Föreläsning 2

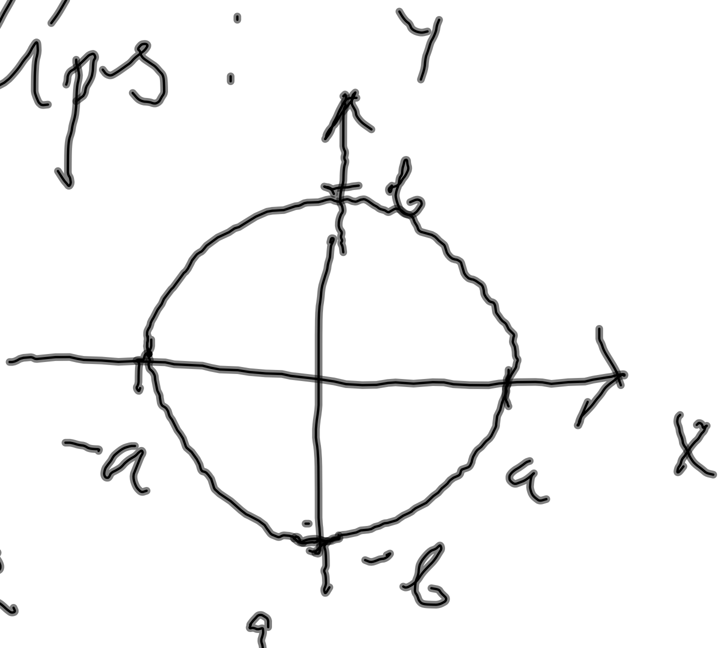
Vad gjorde vi förra gången?

* Definierade områden.
* Öppna/slutna områden o.s.v.
* Ritade funktioner
* Använde nivåkurvor.

mar 22-13:01

Några saker vi inte talade om:

Ellips:



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

mar 22-13:10

Ellipsoid (3 dim)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

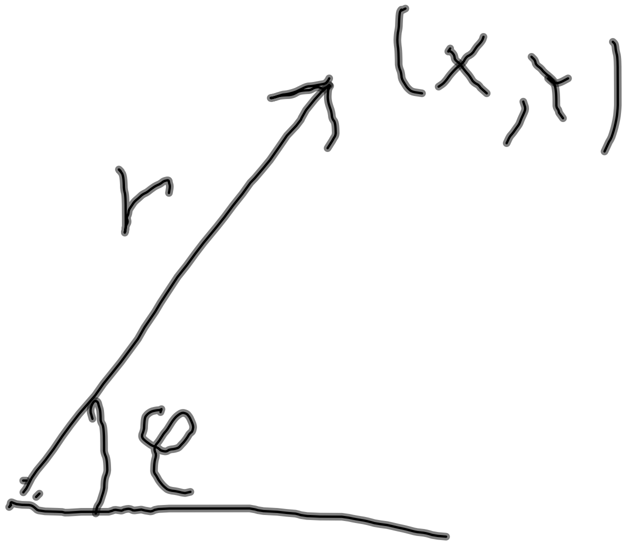
Koordinatbyten.

I stället för (x, y) kan vi använda polära koordinater

mar 22-13:12

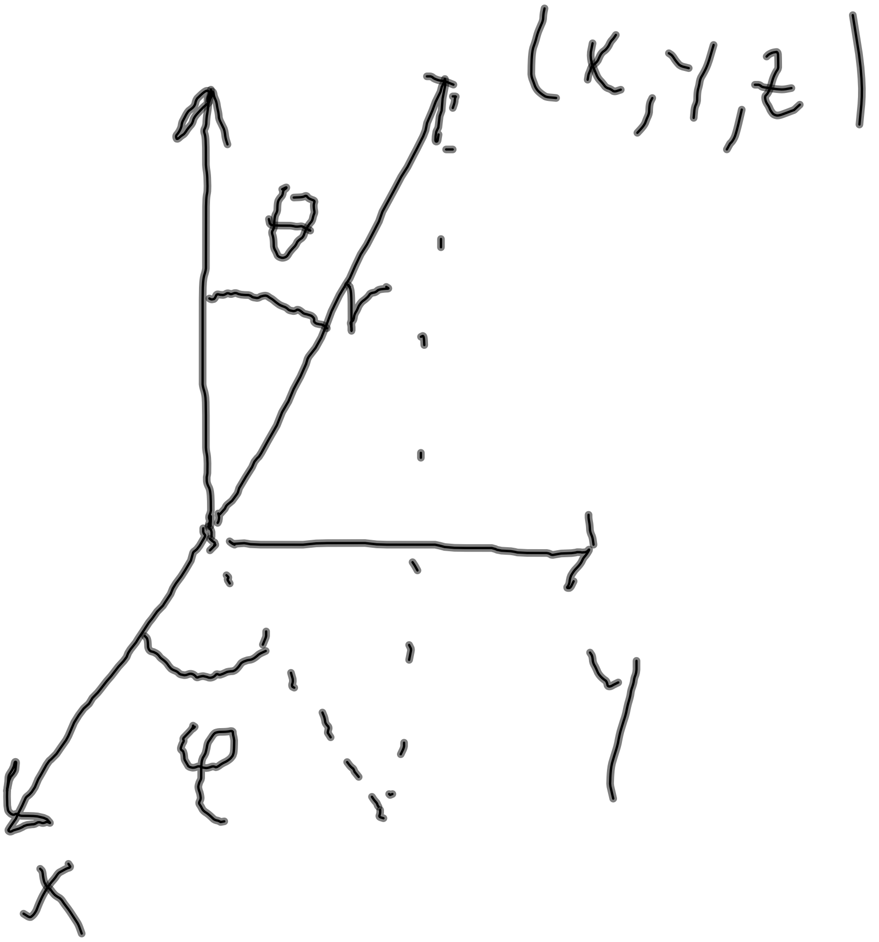
$x = r\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi$



Enhetscirkeln kan då skrivas $\{(r,\varphi) : r = 1\}$

Rymdpolära koordinater



mar 22-13:16

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

I dag:

* Partiella derivator
* Gränsvärden
* Kontinuitet

mar 22-13:18

Intro till partiella derivator

Givet $f(x,y)$

kan vi definiera

"derivator"

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$$

mar 22-13:20

Vi ser på några exempel

$$f(x,y) = xy^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy$$

$$f(x,y) = x^3 - 7y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -7$$

$$f(x,y) = \frac{x}{y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{y} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}$$

$$f(x,y) = \sin(xy)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y\cos(xy)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x\cos(xy)$$

mar 22-13:23

$$f(x,y) = x^2y + xy^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + y^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 3xy^2$$

Regel: Vid beräkning av $\frac{\partial f}{\partial x}$, tolka y

mar 22-13:25

Som en konstant

och derivera m.a.p. x.

$\frac{\partial f}{\partial y}$ räknas ut på motsvarande

sätt.

Vad betyder derivata?

Jämför med envariabel

$$f(x) = x^3$$

$$f'(x) = 3x^2$$

Det betyder bl.a
att om vi har en

mar 22-13:28

ändring Δx i x

så får vi

$$\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x)$$

$$\approx f'(x)\,\Delta x$$

Derivatan är ett mått

på små ändringar.

mar 22-13:29

På samma sätt gäller
att om vi har (x, y)
och ändrar till $(x+\Delta x, y)$
så får vi

$$\Delta f \approx \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x$$

Samma gäller för y-ändring

$$\Delta f \approx \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y$$

mar 22-13:31

Formell definition

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

mar 22-13:33

Vi tittar på ett "tillämpat" exempel.

En fabrik använder x enheter av ett material och producerar f(x) enheter av en produkt. Denna produkt kan säljas för p kr/enhet.

mar 22-13:35

Råmaterialet kostar

c kr/enhet.

Det ger vinsten

$V = pf(x) - cx$

Om vi antar att

$f(x) = \sqrt{x}$

mar 22-13:38

Om vi väljer x
så att vinsten blir
maximal så får vi

$$\bar{V} = \frac{P^2}{4C}$$

(Uträkningen är ett
vanligt envariabel-problem)

mar 22-13:40

Vi kollar vad som händer med $\bar{v}$ för extrema värden på P, C.

Vad händer då $P \to 0$, $C \to 0$?

Vi får problemet att $\bar{v} =$ "$\frac{0}{0}$".

mar 22-13:44

Vi måste ha någon
typ av gränsvärdesberäkning

Om det finns ett
värde L på $\bar{V} =$ "$\frac{0}{0}$"
så måste L vara så att
V närmar oss L
när vi än närmar oss (0,0).

mar 22-13:46

Om vi sätter $p = 0$

och låter $c \to 0$ så

får vi $\bar{V} = 0$

Om vi sätter $c = 0$

och låter $p \to 0$ så

får vi $\bar{V} = \infty$.

Det finns inget gränsvärde!

mar 22-14:03

Några likvande exempel på gränsvärden:

$$f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$$

f existerar i de flesta punkter. Om $x+y=0$ så måste $f = \pm\infty$ utom i punkten $(0,0)$.

Vad händer i $(0,0)$?

(eller vad händer då vi närmar oss $(0,0)$?)

Om vi närmar oss $(0,0)$ längs linjen $x-y=0$ (d.v.s. $y=x$) så är $f=0$

Det tyder på att gränsvärdet

mar 22-14:09

skulle vara 0.

Om vi närmar oss

(0,0) längs linjen

$x+y=0$ (d.v.s. $y=-x$)

så är $f=\infty$

Gränsvärdet finns inte.

Ex: $f = \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2}$

Om vi plottar funktionen verkar det som att f närmar sig 0 då $(x,y) \to (0,0)$.

mar 22-14:14

För små x, y kommer

$x^2 + y^2$ att bli mycket

större än $x^2 y$

Men tekniskt:

$$|f| = \left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| = \left| \frac{x^2}{x^2 + y^2} \right| |y|$$

Men $\left| \frac{x^2}{x^2+y^2} \right| \leq 1$ då $(x, y) \neq (0,0)$

mar 22-14:17

Så $|f| \leq |y|$

Så om $y \to 0$ gäller

$f \to 0$.

Vi skriver

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

mar 22-14:20

Kontinuitet

En funktion $f(x,y)$
är kontinuerlig i ett
område D om
1) $f(x,y)$ existerar
överallt i D

mar 22-14:22

2. $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$

skall existera för

alla $(a,b) \in D$

3. $f(a,b) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$

för alla $(a,b) \in D$

mar 22-14:23

Ex $f(x,y) = \dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$

Är f kontinuerlig i $\mathbb{R}^2$?

f existerar överallt utom i $(0,0)$.

Men $f(0,0)$ finns inte!

mar 22-14:25

Men $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$

existerar faktiskt

och är 1.

<u>Bevis</u>: Sätt $v = x^2+y^2$

Då $(x,y)\to(0,0)$ gäller

$v \to 0$

mar 22-14:28

$$f(x,y) = \frac{\sin v}{v}$$

(Variabelbyte)

$$\lim_{v \to 0} \frac{\sin v}{v} = 1$$

(känt från envariabel-kursen)

Så $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 1$$

mar 22-14:31

Om vi nu <u>definierar</u>

$f(0,0) = 1$ så blir

f kontinuerlig.

Man säger att

$$\frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \text{ har}$$

mar 22-14:32

en <u>hävbar</u> singularitet!

Några derivatabeteckningar

<u>Ex</u> $f(x,y) = e^{x+y^2}$

Vi kan räkna på olika sätt

mar 22-14:33

1. Tänk på $e^{(\ )}$

som yttre funktion

och $x+y^2$ som inre.

Derivera m.a.p. x och

håll y fix.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{x+y^2} \frac{\partial (x+y^2)}{\partial x} =$$

mar 22-14:36

$$e^{x+y^2} \cdot 1 = e^{x+y^2}$$

Derivera m.a.p. y och håll x fix.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{x+y^2} \frac{\partial (x+y^2)}{\partial y} =$$

$$e^{x+y^2} 2y = 2y e^{x+y^2}$$

mar 22-14:38

g. $e^{x+y^2} = e^x \cdot e^{y^2}$

Vi kan använda produktregeln.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial e^x}{\partial x} e^{y^2} + e^x \frac{\partial e^{y^2}}{\partial x}$$

Men om g(y) bara beror på y gäller

mar 22-14:40

$$\frac{\partial}{\partial x} g(y) = 0$$

Så vi får

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial e^x}{\partial x} e^{y^2} = e^x e^{y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial e^x}{\partial y} e^{y^2} + e^x \frac{\partial e^{y^3}}{\partial y} =$$

$$0 \cdot e^{y^2} + e^x \, 2y e^{y^2}$$

$$= 2y e^x e^{y^2}$$

mar 22-14:45