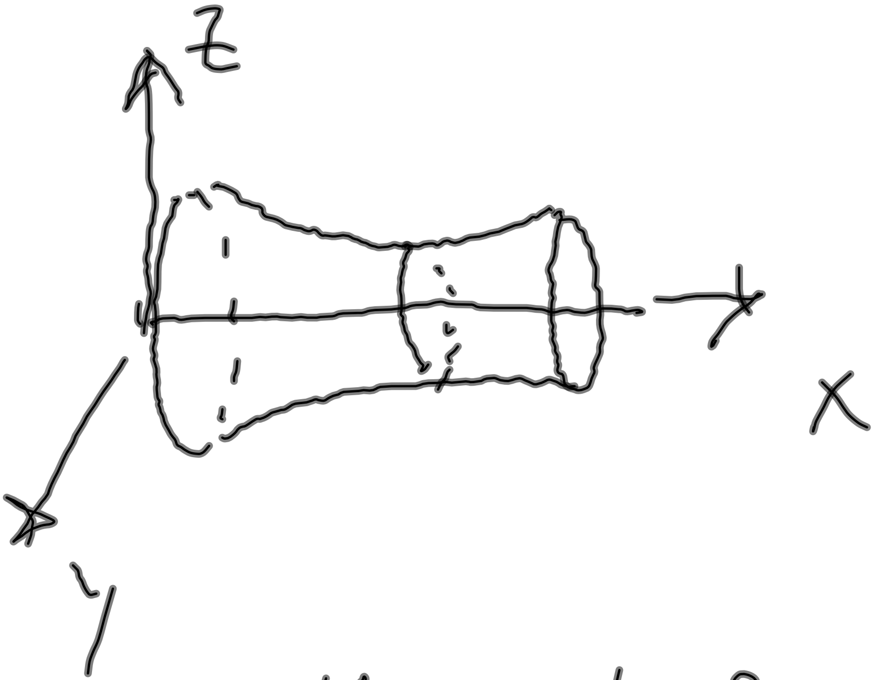
F18

Antag att vi har en kropp som är rotationssymmetrisk kring x-axeln.

maj 6-07:59



Ett snitt vinkelrätt mot x-axeln är alltid en cirkel.
Låt oss anta att:

XY-planet ges "radien"

av $Y = f(x)$.

Då gäller

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$$

Ex Om vi har

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

Ger en ellipsoid som är symmetrisk kring x-axeln.

maj 6-08:05

Vi kan sätta

$$f(x) = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

I x-led sträcker sig ellipsoiden från -a till a. Maximala "radien" är b.

maj 6-08:06

$$V = \pi \int_{-a}^{a} b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx$$

$$= 2\pi \int_{0}^{a} b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx$$

$$= 2\pi \left[b^2 x - \frac{b^2 x^3}{3a^2} \right]_0^a$$

$$=$$

$$= 2\pi\left(b^2a - \frac{b^2a}{3}\right)$$

$$= 2\pi\left(\frac{2b^2a}{3}\right) =$$

$$= \frac{4\pi}{3} b^2 a$$

maj 6-08:12

Areaberäkning

Vi har en yta given.
Vi vill beräkna
arean. Vi ser på
3 fall:

1. Ytan ges av $z = f(x,y)$
2. Ytan ges av
   $f(x,y,z) = C$

maj 6-08:13

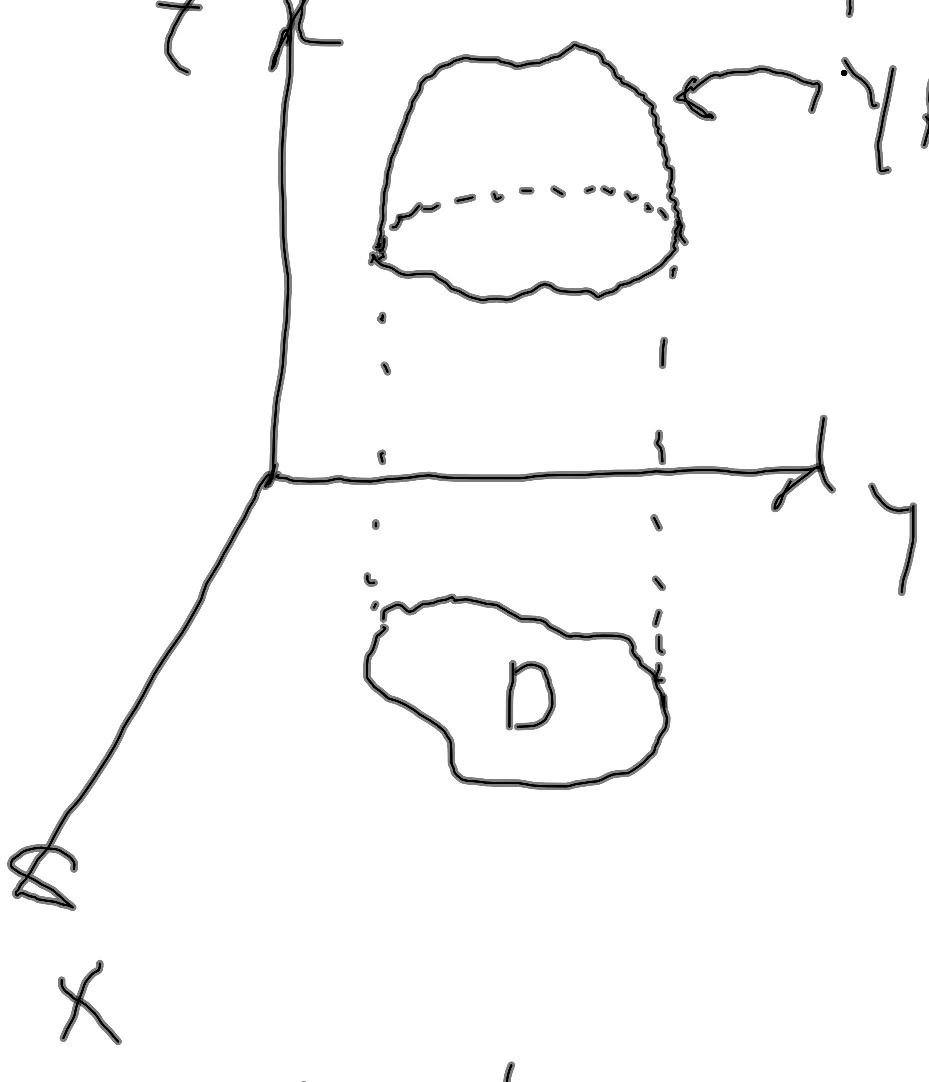
3. Ytan ges på parameterform.

Vi ser på fall 1 först.

Antag att vi har en yta som ges av $z = f(x,y)$ över ett

maj 6-08:14

område D i xy-planet.



Hur beräknar vi

arean av ytan?

Gissning: Det finns troligen någon funktion $g(x,y)$ så att

$$A = \iint_D g(x,y)\,dx\,dy$$

Vad skall g vara?

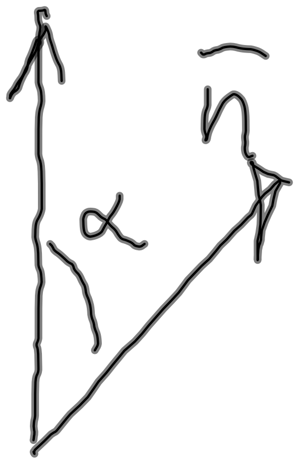
maj 6-08:17

Ett enkelt fall

Vi har ett rätt block med en bottenplatta med area A'. Vad är arean för det sneda locket?

maj 6-08:18

Låt α vara vinkeln mellan $\bar{n}$ och z-axeln



Om $\alpha = 0$

får vi $A = A'$

Ju större α är, ju större blir A.

Sambandet är

$$\frac{A'}{A} = \cos\alpha$$

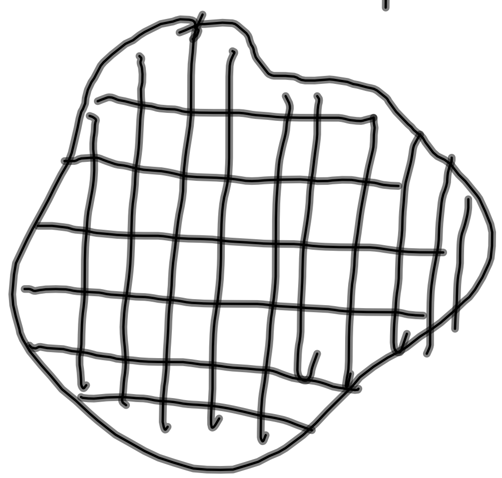
$$A = \frac{1}{\cos\alpha} A'$$

Om vi har D

och delar in i

små kvadrater

D



så har varje kvadrat

en area $\Delta x \Delta y$

Om α är vinkeln mellan

normalen och z-axeln

för området som ges av

kvadraten så motsvaras

Kvadraten av en area

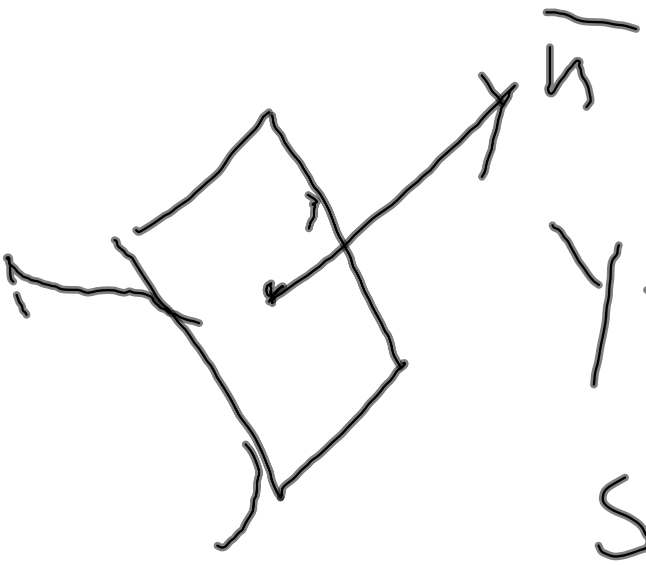
$\frac{1}{\cos\alpha}\Delta x\Delta y$ på ytan.

Så $A = \iint_D \frac{1}{\cos\alpha}\,dx\,dy$

Men vi måste hitta $\frac{1}{\cos\alpha}$ som funktion av

maj 6-08:24

x och y. (D.v.s. $g(x,y)$)



Ytan kan skrivas som

$$z - f(x,y) = 0$$

Gradienten ges av

$$\left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, +1\right)$$

maj 6-08:25

$\cos\alpha$ är z-komponenten av den normerade gradienten.

$$\bar{n} = \frac{\left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}$$

maj 6-08:27

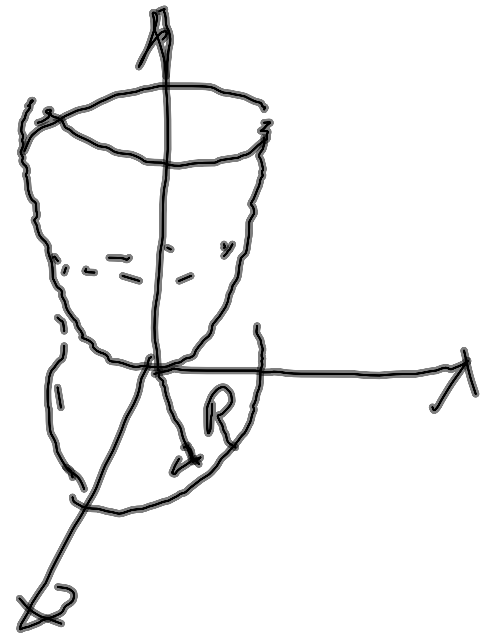
z-komponenten är

$$\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}$$

Så $\frac{1}{\cos\alpha} = \sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$

$$A = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy$$

Ex: Beräkna arean av paraboloiden $z = x^2 + y^2$ som begränsas av $x^2 + y^2 \leq R^2$



I det här fallet

är $f(x,y) = x^2 + y^2$

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} =$$

maj 6-08:32

$$= \sqrt{1+4x^2+4y^2}$$

$$A = \iint_C \sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dx\,dy$$

Vi använder polära koordinater.

$$A = \int_0^{2\pi} \int_0^R \sqrt{1+4r^2}\, r\, dr\, d\alpha$$

$$= 2\pi \int_0^R \sqrt{1+4r^2}\, r\, dr$$

$$= 2\pi \left[\frac{1}{12} \left(1+4r^2\right)^{3/2} \right]_0^R$$

maj 6-08:35

$$= \frac{\pi}{6}\left((1+4R^2)^{3/2} - 1 \right)$$

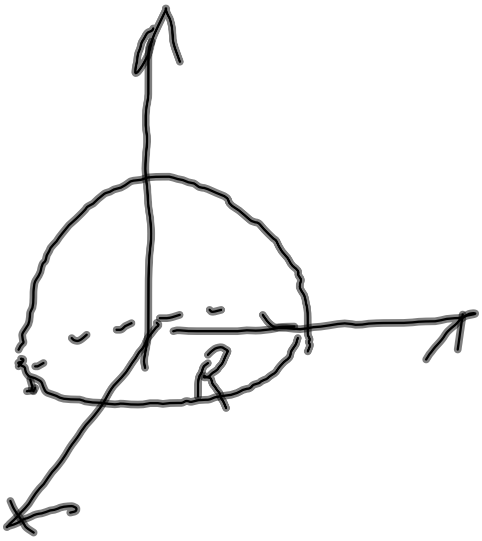
Vi testar att

beräkna arean av

ett klot med denna

metod.

maj 6-08:37



$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

$$f(x,y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$$

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{R^2-x^2-y^2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{R^2-x^2-y^2+x^2+y^2}{R^2-x^2-y^2}}=$$

maj 6-08:40

$$= \sqrt{\frac{R^2}{R^2 - x^2 - y^2}} =$$

$$= R \sqrt{\frac{1}{R^2 - x^2 - y^2}}$$

$$A = 2R \iint\limits_{C} \sqrt{\frac{1}{R^2 - x^2 - y^2}}\, dx\, dy$$

maj 6-08:41

Polära koordinater

$$A = 2R \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{r}{\sqrt{R^2 - r^2}} \, dr$$

$$= 4\pi R \left[-\sqrt{R^2 - r^2} \right]_0^R$$

$$= 4\pi R^2$$

Yta på implicit form

Antag att vi har

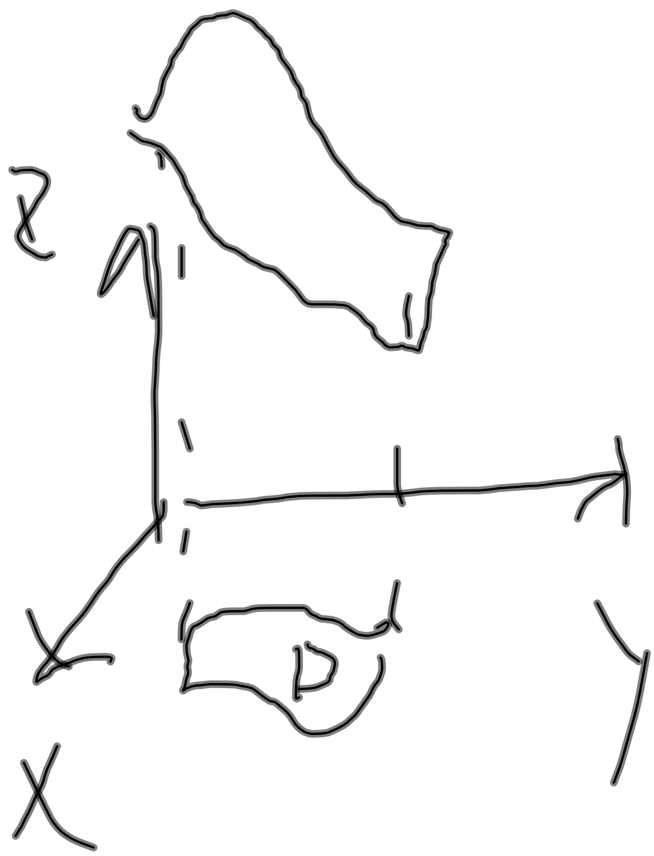
en yta given av

$f(x,y,z) = C$

Vi kan då projicera

maj 6-09:01

på XY-planet



Precis som tidigare

är $A = \iint_D \frac{1}{\cos\alpha}\,dx\,dy$

maj 6-09:02

Men vad blir

$$\frac{1}{\cos\alpha} \text{ nu?}$$

$$\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

Normerade gradienten

är
$$\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}$$

Vi vill a z-komponenten.

Den är

$$\frac{\dfrac{\partial f}{\partial z}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}$$

Vid areaberäkning skall vi hela tiden

ha positiva bidrag.

Om $\frac{\partial f}{\partial z}$ är negativ

måste vi byta mot

$\left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|$.

Det ger

maj 6-09:05

$$\frac{1}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}{\left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|}$$

$$A = \iint_D \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}{\left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|} \, dx\,dy$$

<u>Obs:</u> Areor är alltid positiva.

Ytor <u>givna på parameterform</u>

Antag att en yta

är parametriserad

med två parametrar

s, t så att

$$\bar{r}(s,t) = \big(x(s,t), y(s,t), z(s,t)\big)$$

maj 6-09:09

Vi kan ställa upp två tangentvektorer till ytan.

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial s} = \left(\frac{\partial x}{\partial s}, \frac{\partial y}{\partial s}, \frac{\partial z}{\partial s} \right)$$

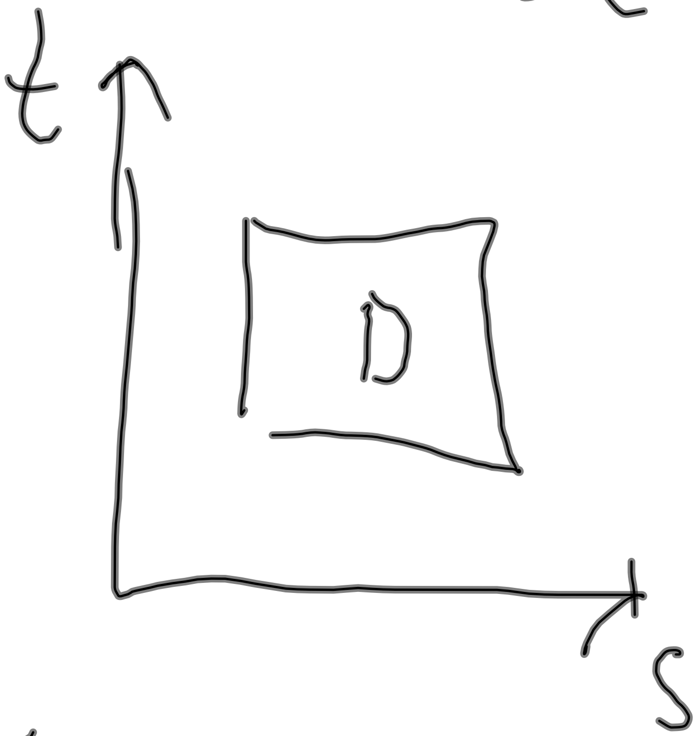
$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial t} = \left(\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial t} \right)$$

tangentplan

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial s}, \frac{\partial \bar{r}}{\partial t} \text{ bildar}$$

ett tangentplan

Ytan motsvaras av ett område D i st-planet



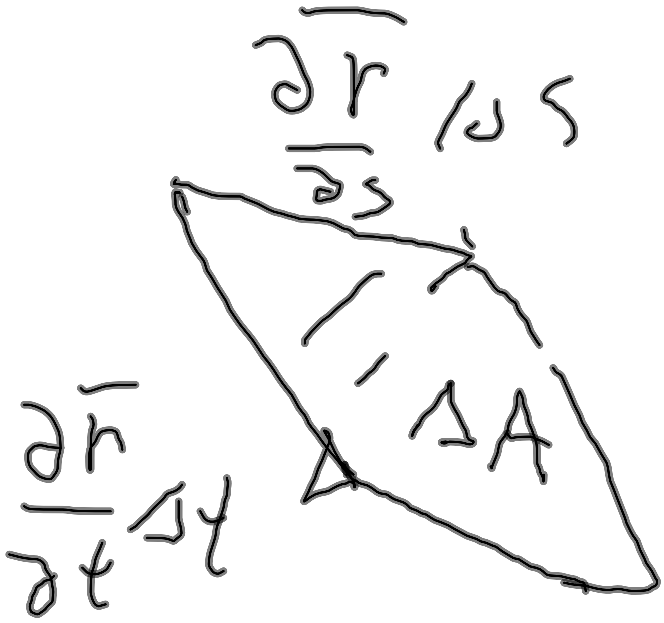
Obs: Det finns inget enkelt samband mellan

D i st-planet och kurvan i XYZ-rummet. Om vi gör en liten ändring Δs, Δt i st-planet så genererar den liten del av ett tangentplan och då också en liten area.

Vi har de små ändringarna

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial s}\Delta s, \quad \frac{\partial \bar{r}}{\partial t}\Delta t \quad \text{i } \mathbb{R}^3.$$

maj 6-09:17



Vad är då ΔA

Från linjär algebra

får vi att

$$\Delta A = \left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial t} \right| \Delta s \Delta t$$

När $\Delta s, \Delta t$ blir

oändligt små får

vi

$$dA = \left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial t} \right| ds\,dt$$

Det ser

maj 6-09:20

$$A = \iint_D \left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial t} \right| ds\,dt$$

<u>Ex</u> 8.17 i övningsboken

En torus ges av

maj 6-09:21

$$\begin{cases} x = (2-\cos t)\cos s \\ y = (2-\cos t)\sin s \\ z = \sin t \end{cases}$$

$-\pi \leq s \leq \pi$, $-\pi \leq t \leq \pi$

Beräkna arean.

maj 6-09:23

Vi undersöker först
med son händer

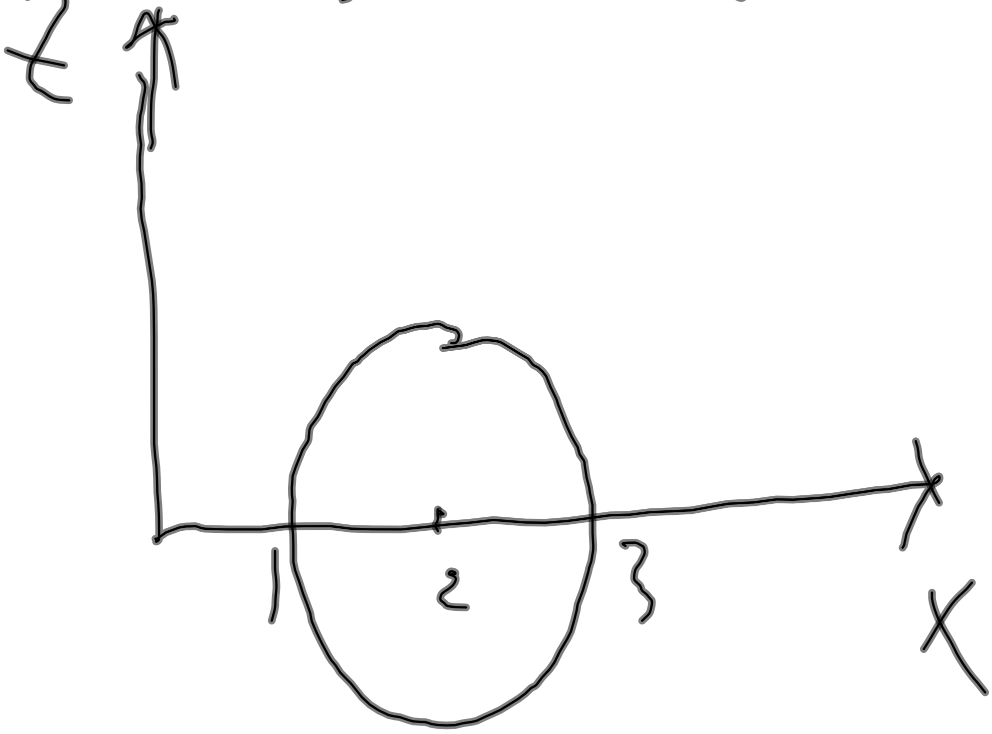
Om vi sätter $s=0$

får vi

$$\begin{cases} x = 2 - \cos t \\ y = 0 \\ z = \sin t \end{cases}$$

maj 6-09:24

I xz-planet ser det



När s varierar

"sveper" vi runt.

Nu till själva

areaberäkningen.

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial s} = \begin{pmatrix} -(2-\cos t)\sin s, \\ (2-\cos t)\cos s, \\ 0 \end{pmatrix}$$

maj 6-09:27

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial t} = (\sin t \cos s, \sin t \sin s, \cos t)$$

Vi skall nu beräkna

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial t}.$$

Det blir

maj 6-09:28

$$\begin{vmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ -(2-\cos t)\sin s & (2-\cos t)\cos s & 0 \\ \sin t\cos s & \sin t\sin s & \cos t \end{vmatrix}$$

$$= (2-\cos t)\cdot \begin{vmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ \sin s & \cos s & 0 \\ \sin t\cos s & \sin t\sin s & \cos t \end{vmatrix}$$

maj 6-09:29

$$= (2-\cos t)\cdot\left[\cos s\cdot\cos t,\ -\sin s\cos t,\ -\sin^2 s\sin t - \cos^2 s\sin t\right]$$

$$= (2-\cos t)\left[\cos s\cdot\cos t,\ -\sin s\cos t,\ -\sin t\right]$$

Nu beräknar vi

$$\left|\frac{\partial \bar{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial t}\right|$$ d.v.s.

beloppet på formen

beräkningen.

$$|2-\cos t| \cdot \sqrt{\cos^2 s \cos^2 t + \sin^2 s \cos^2 t + \sin^2 t}$$

maj 6-09:34

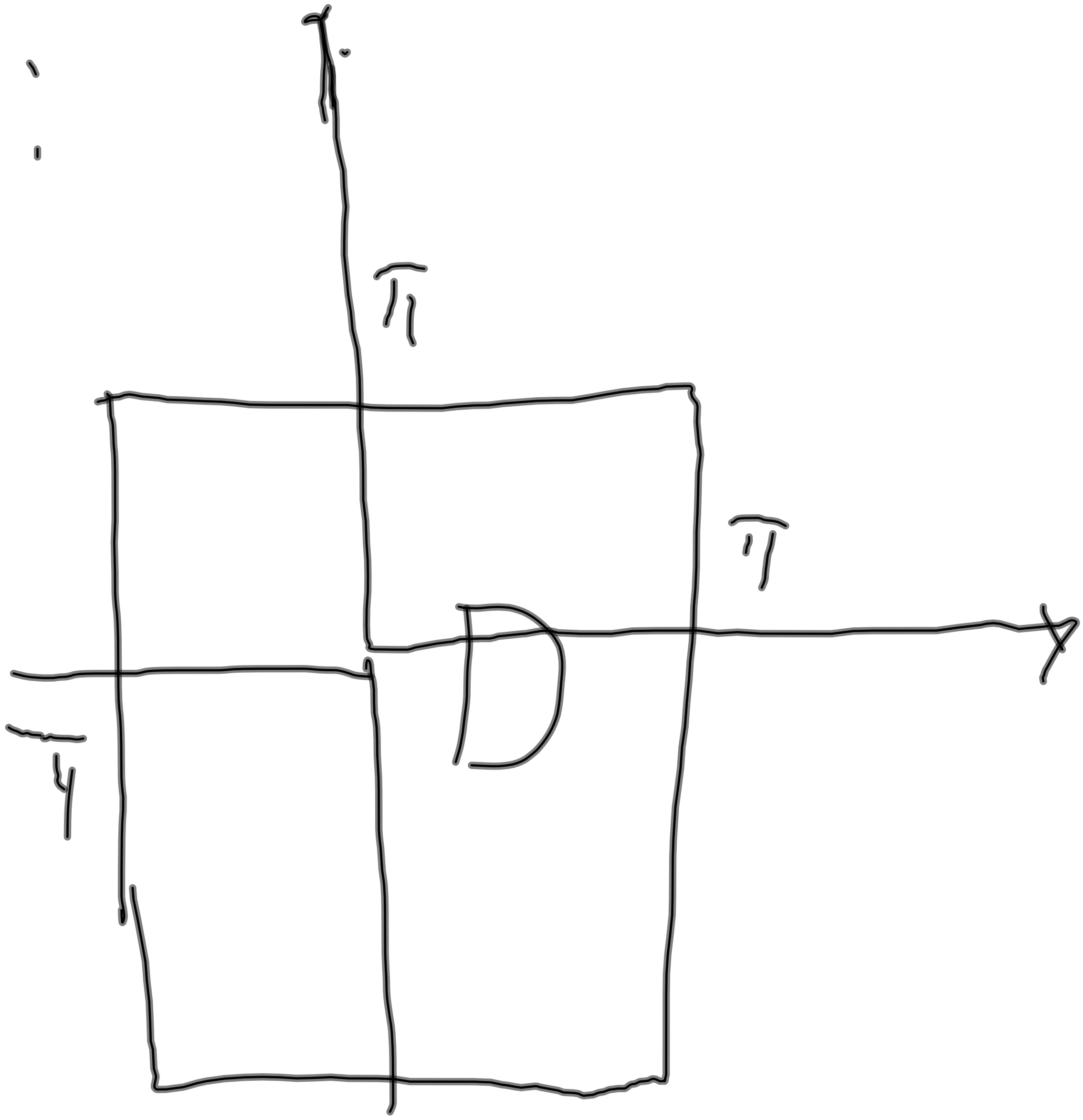
$$= |2\cdot\cos t|\cdot$$

$$\sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t}$$

$$= |2-\cos t| = 2-\cos t$$

$$A = \iint_D (2-\cos t)\,ds\,dt$$

D:



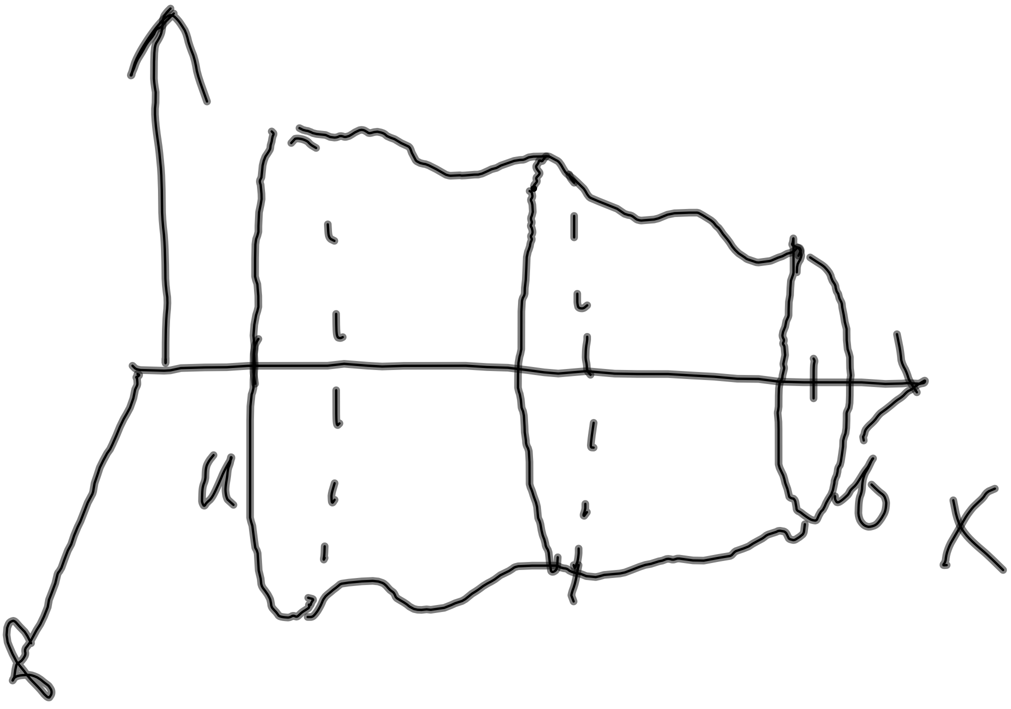
$$A = \int_{-\pi}^{\pi} ds \cdot \int_{-\pi}^{\pi} (2 - \cos t)\, dt =$$

$$= 2\pi \left[2t - \sin t \right]_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= 2\pi \cdot 4\pi = 8\pi^2 .$$

maj 6-09:38

Area av en rotationssymmetrisk yta.



Rotationssymmetri kring x-axeln.

Ytan brukar ibland

kallas för mantelyta

Antag att snittet

av ytan i xy-planet

ges av $y = f(x)$

($f(x)$ är "radien")

Då gäller

$$A = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

Bevisskiss:

Vi håller på xy-planet

maj 6-09:43

$$\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$