F16 - Kurvintegraler

En kurvintegral kan t.ex se ut som

$$\oint_\gamma (x^2 y\,dx - \sin xy\,dy)$$

Vad betyder det?

maj 2-10:02

En kurvintegral består av två komponenter

* En kurva
* Ett vektorfält.

maj 2-10:05

Lite repetition av integration i en variabel.

Vi har två integralbegrepp

1. $\int f(x)\,dx = F(x) + C$

2. $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

maj 2-10:08

Det intressanta är
att dessa två begrepp
ger "samma" sak.

<u>Obs</u>: Integral 2 kan
beräknas med
andra metoder
t.ex Riemannsumma.

maj 2-10:10

Hur är det i
flervariabel då.
Vad finns det för
motsvarigheter?
I flervariabel är
den naturliga motsvarig-
heten till en integral

maj 2-10:11

av typ 1 alt i
hittar en potential.

Så primitiv funktion

motsvaras av en potential

Potentialen kan tolkas
som en primitiv funktion

till ett vektorfält.

Potentialen är också kopplad till en typ av integral och det är kurvintegralen

Obs: Vanlig envariabelintegral är ett specialfall av kurv-integral.

<u>Men</u>: Inte alla vektorfält har potential. Vi kan ändå räkna kurv-

integraler i alla
vektorfält.

Vi skall definiera
vad en kurvintegral
är.

Först lite repetition
om parametrisering

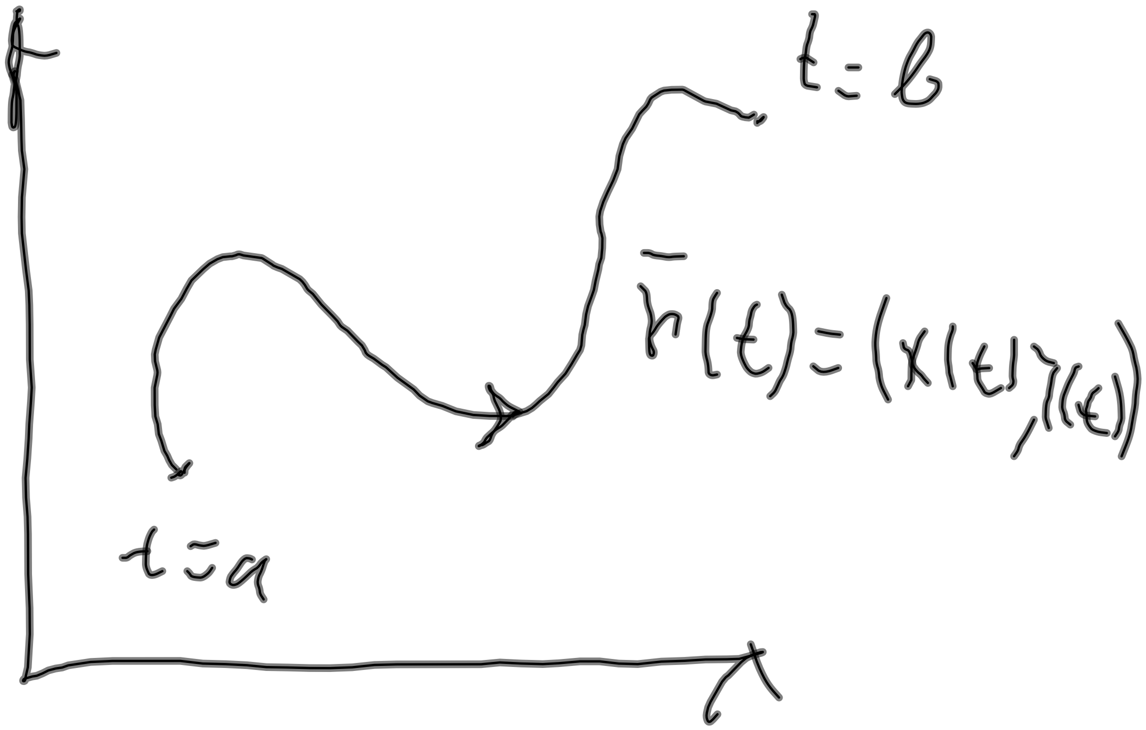
maj 2-10:19

kurvor.

$$\bar{r}(t) = (x(t), y(t))$$

$$a \leq t \leq b$$

<u>Obs:</u> Vi tittar först på kurvor i $\mathbb{R}^2$



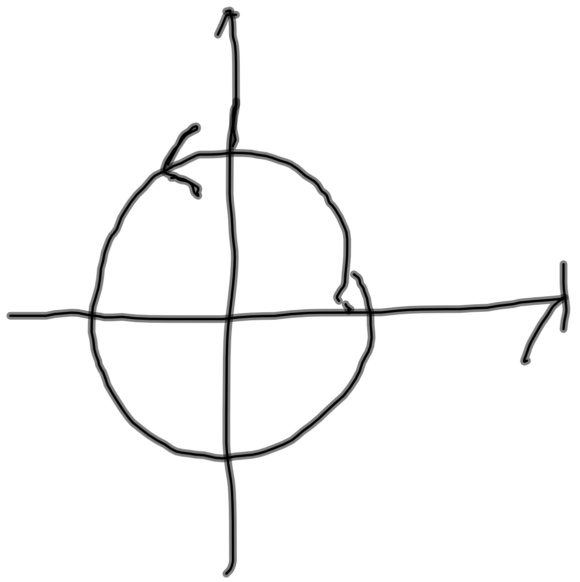
En kurva består egentligen av två komponenter

a. Dess form.

b. Sättet vi rör
oss längs formen.

Det finns parametriseringar
som ger samma form
även om vi rör oss
på olika sätt längs kurvan.

Ex En cirkel



$\bar{r}(t) = (\cos t, \sin t)$

$0 \leq t \leq 2\pi$

Men $\tilde{r}(t) = (\cos 2t, \sin 2t)$

$0 \leq t \leq \pi$

maj 2-10:25

ger samma form.

Om t tolkas som

tid så rör vi oss

dubbelt så snabbt

i 2:a parametriseringen.

maj 2-10:26

Det finns många andra möjligheter

$\bar{r}(t) = (\cos t, \sin t)$

$2\pi \leq t \leq 4\pi$

(Ger samma form men förskjuten "start")

maj 2-10:28

$$\bar{r}(t) = (\cos t^2, \sin t^2)$$

$$0 \leq t \leq \sqrt{2\pi}$$

Ger samma form

men varierande

"hastighet".

Ibland är det

viktiga bara formen

och inte "hastigheten".

(Vi måste vara försiktiga

och tänka efter.)

Vi kan nästan alltid

maj 2-10:31

välja olika typer
av parametriseringar
om vi har en viss
form på kurvan given.

Vissa parametriseringar
är bättre än andra.

maj 2-10:32

Tangenten till en kurva ges av

$$\bar{r}'(t) = (x'(t), y'(t))$$

$\bar{r}'(t)$ beror av parametriseringen.

En parametriserad kurva där $|\bar{r}'(t)| \neq \bar{0}$ för alla t kallas en <u>reguljär</u> kurva.

(och de är bra!)

maj 2-10:35

Specialfall:

Om vi använder

båglängden s som

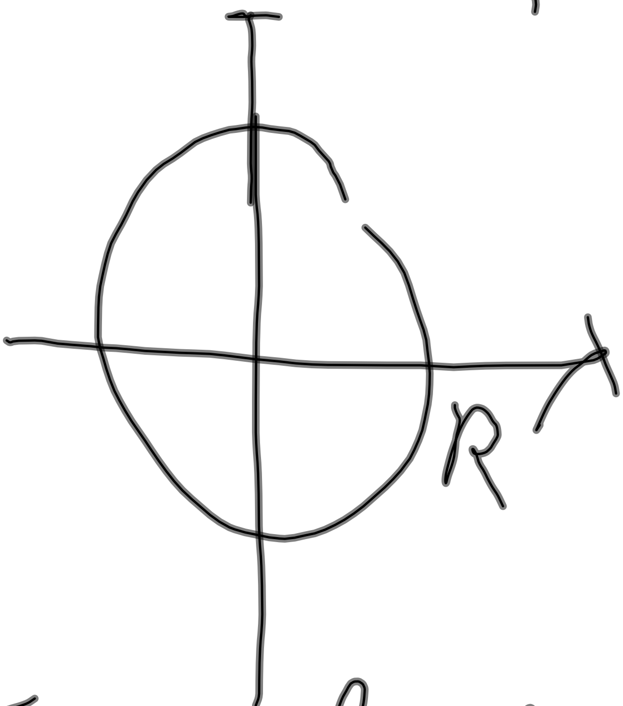
parameter d.v.s.

$$\bar{r}(s) = (x(s), y(s))$$

så får vi $|\bar{r}'(s)| = 1$
för alla s.

maj 2-10:36

Ex: En cirkel med radie R



En naturlig parametrisering är

$\bar{r}(t) = (R\cos t, R\sin t)$ $0 \le t \le 2\pi$

När vi rör oss från $t=0$ till $t=a$ så rör vi oss sträckan Ra. Så båglängden

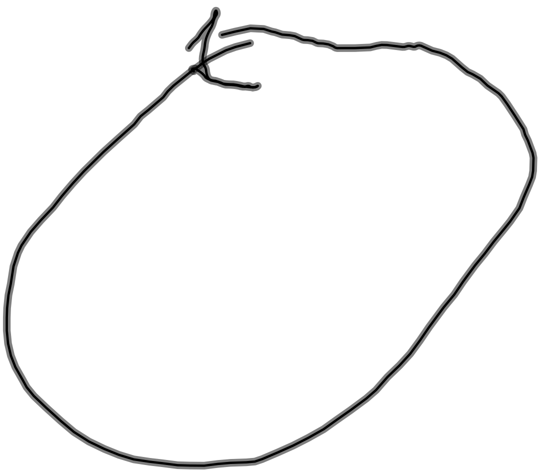
$$s = Rt$$

En parametrisering m.a.p. båglängden är

$$\bar{r}(s) = \left(R\cos\frac{s}{R},\ R\sin\frac{s}{R}\right)$$

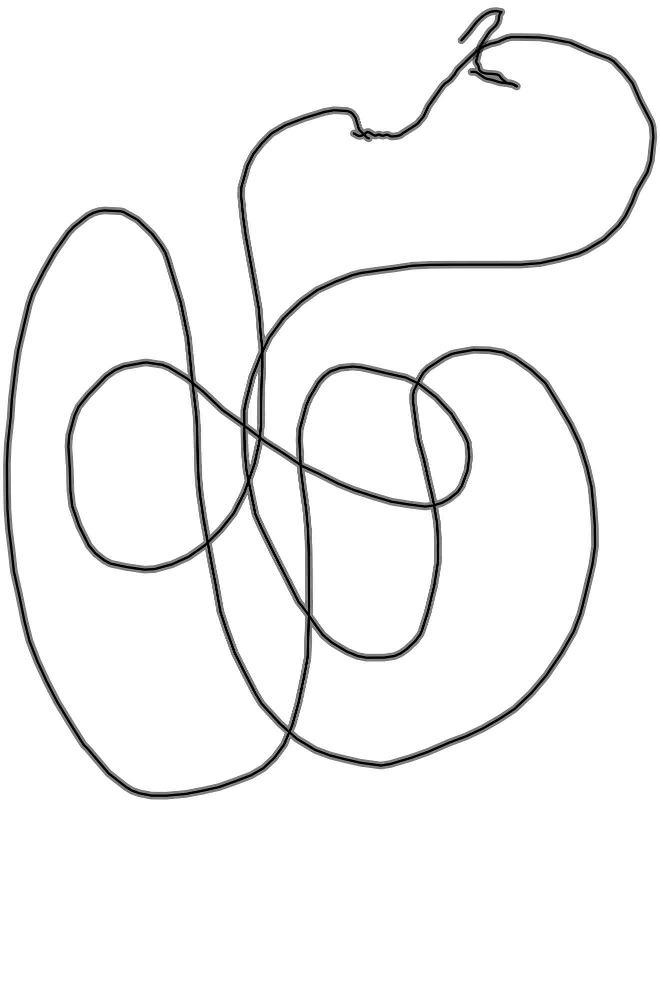
$$0 \le s \le 2\pi R$$

Slutna kurvor



Sluten kurva.

En sluten kurva startar och slutar i samma punkt.



Också sluten.

Def: En enkel, sluten kurva är en kurva som startar och slutar i samma punkt och som inte skär sig själv.

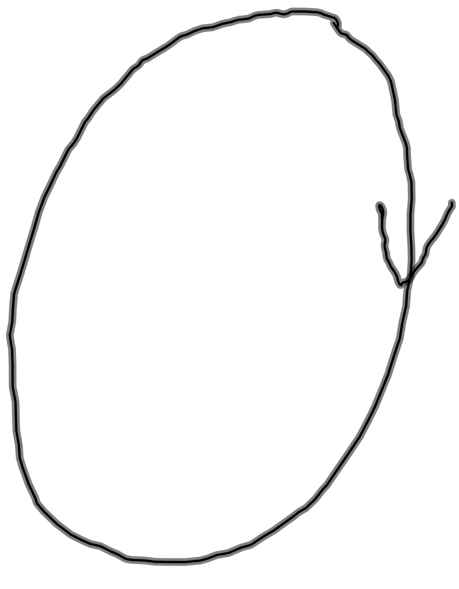
maj 2-10:45

Orientering

Om vi har en
enkel sluten parametri-
serad kurva kan den
orienteras på två sätt:

maj 2-11:00

Positiv.

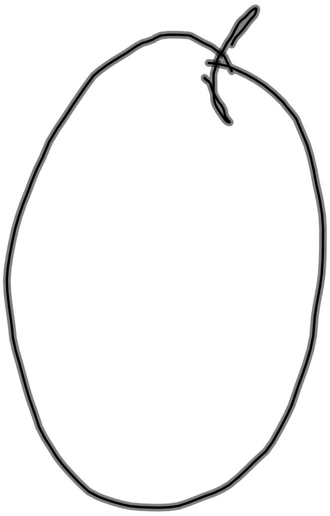


Negativ.

Orienteringen beror
på vilken parametrisering

Vi vill.

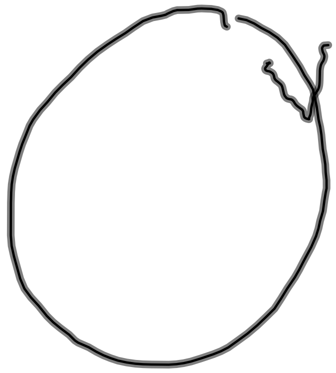
Ex: Cirkel



$\bar{r}(t) = (\cos t, \sin t)$

$0 \leq t \leq 2\pi$

Positiv.



$$\bar{r}(t) = (\cos t, -\sin t)$$

$$0 \le t \le 2\pi$$

Tecknet på orienteringen kommer att påverka kurvintegralen.

Definition av kurvintegral

Låt $\bar{F}(x,y) =$

$= (P(x,y), Q(x,y))$

vara ett vektorfält

och $\bar{r}(t) = (x(t), y(t))$

γ: $a \leq t \leq b$

en parametriserad kurva

$$\int_\gamma (P\,dx + Q\,dy)$$

betyder samma sak

som

maj 2-11:05

$$\int_a^b \Big(P(X(t),Y(t))X'(t) + Q(X(t),Y(t))Y'(t) \Big)\,dt$$

Så kurvintegralen är

en envariabelintegral.

Ex: Vi har

$$P(x,y) = x + y$$

$$Q(x,y) = \frac{x^2}{y}$$

och

$$\gamma: \bar{r}(t) = (t^2, 2t)$$

$$1 \leq t \leq 2$$

maj 2-11:07

$x(t) = t^2$, $x'(t) = 2t$

$y(t) = 2t$, $y'(t) = 2$

$P(x(t), y(t)) = t^2 + 2t$

$Q(x(t), y(t)) = \frac{t^4}{2t} = \frac{t^3}{2}$

$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy =$

maj 2-11:09

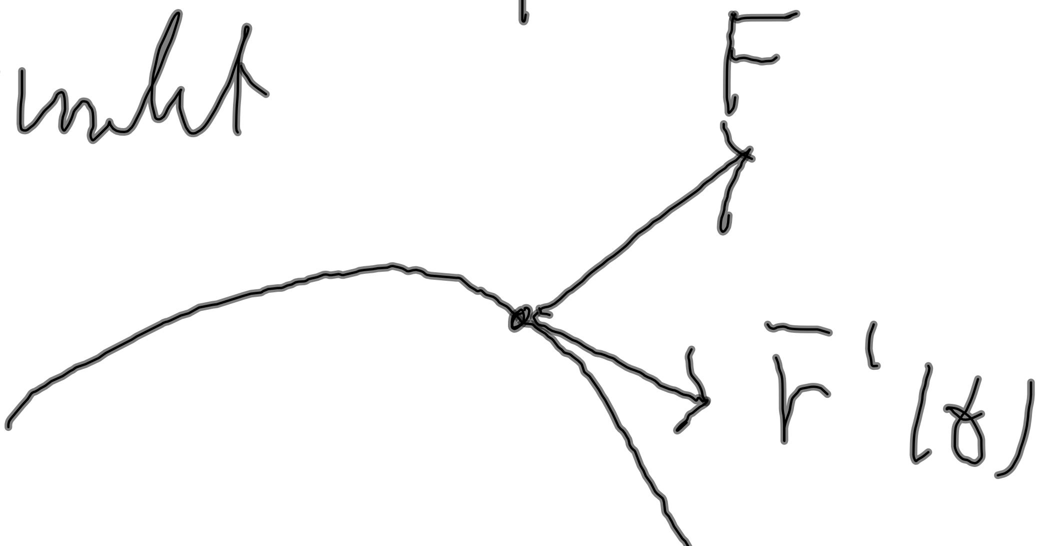
$$= \int_1^2 \left((t^2+2t)\cdot 2t + \frac{t^3}{2}\cdot 2 \right) dt$$

$$= \int_1^2 (3t^3+4t^2)\,dt$$

$$= \left[\frac{3t^4}{4} + \frac{4t^3}{3} \right]_1^2 = \frac{247}{12}$$

Vad betyder då en kurvintegral.

Vi tittar på en viss punkt



Om vi ändrar t till
t+dt så får vi
en ändring i läget
som är $\bar{r}'(t)\,dt$
(Det är alltså (dx, dy))
Vi skalärmultiplicerar
$\bar{r}'(t)dt$ med $\bar{F}$

maj 2-11:15

Det ger

$$\bar{F} \cdot \bar{r}'(t)dt$$

$$= (P, Q) \cdot (dx, T)$$

$$= Pdx + Qdy$$

Integralen kan tolkas som att vi delar upp γ i små stycken

Som vi skalärmultipli-
cerar med $\bar{F}$ och
summerar.

Beroende på vad
$\bar{F}$ är kan della
belopp olika saker

Ex: $\bar{F} = \text{grad}\, U$

(U är potential till $\bar{F}$)

Då är $(P, Q) = \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}\right)$

Då är $(P, Q)(dx, dy)$

$= \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}\right)(dx, dy) =$

maj 2-11:19

$$= \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$$

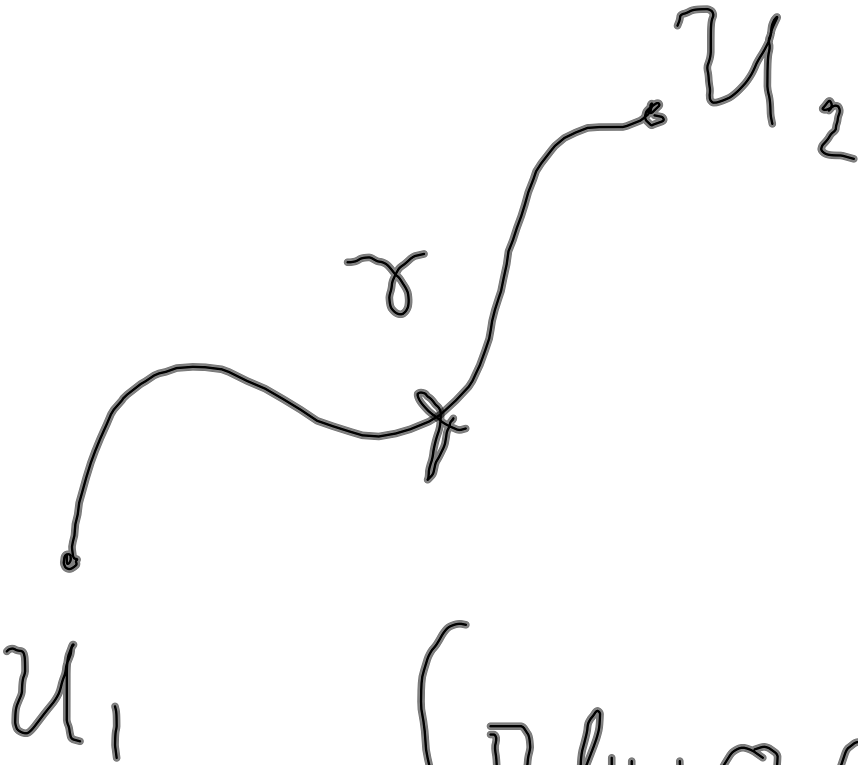
Detta är du!

$$\int_{\gamma} P dx + Q dy$$ är

helt enkelt

totala ändringen i U.

från start till slut.



$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy = U_2 - U_1$$

Men detta gäller bara för fält med

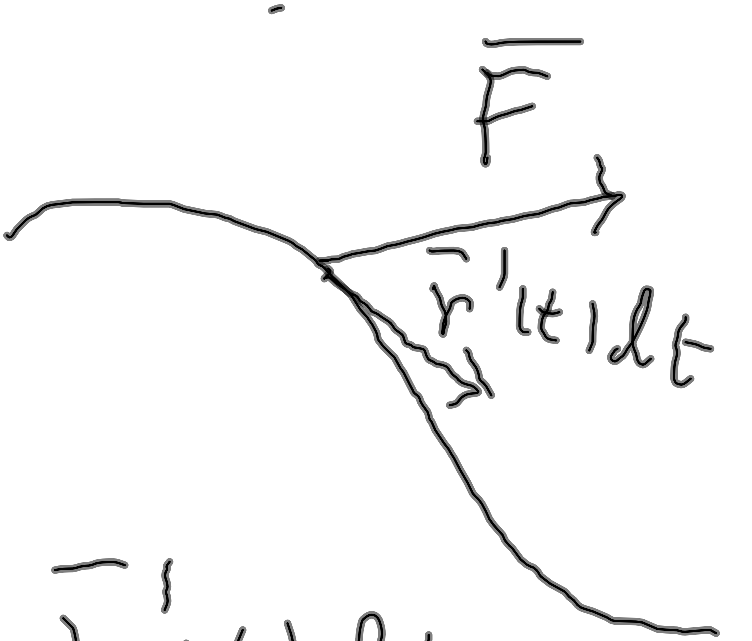
potential.

<u>Ex</u>: Antag att

$\bar{F}$ är ett kraftfält.

γ är en väg genom

kraftfältet



$$\bar{r}'(t)dt = d\bar{r}$$

$\bar{F}\cdot d\bar{r}$ = arbetet

som $\bar{F}$ uträttar vid förflyttning längs $d\bar{r}$.

Så $\int_{\gamma} P\,dx + Q\,dy$

kan tolkas som totala arbetet som (P, Q) uträttar vid förflyttning längs kurvan.

maj 2-11:25

Specialfall av kurvintegral:

Om kurvan γ är <u>sluten</u> skriver vi $\oint_\gamma (P\,dx + Q\,dy)$

Obs: Ofta gäller

att $\oint_\gamma (P\,dx + Q\,dy) = 0$

men inte alltid.

maj 2-11:28

Ex: Vi har

$\bar{F} = (kx, ky)$

där k är någon konstant

γ är enhetscirkeln

$\bar{r}(t) = (\cos t, \sin t)$

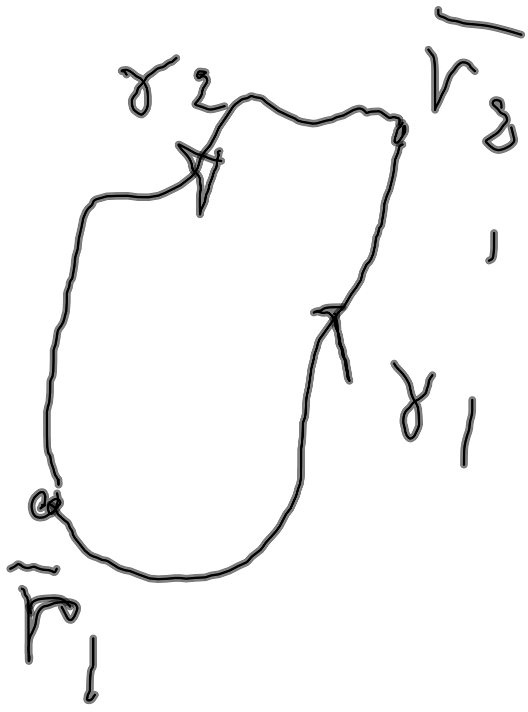
$0 \leq t \leq 2\pi$

$$\oint_{\gamma} (P\,dx + Q\,dy)$$

$$= \int_{0}^{2\pi} \left(k \cdot \cos t \cdot (-\sin t) + k \sin t \cdot \cos t \right) dt$$

$$= \int_{0}^{2\pi} (0)\, dt = 0$$

Antag att vi har
två olika vägar
mellan två punkter



maj 2-11:34

Kan vi vänta oss att

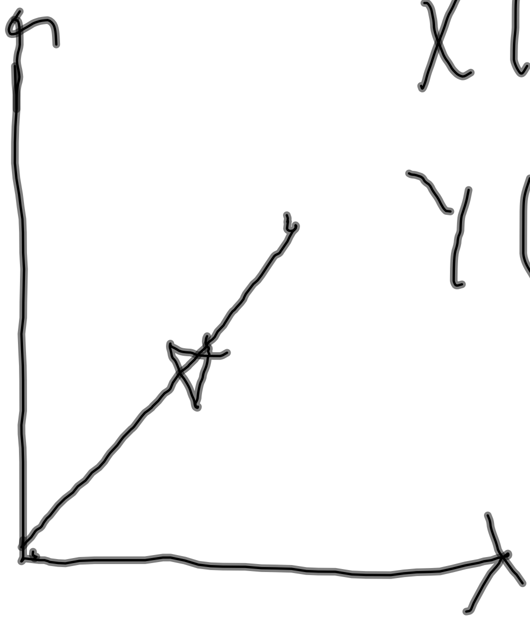
$$\int_{\gamma_1} P\,dx + Q\,dy =$$

$$= \int_{\gamma_2} P\,dx + Q\,dy \quad ?$$

maj 2-11:35

Ex Vi har punkterna $(0,0)$ och $(1,1)$ och två kurvor mellan dem:

γ_1



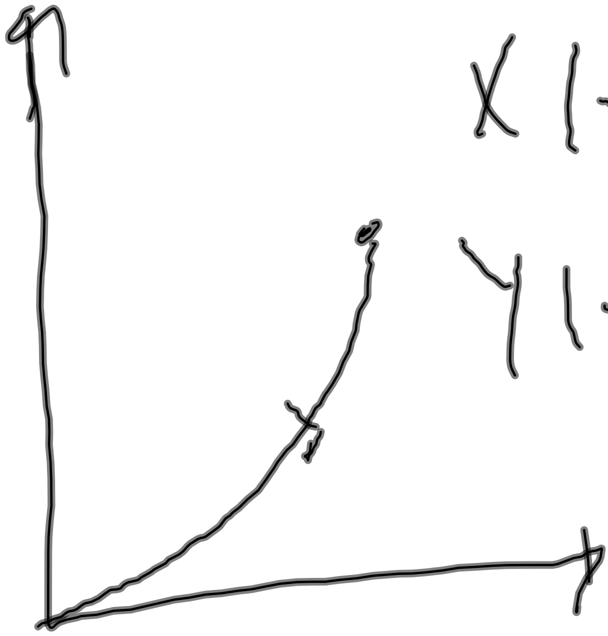
$x(t)=t$

$y(t)=t$

$0 \le t \le 1$

maj 2-11:36

γ_2



$x(t)=t$

$y(t)=t^2$

$0\leq t\leq 1$

Vi tar fältet

$\bar{F}=(xy,\, x-y)$

Beräkna $\int_{\gamma_1}$ och $\int_{\gamma_2}$

$$\int_{\gamma_1} P\,dx + Q\,dy =$$

$$= \int_0^1 \left((t \cdot t \cdot 1 + (t - t) \cdot 1) \right) dt$$

$$= \int_0^1 t^2\,dt = \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

maj 2-11:38

$$\int_{\gamma_2} P\,dx + Q\,dy =$$

$$\int_0^1 \left(t \cdot t^2 \cdot 1 + (t - t^2) \cdot 2t \right) dt$$

$$= \int_0^1 (2t^2 - t^3)\,dt = \left[\frac{2t^3}{3} - \frac{t^4}{4} \right]_0^1 = \frac{5}{12}$$

Olika resultat alltså.

Antag att vi har ett enkelt sammanhängande område D och ett vektorfält (P, Q).

Följande tre saker

betyder samma sak.

1. $\bar{F}$ har en potential

2. $\int_{\gamma_1} P\,dx + Q\,dy$

$= \int_{\gamma_2} P\,dx + Q\,dy$

maj 2-11:45

för alla vägar γ_1, γ_2

som går mellan

samma punkter

3. $$\oint_\gamma P\,dx + Q\,dy = 0$$

för varje sluten kurva γ.

maj 2-11:45