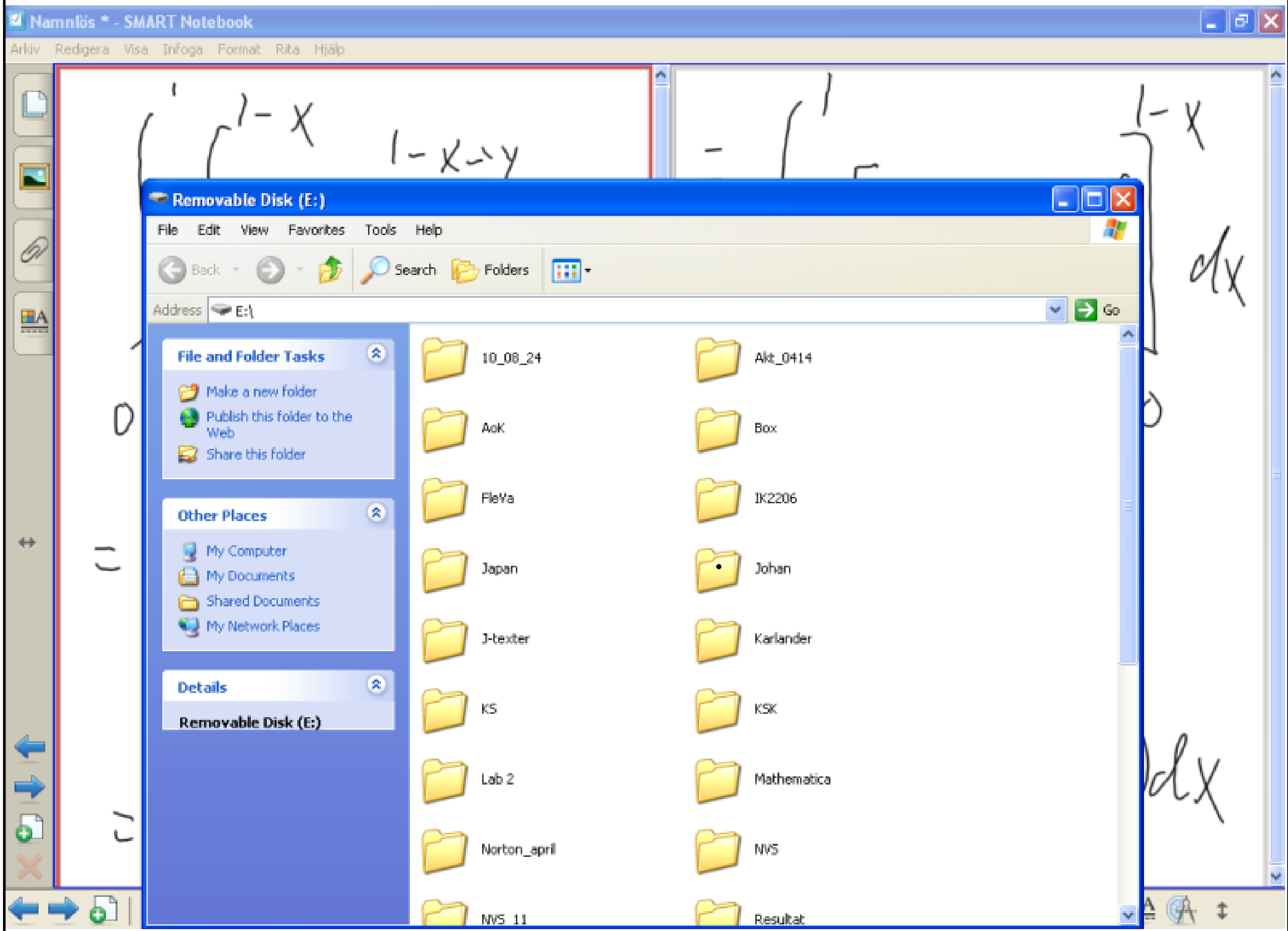
apr 27-11:42

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \Big[xz \Big]_0^{1-x-y} \, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} x(1-x-y)\, dy\, dx$$

$$=$$

apr 27-11:43


Namnlös * - SMART Notebook
Arkiv Redigera Visa Infoga Format Rita Hjälp
Removable Disk (E:)
File Edit View Favorites Tools Help
Back Search Folders
Address E:\
Go
File and Folder Tasks
Make a new folder
Publish this folder to the Web
Share this folder
Other Places
My Computer
My Documents
Shared Documents
My Network Places
Details
Removable Disk (E:)
10_08_24
Akt_0414
AoK
Box
FleVa
IK2206
Japan
Johan
J-texter
Karlander
KS
KSK
Lab 2
Mathematica
Norton_april
NVS
NVS_11
Resultat

$$= \int_0^1 \left[\frac{-x(1-x-y)^2}{2} \right]_0^{1-x} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x(1-x)^2}{2} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 (x - 2x^2 + x^3) dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2} - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^4}{4}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{24}$$

$$x^* = \frac{1/24}{1/6} = \frac{1}{4}$$

apr 27-11:45

P.g.a. symmetri får vi

$$(x^*, y^*, z^*) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$$

apr 27-11:46