Anmäl er till tentan!

Idag: Greens formel.

Vi har sett att

ibland gäller

$$\oint_\gamma P\,dx + Q\,dy = 0$$

Om (P, Q) är

genererad av en

maj 3-13:03

potential så gäller

$$\oint_\gamma P\,dx + Q\,dy = 0$$

För alla enkla slutna kurvor.

maj 3-13:04

Greens formel

Antag att γ är en parametriserad kurva som är sluten, enkel och positivt orienterad.

Antag att D är

området som γ

omsluter och att

(P, Q) är ett vektor-

fält med deriverbara

funktioner i D.

maj 3-13:07

Då gäller

$$\oint_\gamma P\,dx + Q\,dy =$$

$$= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

Obs: Om $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$

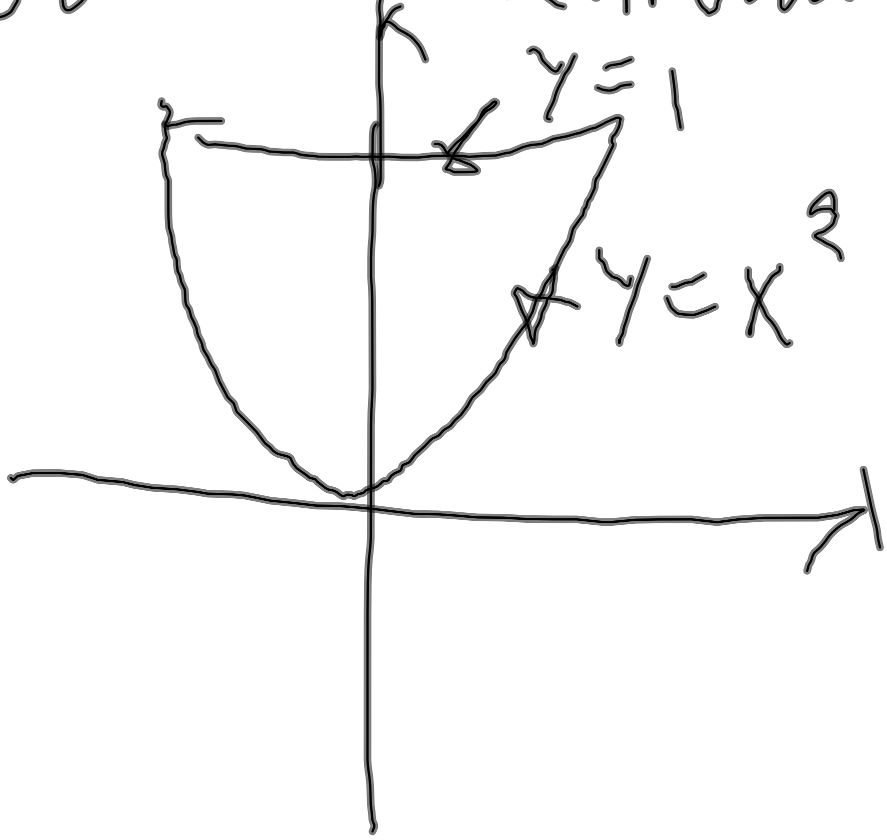
så gäller alltså

$$\oint_{\gamma} P\,dx + Q\,dy = 0$$

Ex

Sätt $(P, Q) = (x^2 y, x+1)$

och ta kurvan γ

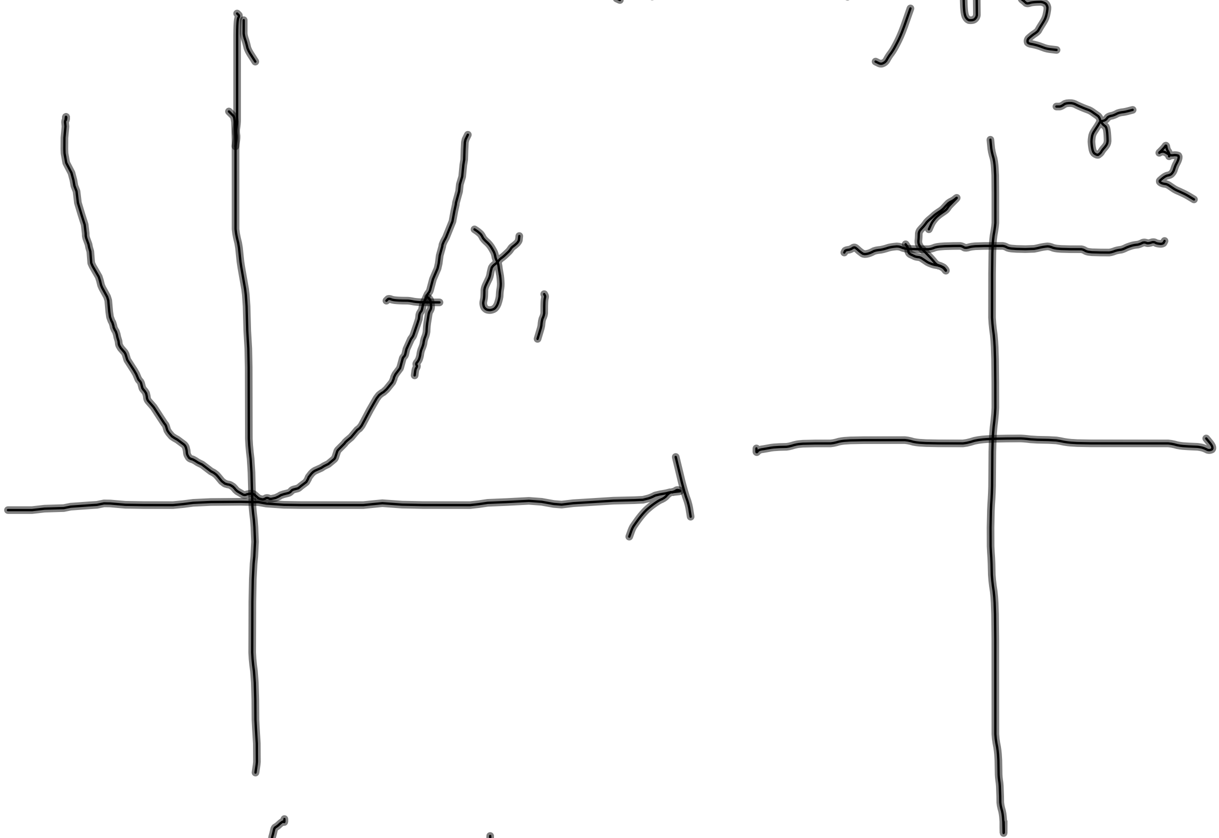


Vi beräknar

$$\oint_\gamma P\,dx + Q\,dy$$

1. Genom parametrisering och vanlig kurvintegration.

Vi delar upp kurvan i två delar γ_1, γ_2



$$\gamma_1 : \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases} \quad -1 \le t \le 1$$

maj 3-13:13

$\gamma_2: \begin{cases} x = t \\ y = 1 \end{cases}$ t går från 1 till -1,

$$\int_{\gamma_1} P\,dx + Q\,dy =$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(1t^2 \cdot t^2 \cdot 1 + (t+t^3)\,2t \right) dt$$

$$= \int_{-1}^{1} (t^4 + 2t^3 + 2t^2)\,dt$$

$$= \left[\frac{t^5}{5} + \frac{2t^4}{4} + \frac{2t^3}{3} \right]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{1}{5} + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{2}{3}$$

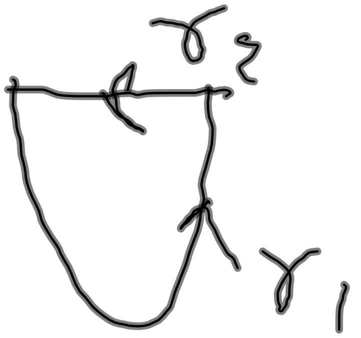
$$= \frac{2}{5} + \frac{4}{3} = \frac{26}{15}$$

$$\int_{\gamma_1} P\,dx + Q\,dy$$

$$= \int_{1}^{-1} \left(t^2 \cdot 1 + (t+1)\cdot 0 \right) dt$$

$$= \int_{1}^{-1} t^2\,dt = \left[\frac{t^3}{3} \right]_{1}^{-1}$$

$$= -\frac{1}{3} - \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}$$



$$\oint_{\gamma} P\,dx + Q\,dy =$$

$$= \int_{\gamma_1} P\,dx + Q\,dy$$

$$+ \int_{\gamma_2} P\,dx + Q\,dy$$

maj 3-13:21

$$= \frac{26}{15} - \frac{2}{3} = \frac{16}{15}$$

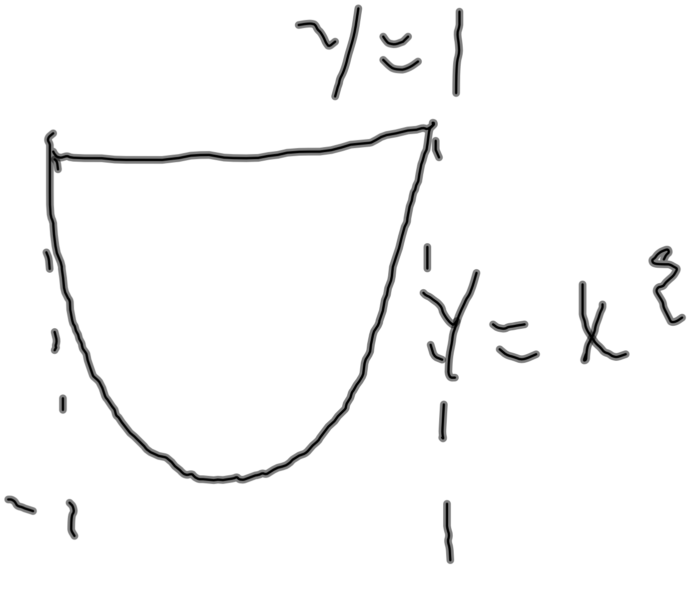
2. Vi använder nu Greens formel

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1 - x^2$$

maj 3-13:22

Vi beräknar

$$\iint_D (1-x^2)\,dx\,dy$$



maj 3-13:24

$$I = \int_{-1}^{1} \int_{x^2}^{1} (1-x^2)\,dy\,dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \Big[(1-x^2)y \Big]_{x^2}^{1} dx$$

$$= \int_{-1}^{1} (1 - 2x^2 + x^4)\,dx$$

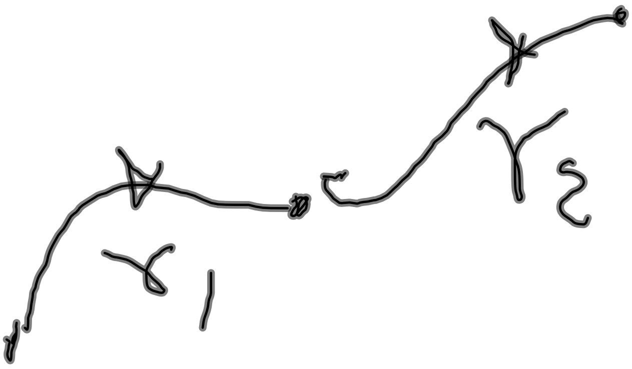
$$= \left[x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^5}{5} \right]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{16}{15}$$

maj 3-13:26

Lite notation:

Om vi har två kurvor så att



γ_1 slutar i γ_2:s startpunkt så kan vi bilda en ny kurva

$\gamma_3 = \gamma_1 + \gamma_2$

som är kurvorna "efter varandra"

Då gäller

$$\int_{\gamma_3} P\,dx + Q\,dy =$$

$$= \int_{\gamma_1} P\,dx + Q\,dy + \int_{\gamma_2} P\,dx + Q\,dy$$

Om γ är en kurva så låter

maj 3-13:29

Vi -γ vara kurvan

med omvänd riktning

Så om γ: x(t)

y(t)

och t går från

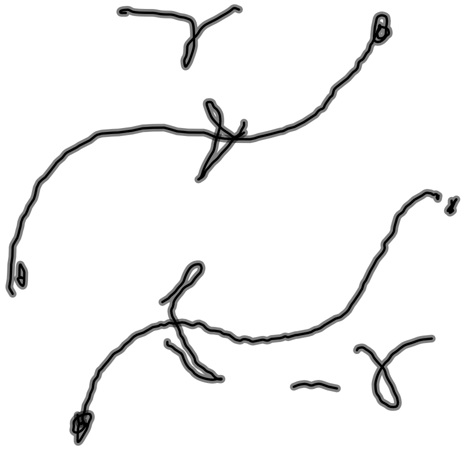
a till b

Så är -γ: x(t)

y(t)

maj 3-13:29

och t går från b till a.



Då gäller

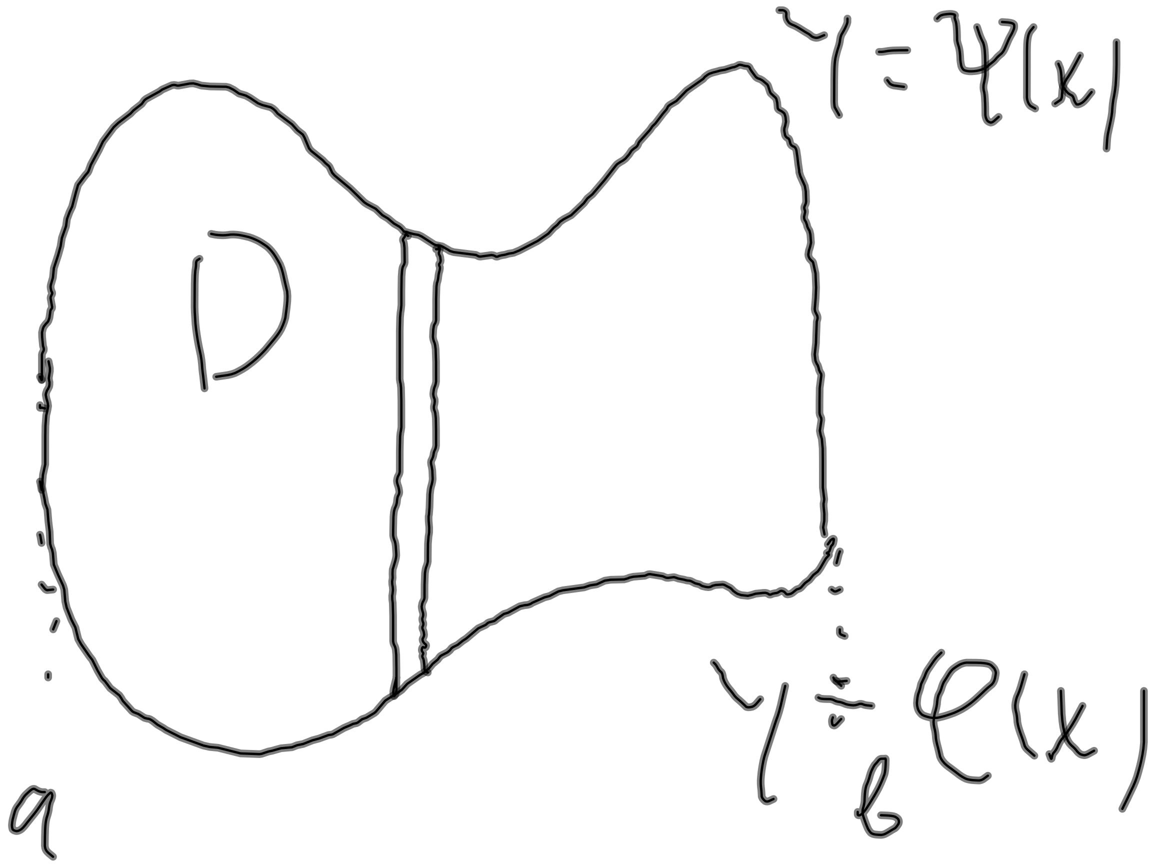
$$\int_{-\gamma} P\,dx + Q\,dy = -\int_{\gamma} P\,dx + Q\,dy$$

Bevisskiss för Greens formel:

Vi tänker oss att D begränsas av två funktioner

$y = \varphi(x)$ (golv)

$y = \psi(x)$ (tak)



Vi säger att D har "enkel golv/tak-form" i x-led.

Vi tittar nu på integralen

$$\iint_D \left(-\frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

Vi beräknar den som vanligt.

maj 3-13:35

För ett visst x

integrerar vi i y-led

$$\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \left(-\frac{\partial P}{\partial y}\right) dy =$$

$$= \Big[-P\Big]_{\varphi(x)}^{\psi(x)} =$$

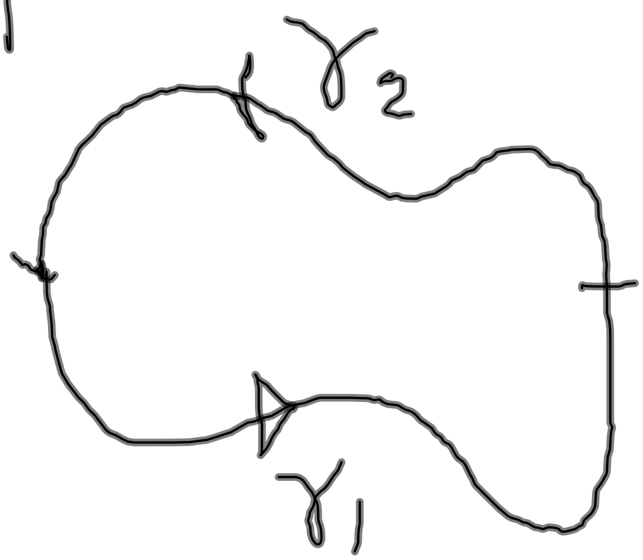
maj 3-13:36

$= P(x, \varphi(x)) - P(x, \psi(x))$

Detta skall vi

integrera i x-led

från a till b



maj 3-13:37

$$\int_a^b P(x, e(x))\,dx$$

blir samma sak som

$$\int_{\gamma_1} P\,dx$$

På samma sätt blir

maj 3-13:38

$$-\int_a^b P(x,\psi(x))\,dx$$

$$=\int_b^a P(x,\psi(x))\,dx$$

$$=\int_{\gamma_2} P\,dx$$

Det ger att

$$\iint_D \left(-\frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy =$$

$$= \oint_\gamma P\,dx$$

På samma sätt kan vi visa att

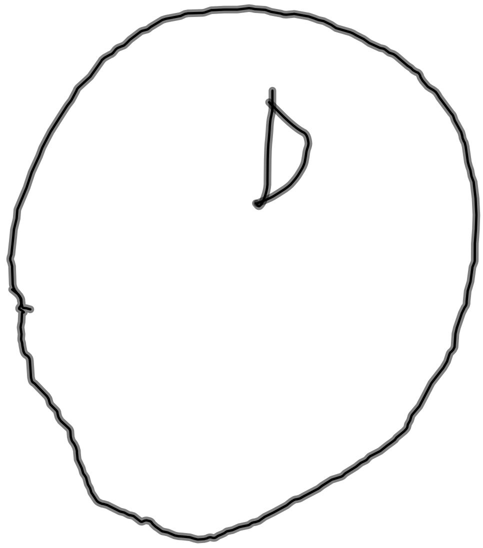
$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy =$$

$$= \oint_\gamma Q\,dy$$

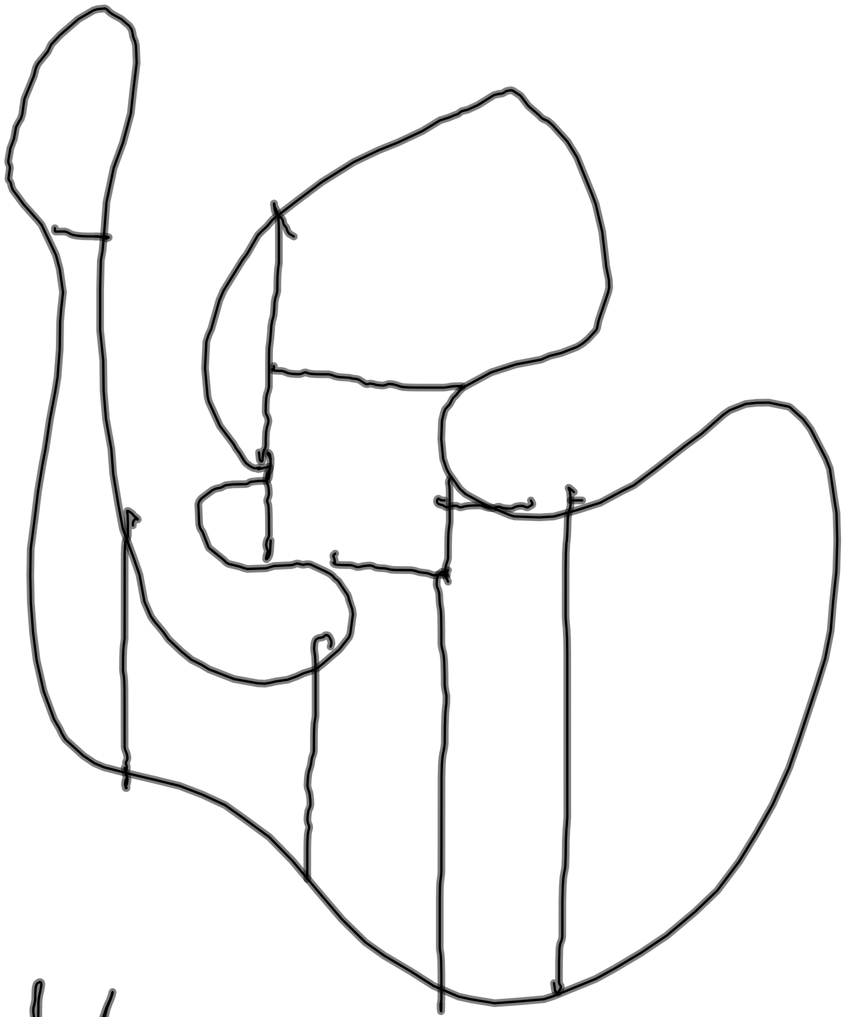
Om vi sätter ihop resultaten får vi

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \oint_\gamma P\,dx + Q\,dy$$

Detta bevis bygger på att området har enkel form både i x-led och y-led t.ex



Men inte som



Men ett komplicerat område kan delas upp i enklare delar.

Beviset kan användas på dem och resultaten adderas.

Så det går att bevisa.

maj 3-13:43

Några "räknetrick"

med Greens formel

1. Vi kan slippa integrera över en sluten kurva (och få en dubbel-

maj 3-14:02

integral istället.)

Ex: $\oint_\gamma (x^3 - x^2 y)\,dx + xy^2\,dy$

där γ är enhets-cirkel i positiv led.

maj 3-14:04

Vi testar Greens formel

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = y^2 + x^2$$

$$\oint_\gamma P\,dx + Q\,dy = \iint_C (x^2+y^2)\,dxdy$$

maj 3-14:06

Använd nu polära koordinater

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2 \cdot r\,dr\,d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 d\varphi =$$

maj 3-14:07

$$= \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

---

2. Vi kan ibland ersätta en krånglig väg med en enklare väg.

maj 3-14:08

Ex:

$$\int_{\gamma} \left(2x \arctan y \, dx + \frac{x^2+1}{y^2+1} \, dy \right)$$

över högra halvan av $x^2+y^2=y$

från (0,0) till (0,1)

$x^2 + y^2 = y$ kan

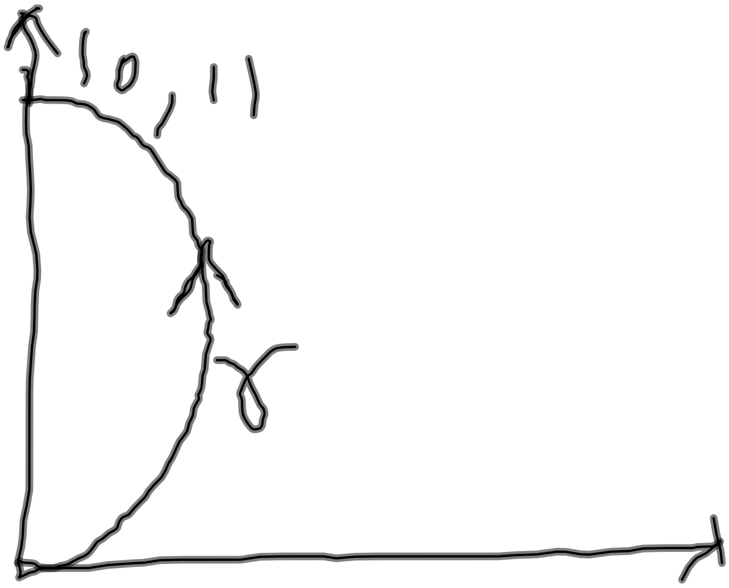
kvadratkompletteras

$$x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Cirkel med radie $\frac{1}{2}$

och centrum i $(0, 1/2)$

maj 3-14:11



Vi testar att beräkna

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{2x}{1+y^2} - \frac{2x}{1+y^2}$$

$$= 0$$

maj 3-14:12

Det betyder att om vi har en sluten kurva i två delar

så gäller $\displaystyle\oint_{\gamma_1+\gamma_2} P\,dx + Q\,dy = 0$

Det ger $\int_{\gamma_1} P\,dx + Q\,dy$

$= - \int_{\gamma_2} P\,dx + Q\,dy$

$= \int_{-\gamma_2} P\,dx + Q\,dy$

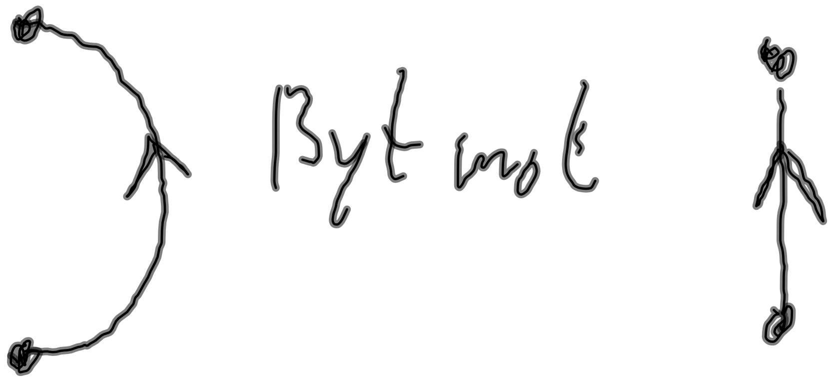
maj 3-14:17

Så $$\int_{\gamma_1} P\,dx + Q\,dy$$

$$= \int_{-\gamma_2} P\,dx + Q\,dy$$

Varje väg γ_1 mellan två punkter kan bytas mot en enklare väg mellan samma punkter.

I vårt fall:



Så vår integral

blir istället

$$\int_{\gamma'} (2x \arctan y)\,dx + \frac{1+x^2}{1+y^2}\,dy$$

där γ' ges av $\begin{array}{l} x(t) = 0 \\ y(t) = t \\ 0 \le t \le 1 \end{array}$

maj 3-14:20

Eftersom $x'(t) = 0$
$y'(t) = 1$

får vi

$$I = \int_0^1 Q \, dt$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} \, dt =$$

maj 3-14:21

$$= \Big[\arctan t\Big]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

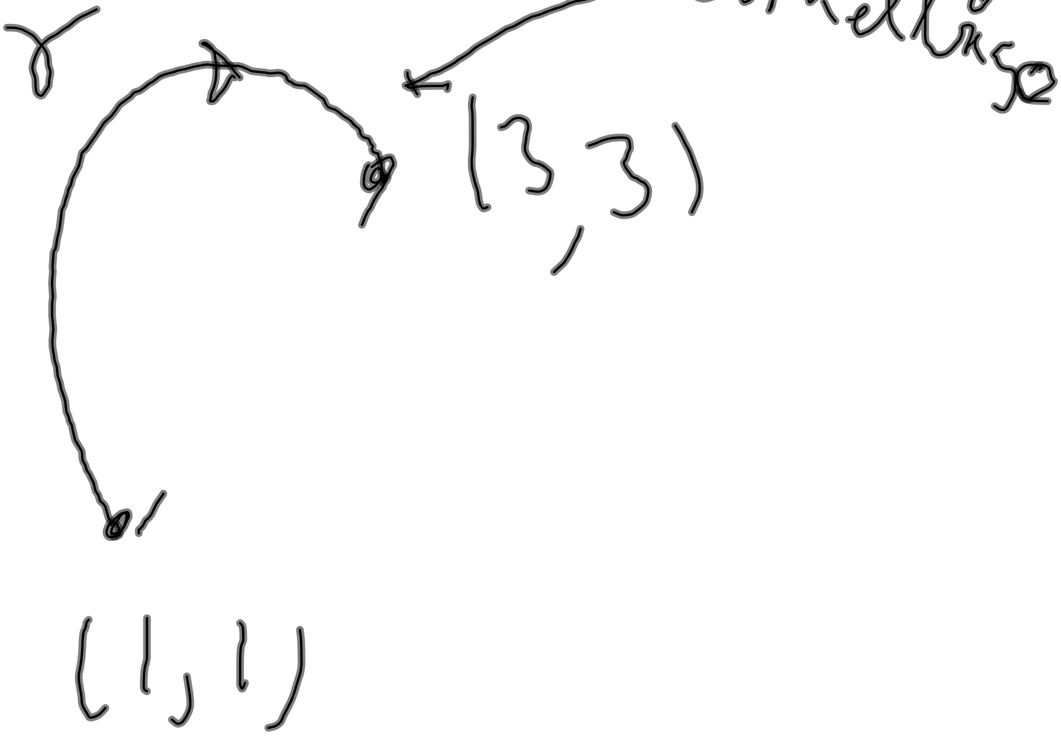
Ett likenande exempel

$$\int \left(\frac{1}{x}\arctan\frac{y}{x} - y\right)dx$$

$$\gamma \quad + \left(\frac{1}{y}\arctan\frac{x}{y} + x\right)dy$$

maj 3-14:22

där γ är



Vi behöver att beräkna

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1 + \frac{1}{y} \cdot \frac{1/y}{1 + \frac{x^2}{y^2}}$$

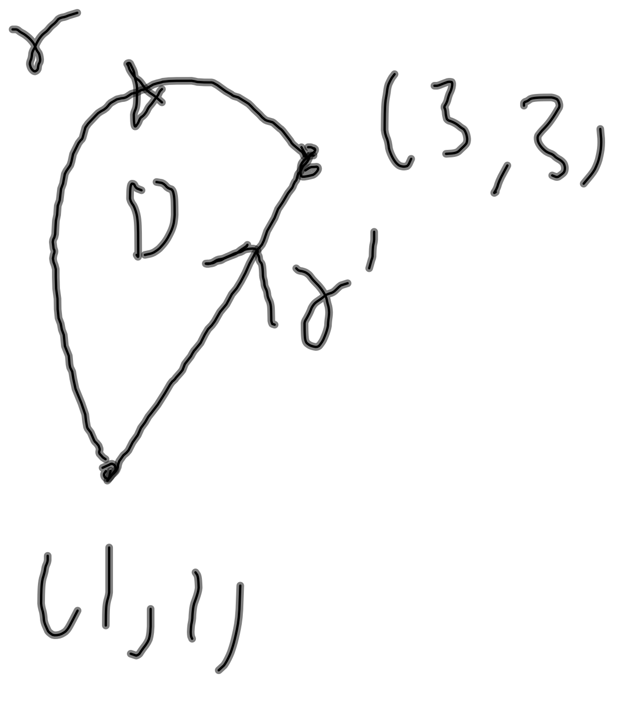
maj 3-14:24

$$-\frac{1}{x}\frac{y/x}{1+\frac{y^2}{x^2}}+1$$

$$=2+\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{1}{x^2+y^2}=2$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=2$$

Men bilda nu en ny kurva γ'



Greens formel ger

$$\int_{\gamma'} Pdx+Qdy + \int_{-\gamma} Pdx+Qdy =$$

$$= \iint_D 2\,dx\,dy = 2 \cdot \text{halv-}$$

cirkelns area $= 2\frac{\pi}{2} = \pi$

Så $\int_\gamma P\,dx + Q\,dy$

$$= \int_{\gamma'} P\,dx + Q\,dy - \pi$$

maj 3-14:29

Testa nu att beräkna

$$\int_{\gamma'} P\,dx + Q\,dy$$

(Det kanske blir enkelt!)

$$\gamma' : \begin{array}{l} x(t) = t \quad 1 \le t \le 3 \\ y(t) = t \end{array}$$

maj 3-14:32

$$P(x,y) = \frac{1}{t} \arctan \frac{t}{t} - t$$

$$= \frac{1}{t} \frac{\pi}{4} - t$$

$$Q(x,y) = \frac{1}{t} \arctan \frac{t}{t} + t$$

$$\frac{1}{t} \frac{\pi}{4} + t$$

maj 3-14:33

$$I = \int_1^3 \left(\frac{1}{t}\frac{\pi}{4} - t + \frac{1}{t}\frac{\pi}{4} + t\right)dt$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_1^3 \frac{dt}{t} = \frac{\pi}{2}\Big[\ln|t|\Big]_1^3$$

$$= \frac{\pi}{2}\ln 3$$

maj 3-14:34

$$\int_{\gamma} P\,dx + Q\,dy =$$

$$= \frac{\pi}{2} \ln 3 - \pi$$

En generalisering av Greens formel

Det kan hända att (P, Q) inte existerar överallt.

Antag att vi har ett område D

där γ_1 är en yttre och γ_2 en inre randkurva.

Antag att $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$

i hela D (men kanske inte i hela planet)

Då gäller

$$\int_{\gamma_1} P\,dx + Q\,dy + \int_{-\gamma_2} P\,dx + Q\,dy = 0$$

maj 3-14:38

d.v.s.

$$\int_{\gamma_1} P\,dx + Q\,dy = \int_{\gamma_2} P\,dx + Q\,dy$$

maj 3-14:40

Samband med potential.

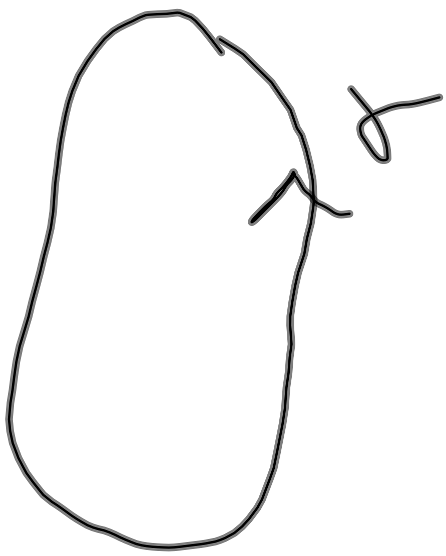
Antag att $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$

överallt.

Då är $\oint_\gamma P\,dx + Q\,dy = 0$

maj 3-14:41

För alla enkla, slutna kurvor



Då ger varje kurva mellan två givna punkter $\bar{r}_1, \bar{r}_2$ samma värde på kurvintegralen

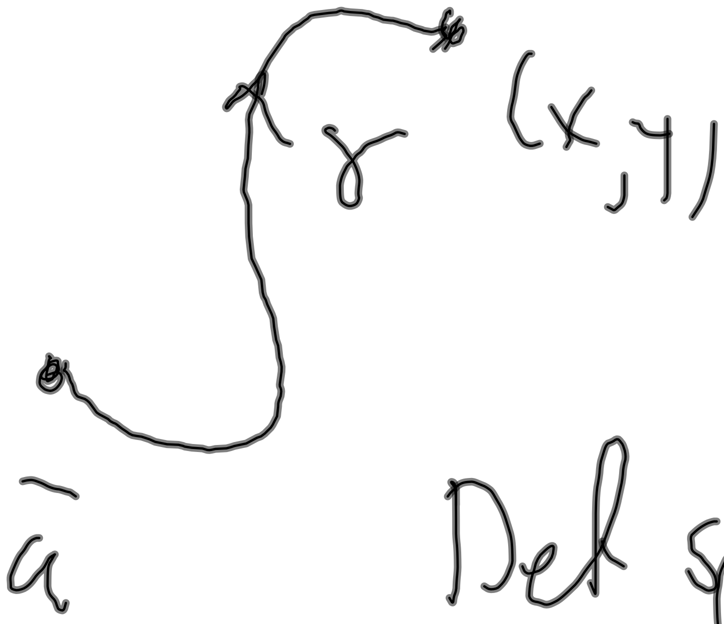
Om vi då väljer en startpunkt

$\bar{a}$ kan vi definiera en funktion $U(x,y)$ genom att sätta

$$U(x,y) = \int_{\gamma} P\,dx + Q\,dy$$

där γ är någon kurva från $\bar{a}$ till (x,y)

maj 3-14:44



Det spelar ingen roll vilken kurva γ vi väljer.

$U(x,y)$ blir en potential till (P,Q).