Vektorfält

<u>Def</u>: Ett vektorfält i $\mathbb{R}^2$ består av två funktioner $P(x,y)$, $Q(x,y)$ ordnade i par

apr 28-09:58

$(P(x,y), Q(x,y))$

Vektorfältet är definierat i ett visst område D.

(Ofta är $D = \mathbb{R}^2$)

apr 28-10:04

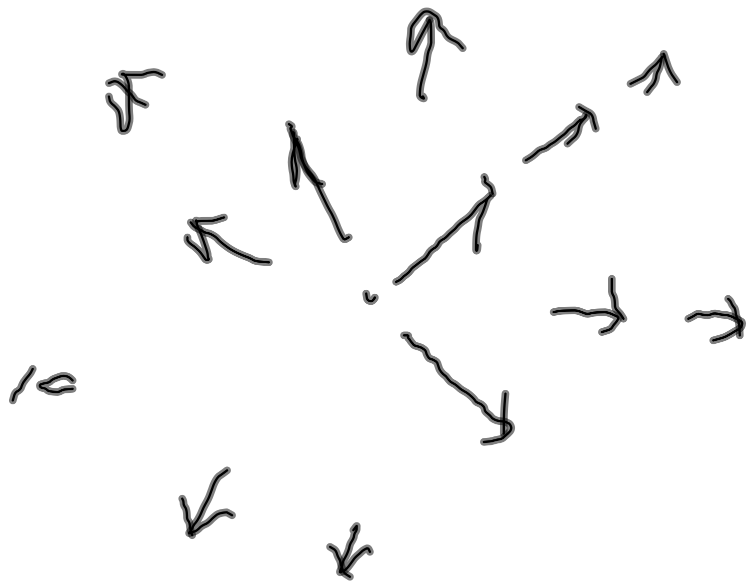
Vi kommer oftast att anta att både P och Q och dess derivator är <u>kontinuerliga</u> <u>nästan överallt</u>.

apr 28-10:05

Vektorfält har många fysikaliska tillämpningar.

Ex: Ett elektrostatiskt vektorfält från en punktladdning.

apr 28-10:07

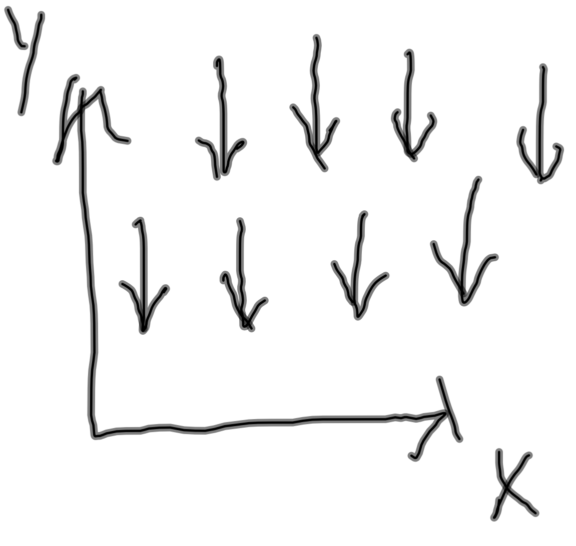


Här har vi

$$(P, Q) = k\left(\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}} \right)$$

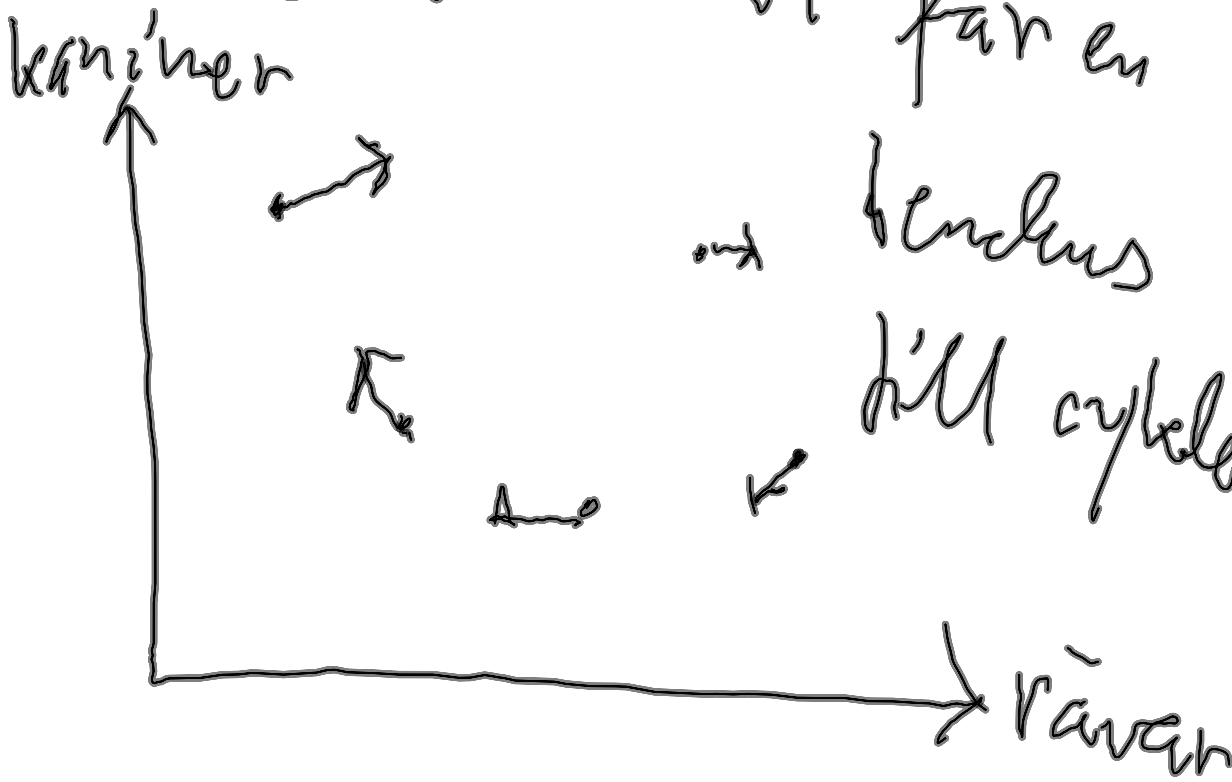
I elläran studerar vi också magnetfält.

Vi har det enkla gravitationsfältet



$$(P, Q) = (0, -mg)$$

Det finns andra tillämpningar t.ex s.k. prey-predator-modeller. Vi får en tendens till cykler



Pilarna visar lokal förändring över tiden i populationernas storlek.

Saker vi kan göra med vektorfält:

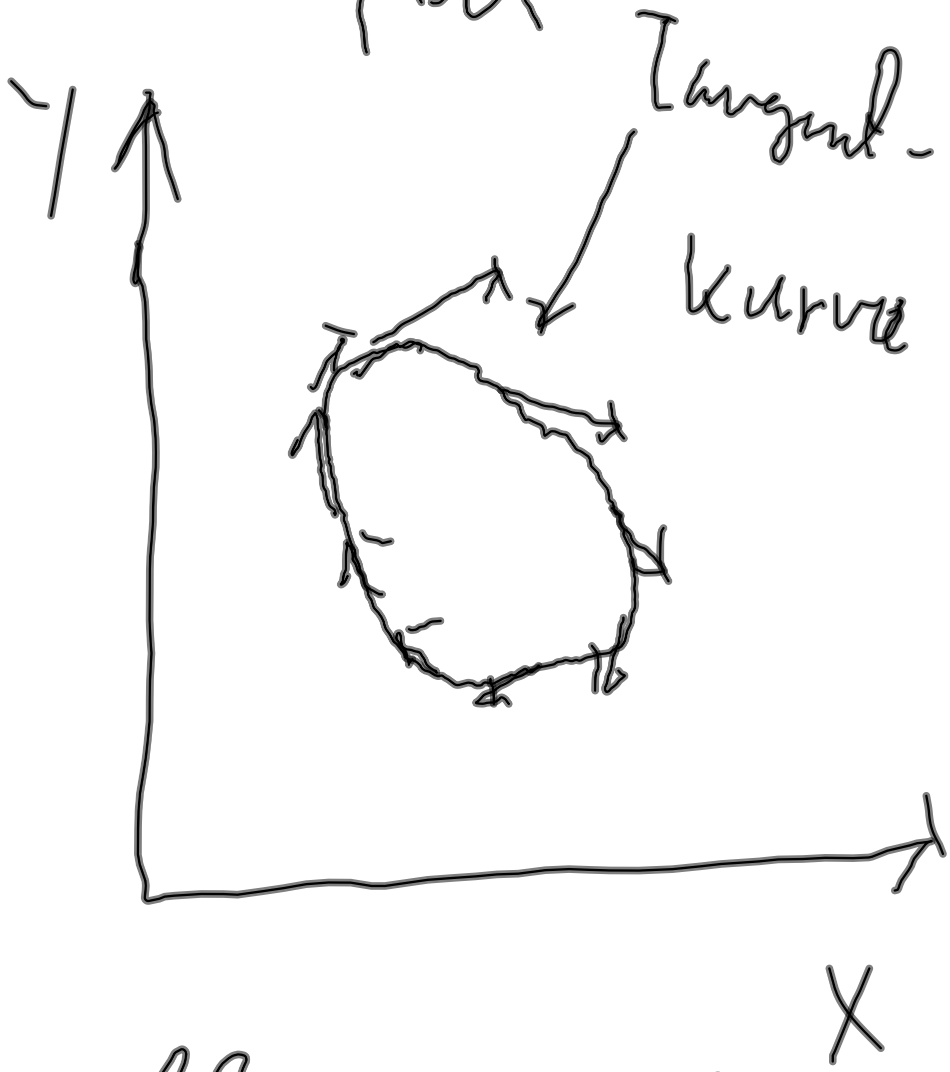
1. Vi kan försöka hitta potentialer till vektorfält.

2. Vi kan försöka hitta s.k. tangentkurvor

apr 28-10:15

Till vektorfält

Ex 1



Det handlar om att
lösa ett system

apr 28-10:17

av differentialekvationer

$$\begin{cases} x'(t) = P(x(t), y(t)) \\ y'(t) = Q(x(t), y(t)) \end{cases}$$

3. Vi kan beräkna

<u>kurvintegralen</u>

apr 28-10:18

$$I = \int_{\gamma} P\,dx + Q\,dy$$

Vi har en kurva
och integrerar fältet

över den.

Potentialer

Antag att vi har ett vektorfält (P, Q)

apr 28-10:20

Def: Om $U(x,y)$

är en funktion sådan

att

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x} = P(x,y) \\ \dfrac{\partial U}{\partial y} = Q(x,y) \end{cases}$$

apr 28-10:23

Så är U en potential

till (P, Q).

Obs: En potential

är aldrig unik

Om U är en

potential och C

apr 28-10:23

är en konstant så

är $U+C$ också en potential.

Ex på beräkning av potential:

$P = 2xy \quad Q = x^2+1$

Finns det en potential u?

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy$$

$$u = \int 2xy\,dx =$$

$$x^2 y + g(y)$$

apr 28-10:26

Då blir

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^2 + g'(y)$$

Vi vill att detta skall vara $x^2 + 1$

Det ger $g'(y) = 1$

$g(y) = y + C$

Vi får $U = x^3 y + y + C$

Om U är en potential så är vektorfältet ∇U d.v.s. gradienten till U.

Vektorfältet anger

den riktning som

U ökar mest i.

Om vi flyttar oss

från (x, y) till $(x+\Delta x,$

$y+\Delta y)$

apr 28-10:30

och det finns en potential U, så anger

$P\Delta x + Q\Delta y$ ändringen i potentialen.

apr 28-10:32

Ex: Gravitationsfältet

Vi utgår ifrån en potential

$$U = \frac{k}{r} \quad \text{där}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

apr 28-10:33

(Vi antar att $k > 0$)

$$U = k \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{k\,x}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

apr 28-10:34

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-ky}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

Vi inför följande notation:

$$\bar{r} = (x, y)$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2}$$

Vi kan då skriva

$$(P, Q) = \frac{-k\,\bar{r}}{r^3}$$

Har alla vektorfält en potential?

apr 28-10:37

<u>Ex:</u> $(P,Q) = (-y, x)$

Försök hitta u

så att

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -y \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x$$

apr 28-10:39

$$u = \int (-y)\,dx = -xy + g(y)$$

Då blir

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -x + g'(y)$$

Vi vill att det skall vara

apr 28-10:40

x d.v.s.

$$-x + g'(y) = x$$

Men hur vi än väljer $g(y)$ så går det inte!

Det finns ingen potential.

apr 28-10:41

Ett viktigt problem
är att avgöra om
ett vektorfält har
en potential eller inte.

<u>Ofta</u> är vektorfältet
definierat på ett område

apr 28-10:44

D och då kan det
bli svårt att avgöra
om det finns en potential
i D.

<u>Men</u> om (P, Q) är
definierat i R^2 och

apr 28-10:45

har kontinuerlig derivator där är svaret enkelt.

(P, Q) har en potential om och endast om

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$ överallt.

apr 28-10:46

Bevis för "nödvändighet":

Om U finns så

är $P = \dfrac{\partial U}{\partial x}$ och

$Q = \dfrac{\partial U}{\partial y}$.

Då är $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$

apr 28-10:52

och $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$

Eftersom $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$

får vi $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$

apr 28-11:05

Att visa att sambandet är <u>tillräckligt</u> är svårare. Här är bara en <u>skiss</u> till bevis:

apr 28-11:07

Antag att $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$.

Vi försöker hitta

U med vanliga metoden.

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P$$

$$U = \int P\,dx$$

apr 28-11:08

$= \underline{P} + g(y)$

där $\underline{P}$ är någon funktion vars derivata är P.

Då blir $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial \underline{P}}{\partial y} + g'(y)$

apr 28-11:08

Vi vill nu att

$$\frac{\partial P}{\partial y} + g'(y) = Q$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \int p \, dx$$

<u>Om</u> vi nu flyttar

apr 28-11:09

in deriveringen

(obs: Får vi göra det?)

får vi

$$\frac{\partial I}{\partial y} = \int \frac{\partial P}{\partial y} dx$$

Vi vet att $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

apr 28-11:11

Så $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \displaystyle\int \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx$

$= Q + h(y)$

Så $\dfrac{\partial P}{\partial y} + g'(y) = Q$

fungerar om vi sätt

$g'(y) = -h(y)$

apr 28-11:12

Men detta var en skiss till bevis.

Vi ger men utförligt bevis senare.

apr 28-11:14

Några komplikationer om D inte är $\mathbb{R}^2$.

Ex Gravitationsfältet igen.

$$(P, Q) = \left(-\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}, -\frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}} \right)$$

apr 28-11:15

Vektorfältet existerar inte i origo.

Så $D = \mathbb{R}^2 - (0,0)$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right)$$

$$= \frac{3xy}{(x^2+y^2)^{5/2}}$$

apr 28-11:16

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right)$$

$$= \frac{3xy}{(x^2+y^2)^{5/2}}$$

så $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$

överallt utom i $(0,0)$.

apr 28-11:20

Fältet har en potential (ändå)

<u>Ex</u>: Ta fältet

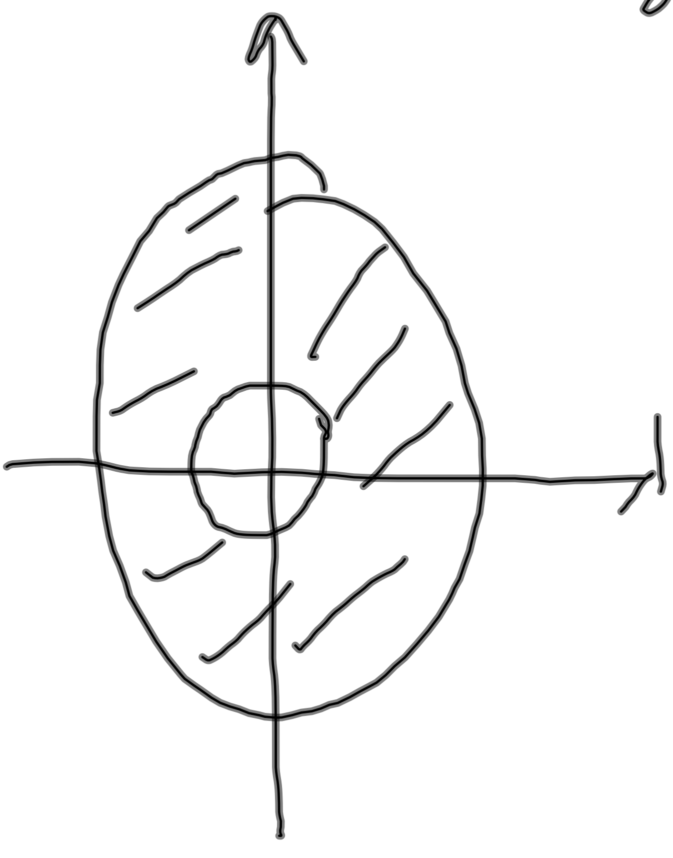
$$(P, Q) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$$

(P, Q) är inte definierat

i origo.

Definiera fältet

i D som ges av



Då existerar (P, Q) i hela D.

Dessutom gäller

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{-y}{x^2+y^2} =$$

$$= \frac{-1\cdot(x^2+y^2)+y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} =$$

apr 28-11:23

$$= \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{x^2+y^2} =$$

$$= \frac{1 \cdot (x^2+y^2) - x \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} =$$

apr 28-11:24

$$\frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Så $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ i hela D.

<u>Men</u> det finns ingen potential till (P, Q)

apr 28-11:25

i D !

Sats: Om D

är ett enkelt

sammanhängande

område och (P, Q)

är definierat i D

<u>så</u> har (P, Q) en

potential i D om

och endast om

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \text{ i } D.$$

apr 28-11:28

Enkelt sammanhängande område

Informellt är det ett sammanhängande område utan "hål".

apr 28-11:29

Ex

Enkelt sammanhängande

Inte enkelt sammanhängande

Potentialer i $\mathbb{R}^3$

Vi kan använda notationen

$$\bar{F} = (F_x, F_y, F_z)$$

för ett vektorfält med 3 komponenter

apr 28-11:31

E1 Gravitationsfältet

igen

$$\bar{F} = \frac{-k\,\bar{r}}{r^3}$$

där $\bar{r} = (x, y, z)$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

apr 28-11:32

Om U uppfyller

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x} = F_x \\ \dfrac{\partial U}{\partial y} = F_y \\ \dfrac{\partial U}{\partial z} = F_z \end{cases}$$

så är U en potential till $\bar{F}$.

apr 28-11:34

Ex $\overline{F} = (y, x, 1)$

Hitta alla potentialer till $\overline{F}$

Vi vill att

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 1$$

apr 28-11:35

Sätt $u = \int y \, dx$

$= xy + g(y, z)$

Det ger

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x + \frac{\partial g}{\partial y}$$

apr 28-11:36

Vi vill att detta skall bli x d.v.s.

$$x + \frac{\partial g}{\partial y} = x$$

Det ger $\frac{\partial g}{\partial y} = 0$ d.v.s.

$$g = h(z)$$

apr 28-11:37

Så $u = xy + h(z)$

Det ger

$$\frac{\partial u}{\partial z} = h'(z)$$

Vi vill att det skall vara 1 d.v.s.

$$h'(z) = 1$$

apr 28-11:38

Det ger $h(z) = z + C$

Så $u = xy + z + C$

Fungerar detta alltid?

Nej. Vi har nödvändiga krav för att

det skall finnas potential:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_x}{\partial y} = \dfrac{\partial F_y}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial F_z}{\partial x} = \dfrac{\partial F_x}{\partial z} \\[2ex] \dfrac{\partial F_y}{\partial z} = \dfrac{\partial F_z}{\partial y} \end{cases}$$

apr 28-11:40

Bevisskiss:

Om det finns en potential U så säger fördelningen att

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$$

o.s.v.

apr 28-11:41