Vi har sett tre typer av integraler

1. Integraler över linjer (1-dim)

2. Integraler över ytor (2-dim)

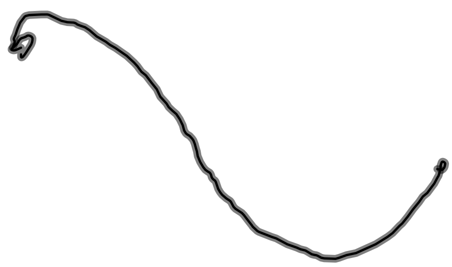
3. Integraler över kroppar (3-dim)

Den första typen (linje) finns i olika varianter

a. Vanliga integraler

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

b. Båglängdsberäkning



c. Kurvintegraler

$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy$$

Den andra typen (ytor) finns också i olika varianter

a. Vanlig dubbelintegral

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

maj 9-10:04

B. Beräkningar av
areor hos ytor.

C. Detta är nytt!
Vi har flödes-
integraler som är
en generalisering
av vanliga

maj 9-10:05

dubbelintegraler.

Vad är flöde?
Vi ser på ett
exempel:
Gauss och elektro-
statiskt flöde.

Vi ser på flöde
från en punktladdning

$$\bar{E} = CQ \frac{\bar{r}}{r^3}$$

Kan också skrivas

$$\bar{E} = CQ\left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{y}{(\;)}, \frac{z}{(\;)}\right)$$

maj 9-10:10

Storleken på $|\bar{E}|$ avtar kvadratiskt d.v.s. är proportionellt mot $\frac{1}{r^2}$

Ta ett klot med radie R. I varje punkt på ytan har $|\bar{E}|$ storleken $\frac{CQ}{R^2}$

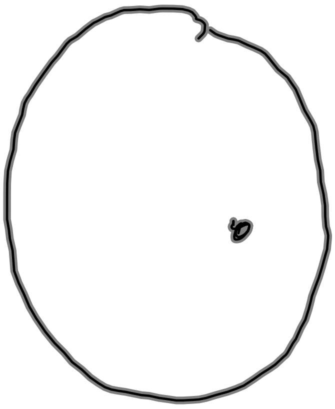
Vi kan beräkna totala flödet Φ av det elektriska fältet ut genom klotet.

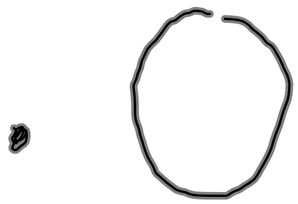
$$\Phi = |\vec{E}| \cdot \text{Arean} =$$

$$= \frac{CQ}{R^2} \cdot 4\pi R^2 = 4\pi CQ$$

Detta "flöde" är
tydligen oberoende
av R.
Gauss upptäckte
detta och några
liknande saker:

maj 9-10:16

1)  Även om laddningen inte är i mitten av klotet så gäller att $\Phi = 4\pi C Q$!

2)  Men om laddningen ligger utanför

klotet så är

$$\Phi = 0 \ !$$

Gauss sats visar

alla dessa saker.

Men vad är flöde

exakt?

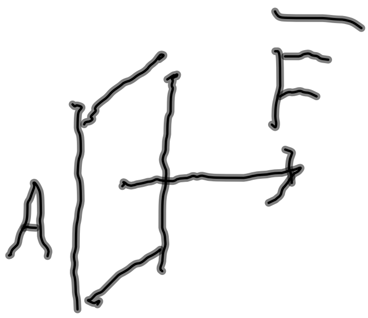
maj 9-10:19

Vi har ett vektorfält

$\bar{F} = (F_x, F_y, F_z)$

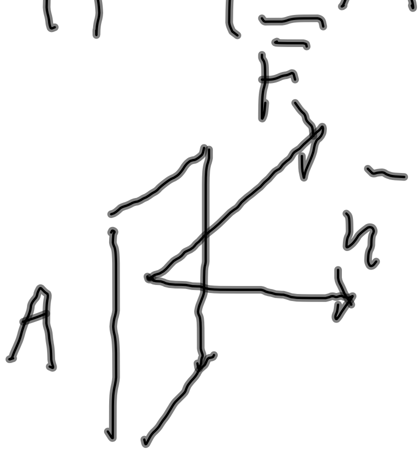
Om vi har ett litet ytelement kan vi definiera flöde lokalt.

maj 9-10:20



Om $\bar{F}$ är vinkelrät mot ytan så är flödet

$$|\bar{F}| \cdot A$$



Om $\bar{F}$ inte är parallell med $\bar{n}$

Säller vi att
flödet är
$\bar{F} \cdot \bar{n} A$
(Kan också skrivas som
$|\bar{F}| \cos\alpha A$ där α
är vinkeln mellan
$\bar{F}$ och $\bar{n}$.)

<u>Obs:</u> Om $\bar{F} \parallel \bar{n}$

så är $\bar{F} \cdot \bar{n} A = |\bar{F}| A$

Vi tänker oss nu

att vi har en yta $\bar{Y}$.

Låt oss anta att

vi har definierat

en normalriktning $\bar{N}$ i varje punkt och att $\bar{N}$ är kontinuerlig

maj 9-10:26

Då definierar vi
flödet av $\bar{F}$ genom $\bar{Y}$
i $\bar{N}$:s riktning som

$$\bar{\Phi} = \iint_{\bar{Y}} \bar{F} \cdot \bar{N} \, dS$$

(dS är ytelement)

maj 9-10:27

Hur beräknas det rent praktiskt?

Antag att Y kan parametriseras

$$\bar{r}(s,t) = (x(s,t), y(s,t), z(s,t))$$

Då ger

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial t}$$ en normalriktning

Antag att detta är "rätt" normalriktning.

(Om inte, byt ordning på s, t.)

maj 9-10:30

Då är

$$\bar{N}\,dS = \frac{\partial \bar{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial t}\,ds\,dt$$

Det ger

$$\bar{\Phi} = \iint_D \bar{F}(s,t) \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial t}\,ds\,dt$$

Där D är parameterområdet.

Ex Antag att

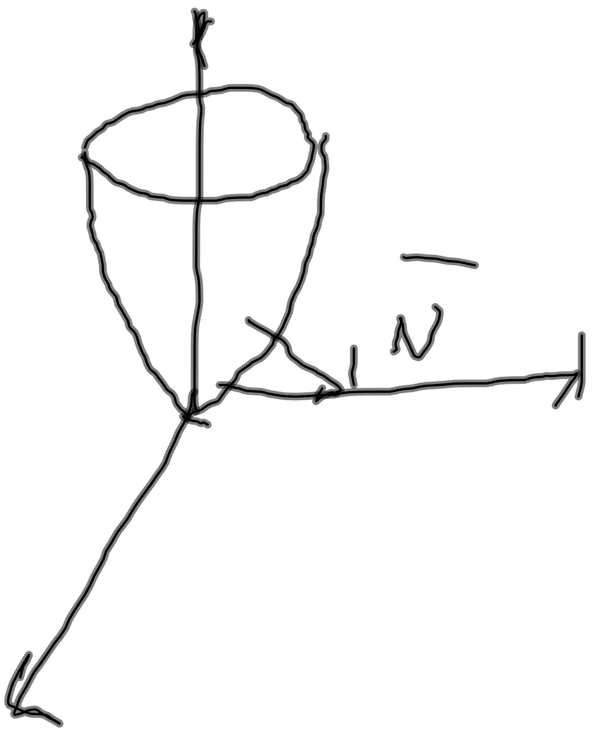
$\bar{F} = (xy, 0, z^2)$

Beräkna flödet ut (från origo) genom ytan som begränsas av

maj 9-10:34

$z = x^2 + y^2$

$x^2 + y^2 \le 1$



Kan beräknas på olika sätt.

Eftersom vi har rotationssymmetri kan vi använda polära koordinater (ρ, φ) (ρ istället för r som redan används)

$x = \rho \cos\theta$

$y = \rho \sin\theta$

På ytan gäller

$z = x^2 + y^2 = \rho^2$

Ytan blir på parametriserad form

maj 9-10:39

$(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, \rho^2)$

$0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad 0 \leq \rho \leq 1$

Kalla denna vektor

för $\bar{r}(\rho, \varphi)$

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial \rho} = (\cos\varphi, \sin\varphi, 2\rho)$$

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial \varphi} = (-\rho\sin\varphi, \rho\cos\varphi, 0)$$

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial \rho} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial \varphi} =$$

$$\begin{vmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ \cos\varphi & \sin\varphi & 2\rho \\ -\rho\sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\left(-2\rho^2\cos\varphi,\ -2\rho^2\sin\varphi,\ \rho\right)$$

Denna normal pekar åt fel håll. Vi byter mot

$$\frac{\partial\bar{r}}{\partial\varphi}\times\frac{\partial\bar{r}}{\partial\rho} =$$

$$=\left(2\rho^2\cos\varphi,\ 2\rho^2\sin\varphi,\ -\rho\right)$$

maj 9-10:42

Ulmych $\overline{F}$ i ρ ahe φ

$$\overline{F} = (x^2 y, 0, z^2)$$

$$= (\rho^2 \cos\varphi \sin\varphi, 0, \rho^4)$$

$$\overline{F} \cdot \frac{\partial \overline{r}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \overline{r}}{\partial \rho} = 2\rho^3 \cos^3\varphi \sin\varphi - \rho^5$$

maj 9-10:59

$$\Phi = \iint_{D} \bar{F} \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial \rho} \, d\rho \, d\varphi$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(2\rho^4 \cos^2\varphi \sin\varphi - \rho^5 \right) d\varphi \, d\rho$$

$$= \int_0^1 \left[-\frac{2}{3}\rho^4 \cos^3\varphi - \rho^5 \varphi \right]_0^{2\pi} d\rho$$

$$= -\int_0^1 2\pi\rho^5\,d\rho =$$

$$= -2\pi\left[\frac{\rho^6}{6}\right]_0^1 = -\frac{\pi}{3}$$

Detta var ett
exempel på standard-
metoden med parametrisering.

En variant:

Den enklaste typen av parametrisering kan vara

$\bar{r}(x,y) = (x, y, f(x,y))$

Främsta skälet att använda annan parametrisering är ofta att D är komplicerat.

Om vi använder denna parametrisering får vi

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial x} = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial y} = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

maj 9-11:07

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial y} =$$

$$\begin{vmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} =$$

$$= \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1 \right)$$

maj 9-11:08

Detta är $\bar{N}\,dS$

$$\bar{F}\cdot\bar{N}\,dS =$$

$$(F_x, F_y, F_z)\cdot\left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right)$$

$$= -\frac{\partial f}{\partial x}F_x - \frac{\partial f}{\partial y}F_y + F_z$$

$$\Phi = \iint_D \left(-\frac{\partial f}{\partial x}F_x - \frac{\partial f}{\partial y}F_y + F_z\right) dx\,dy$$

maj 9-11:09

Om deltа blir litt att beräkna beror helt på D, F och f.

Ibland kan "geometrisk insikt" förenkla beräkningen.

maj 9-11:10

<u>Ex</u>: $\bar{F} = (x, y, z)$

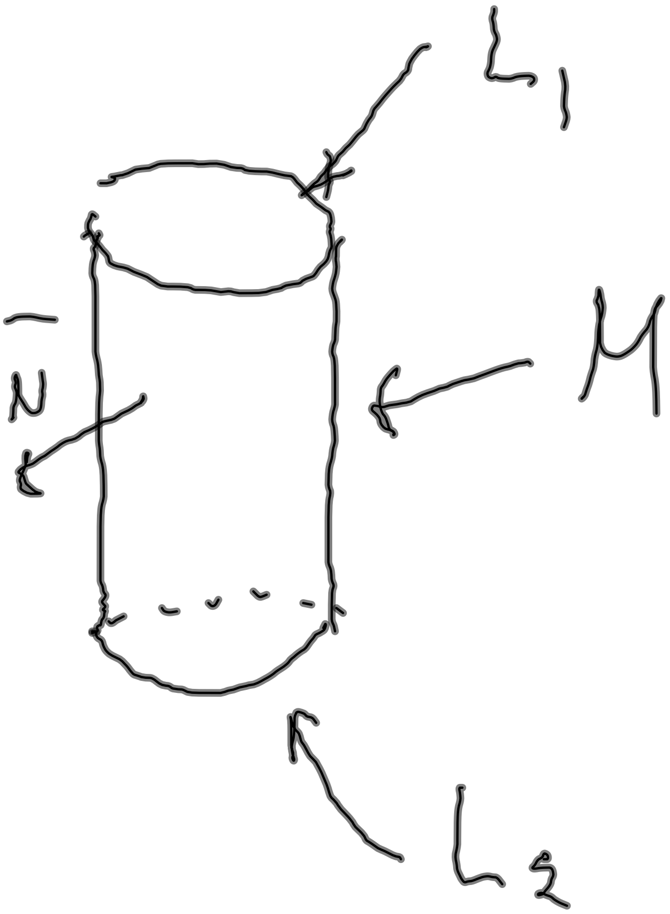
Beräkna flödet <u>ut</u>

ur cylindern

$x^2 + y^2 \leq 1$, $-1 \leq z \leq 1$

Ytan av cylindern

består av tre delar



Två "lock" L_1, L_2

och en "mantelyta" M.

Beräkna $\bar{\Phi}$

$$\Phi = \iint_{L_1} \bar{F} \cdot \bar{N}\, dS + \iint_{L_2} \bar{F} \cdot \bar{N}\, dS + \iint_{M} \bar{F} \cdot \bar{N}\, dS$$

Vi kan göra observationer som förenklar beräkningen.

Vi tittar nu locket

L_1:

$\bar{N} = (0,0,1)$

$\bar{F} \cdot \bar{N} = (x,y,z) \cdot (0,0,1)$

$= z = 1$ på L_1

$$\iint_{L_1} \bar{F} \cdot \bar{N}\, dS = \iint_{L_1} dS =$$

maj 9-11:16

$= \text{Arean av } L_1 = \pi$

På samma sätt fås

$$\iint_{L_2} \bar{F} \cdot \bar{N}\, dS = \pi$$

Vad händer på M?

Punkterna på M

har formen (x, y, z)

där $x^2 + y^2 = 1$

Vad är $\overline{N}$ i (x, y, z)?

$N = (x, y, 0)$

$\overline{F} \cdot \overline{N} = (x, y, z) \cdot (x, y, 0)$

$= x^2 + y^2 = 1 \quad (!)$

maj 9-11:21

$$\iint_M \bar{F} \cdot \bar{N}\, dS = \iint_M dS$$

= Arean av mantelytan

$= 2 \cdot 2\pi = 4\pi$

Totalt får vi

$\Phi = \pi + \pi + 4\pi = 6\pi$

maj 9-11:23

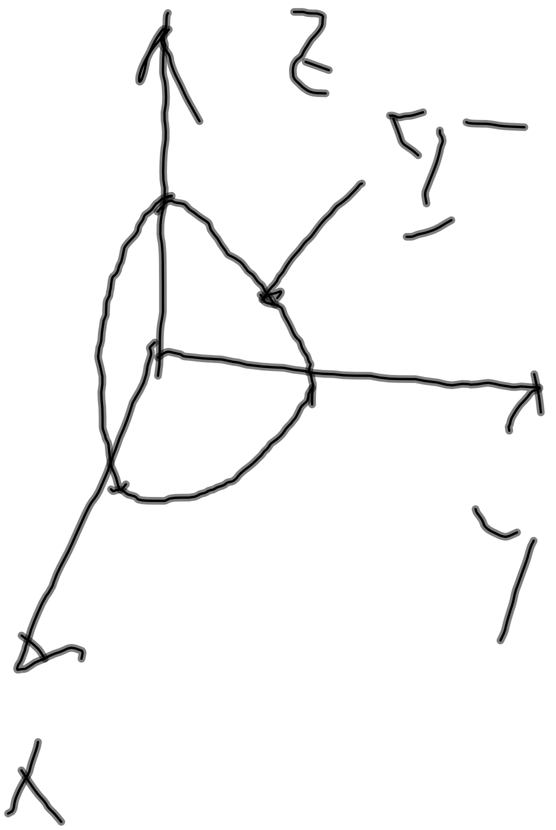
Ex:

$$\bar{F} = (y, -x, 4)$$

Beräkna flödet genom ytan som ges av

$z = 1 - x^2 - y^2$ och

som ligger i första oktanten.



Vi använder polära koordinater igen.

Parametrisera ytan:

$$\bar{r}(\rho,\varphi)=$$

$$(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, 1-\rho^2)$$

$$0\leq\rho\leq 1 \quad 0\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\partial\bar{r}}{\partial\rho}=(\cos\varphi, \sin\varphi, -2\rho)$$

$$\frac{\partial\bar{r}}{\partial\varphi}=(-\rho\sin\varphi, \rho\cos\varphi, 0)$$

maj 9-11:27

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial \rho} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial \varphi} =$$

$$\begin{vmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ \cos\varphi & \sin\varphi & -2\rho \\ -\rho\sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} =$$

$$(2\rho^2\cos\varphi, 2\rho^2\sin\varphi, \rho)$$

Denna vektor pekar ut från origo och har alltså rätt riktning.

$$\bar{F}(\rho,\varphi) =$$

$$(\rho \sin\varphi, -\rho\cos\varphi, 4)$$

$$\bar{F}\cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial \rho} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial \varphi} = 2\rho^3 \cancel{\cos\varphi} \sin\varphi$$

$$-2\rho^3 \cancel{\cos\varphi \sin\varphi} + 4\rho$$

$$= 4\rho$$

$$\Phi = \int_0^{\pi/2} \int_0^1 4\rho \, d\rho \, d\varphi$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot 4 \left[\frac{\rho^2}{2} \right]_0^1 = \pi$$

maj 9-11:32

Detta var "standardvektorn"

Vi skissar vad som skulle hända om vi använde $z = f(x,y)$

$\bar{F} \cdot \bar{N}\, dS =$

$(y, -x, 4) \cdot (2x, 2y, 1)$

$= 2xy - 2xy + 4 = 4$

maj 9-11:34

$$\Phi = \iint_D \bar{F} \cdot \bar{N}\, dS =$$

$$= 4 \iint_D dS = 4 \cdot \underset{\text{av } D}{\text{Arean}}$$

$$= 4 \cdot \frac{\pi}{4} = \pi$$

maj 9-11:36

Skiss av vad
som händer imorgon.

Vi tittar på begreppen

Divergens och Rotation

Vi tittar på Gauss
sats och Stokes sats

maj 9-11:38

Gauss sats:

En flödesintegral
kan göras om till
en integral över en kropp.

Stokes sats:

En flödesintegral kan

maj 9-11:40

göras om till en

kurvintegral.