Gauss sats

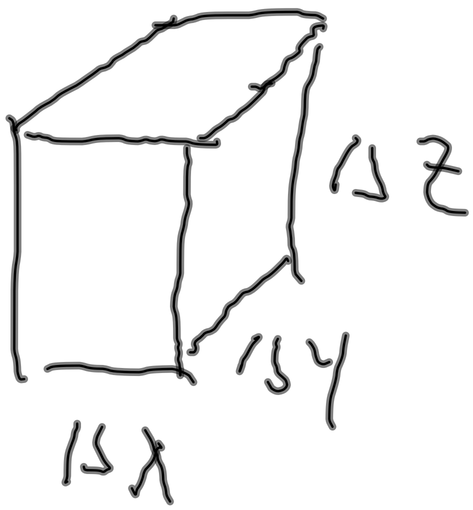
Ett motiverande exempel

Vi har ett flöde

$\overline{F} = (F_x, F_y, F_z)$

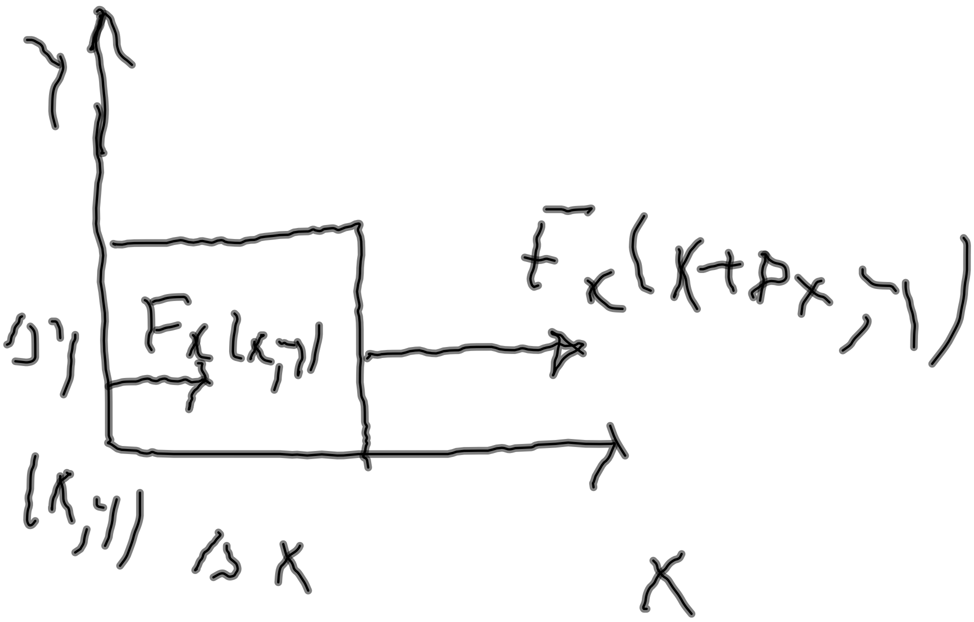
maj 10-13:02

Vi ser på flödet ut ur en liten låda



Vad blir flödet Φ?

Vi tittar på flödet i x-led



$$\Phi(x\text{-led}) \approx F_x(x+\Delta x, y)\,\Delta y \Delta z$$

$$- F_x(x,y)\,\Delta y \Delta z$$

$$\approx \frac{\partial F_x}{\partial x}\,\Delta x \Delta y \Delta z$$

Om vi gör likadant för
Y- och Z-led får vi

$$\Phi \approx \frac{\partial F_x}{\partial x}\Delta x \Delta y \Delta z$$

$$+ \frac{\partial F_y}{\partial y}\Delta x \Delta y \Delta z +$$

$$+ \frac{\partial F_z}{\partial z}\Delta x \Delta y \Delta z \; =$$

maj 10-13:08

$$= \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right)$$

$$\Delta x \Delta y \Delta z$$

$$= \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right) \Delta V$$

Talet $\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$

kallas för

maj 10-13:10

divergensen av $\bar{F}$

och skrivs div $\bar{F}$

Formeln $\bar{\Phi} \approx \mathrm{div}\bar{F}\,\Delta V$

gäller lokalt för

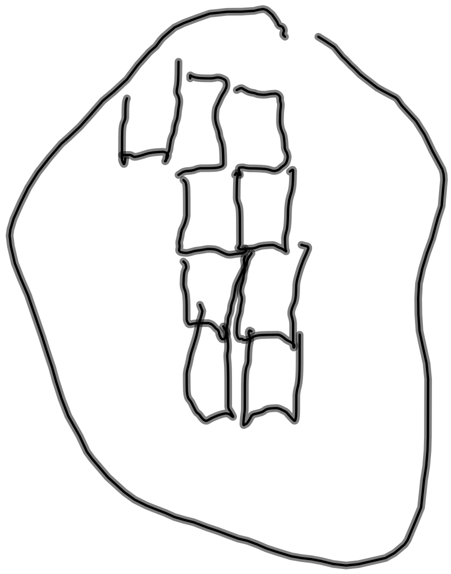
små lådor.

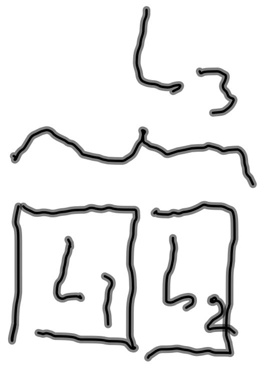
Men om vi har en kropp

K kan vi dela upp den

maj 10-13:11

i många små lådor



Om vi har 

som tillsammans ger

en låda L_3 och

$\Phi(L_1)$ o.s.v. är flödet

ut ur låda L_1 o.s.v.

så gäller

$$\Phi(L_3) = \Phi(L_1) + \Phi(L_2)$$

Om vi har en kropp

som består av lådor

$L_1, \ldots, L_n$ (n stort)

maj 10-13:14

Så gäller att

Φ(ut ur kroppen K) $\approx$

$\Phi(L_1) + \ldots + \Phi(L_n)$

För varje lilla gäller

att $\Phi(L_i) \approx \operatorname{div} \bar{F}\, V(L_i)$

i L_i

maj 10-13:16

Detta ger Gauss sats:

Om K är en kropp och ∂K är randen till K och vi har en utåtriktad normalriktning $\bar{N}$ i varje punkt så gäller

maj 10-13:17

$$\iint_{\partial K} \bar{F}\cdot\bar{n}\,dS = \iiint_K \operatorname{div}\bar{F}\,dv$$

<u>Ex:</u> $\bar{F} = (x, y, z)$

Låt $\bar{Y}$ vara en sluten yta med normal

maj 10-13:19

riktad utåt.

Beräkna $\iint \bar{F} \cdot \bar{N} \, dS$

$\underline{Y}$

Det enda vi vet något om är $\bar{F}$.

Gauss sats säger

att $\iint\limits_{Y} \bar{F} \cdot \bar{n}\, dS =$

$= \iiint\limits_{K} \operatorname{div} \bar{F}\, dV$

Så vad är $\operatorname{div} \bar{F}$?

maj 10-13:21

$$\operatorname{div} \bar{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

$$= \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 1+1+1$$

$$= 3 \quad (\text{konstant})$$

Så integralen vi söker

är $\iiint_K 3 \, d\bar{v} = 3\bar{V}$

maj 10-13:22

Vad är divergens egentligen?

En naturlig tolkning är att $\bar{F}$ står för vattenflöde per tidsenhet.

Då är div $\bar{F}$ = mängden vatten som

"producerns" i punkten
per tidsenhet.
Så $\operatorname{div} \bar{F} > 0$ anger
en <u>källa</u>.
och $\operatorname{div} \bar{F} < 0$ anger
ett <u>avlopp</u>

maj 10-13:26

Många viktiga fält

är <u>divergensfria</u> d.v.s.

$\operatorname{div} \bar{F} = \bar{0}$ ...

<u>Ex</u>: Elektrostatiska

fältet $\bar{E} = \left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{y}{(\ )}, \frac{z}{(\ )} \right)$

maj 10-13:28

$$\frac{\partial F_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right)$$

$$= \left(1 \cdot (x^2+y^2+z^2)^{3/2} - x \cdot 3 \cdot x\,(x^2+y^2+z^2)^{1/2}\right) \cdot \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^3}$$

De övriga termerna i div $\bar{F}$ kan räknas ut på liknande sätt.

Vi använder

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$$

Då får vi

$$\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} =$$

$$\frac{\left(3r^3 - 3\left(x^2 r + y^2 r + z^2 r\right)\right)}{r^6}$$

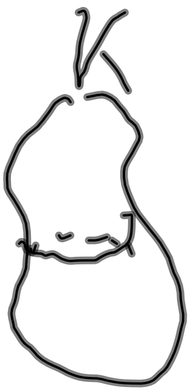
$$= \frac{\left(3r^3 - 3r^3\right)}{r^6} = 0$$

Delta visar att

om vi har en kropp K

maj 10-13:33

så att



K inte innehåller

laddning

någon laddning

så gäller

$$\iint_{\partial K} \bar{E}\cdot\bar{N}\,dS = 0$$

Stokes sats

Vi vet att om

vi har en sluten

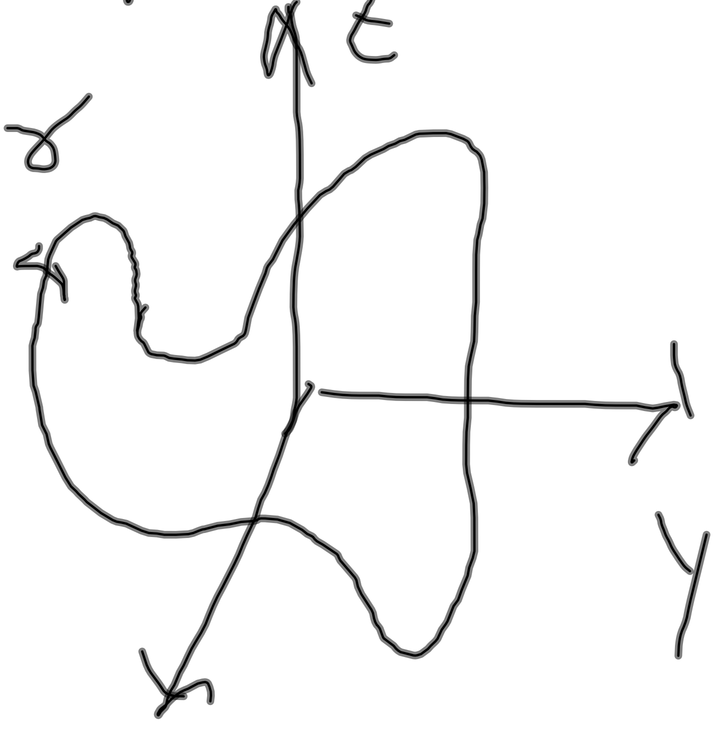
kurva i xy-planet

så gäller att

maj 10-13:37

$$\oint_\gamma P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

Gäller något liknande för slutna kurvor i $\mathbb{R}^3$



Man skulle kunna projicera kurvan i olika

plan och beräkna
delar av $\int_\gamma \bar{F} \cdot d\bar{r}$ i
de olika planen
(XY-planet, XZ-planet,
YZ-planet)
och addera.

maj 10-13:40

Det går att göra det. Man kan då också visa att de tre uträkningarna tillsammans också motsvarar en flödesintegral. Det leder fram till begreppet <u>rotation</u>

<u>Def</u>: $\operatorname{rot}(F_x, F_y, F_z)$

$$= \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}, \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}, \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right)$$

maj 10-13:43

Vi kan nu formulera Stokes sats:

Låt $\bar{Y}$ vara en yta och $\partial\bar{Y}$ dess rand. Låt γ vara kurvan vi får om vi går runt $\partial\bar{Y}$ i en viss riktning och antag att $\bar{Y}$ har en normalriktning som är positiv i förhållande till γ:s riktning

<u>då</u> gäller

$$\oint_{\gamma} \bar{F} \cdot d\bar{r} = \iint_{Y} \operatorname{rot} \bar{F} \cdot \bar{N} \, dS$$

Vad är egentligen rotation?

Tänk på vattenflöde igen. Rotation är något vi kan mäta genom att sätta symmetrisk propeller i vattnet. Det kan då hända att den roterar med en viss vinkelhastighet

maj 10-14:02

i ett visst plan.

Om vi har ett vektorfält $\bar{F}$ mäter $\text{rot}\,\bar{F}$ en sådan rotation.

$\text{rot}\,\bar{F}$:s riktning är normal mot rotationsplanet.

$|\mathrm{rot}\,\bar{F}| = 2 \cdot$ vinkelhastighelen.

Viktigt specialfall

Om $\mathrm{rot}\,\bar{F} = \bar{0}$ för alla punkter så ger Stokes sats att $\oint_{\gamma} \bar{F} \cdot d\bar{r} = 0$

för alla slutna

kurvor.

Def ger $\bar{F}$ har

potential (d.v.s är

konservativt)

maj 10-14:07

om och endast om

$\text{rot}\,\bar{F} = \bar{0}$ överallt.

<u>Nablaräkning</u>

Vi har under kursens gång sett tre olika typer av <u>operatorer</u>

maj 10-14:09

grad U, div $\bar{F}$, rot $\bar{F}$

De kan uttryckas på ett systematiskt sätt om vi använder symbolen <u>nabla</u>:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

maj 10-14:10

Då motsvarar de tre operatorerna

multiplikation med skalär

skalärprodukt

kryssprodukt

på följande sätt:

maj 10-14:12

$$\operatorname{grad} u = \nabla \cdot u =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) u =$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

$$\operatorname{div} \overline{F} = \nabla \cdot \overline{F} =$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \left(F_x, F_y, F_z\right) =$$

$$= \frac{\partial \bar{F}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{F}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{F}_z}{\partial z}$$

$$\operatorname{rot} \bar{F} = \nabla \times \bar{F} =$$

$$= \begin{vmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

maj 10-14:14

$$= \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}, \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}, \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right)$$

Glöm inte att anmäla er till tentan!

maj 10-14:18

Repetition

Skissa några lämpliga nivåkurvor till

$$z = xy^2 + 1.$$

Vi väljer några lämpliga k och skissar de

maj 10-14:19

olika kurvorna

$$k = xy^2 + 1$$

d.v.s. $xy^2 = k - 1$

$$x = \frac{k-1}{y^2}$$

Lämpliga värden är heltal, speciellt sådana där något viktigt händer.

maj 10-14:21

$k=1$ är speciellt

Då får vi $xy^2=0$

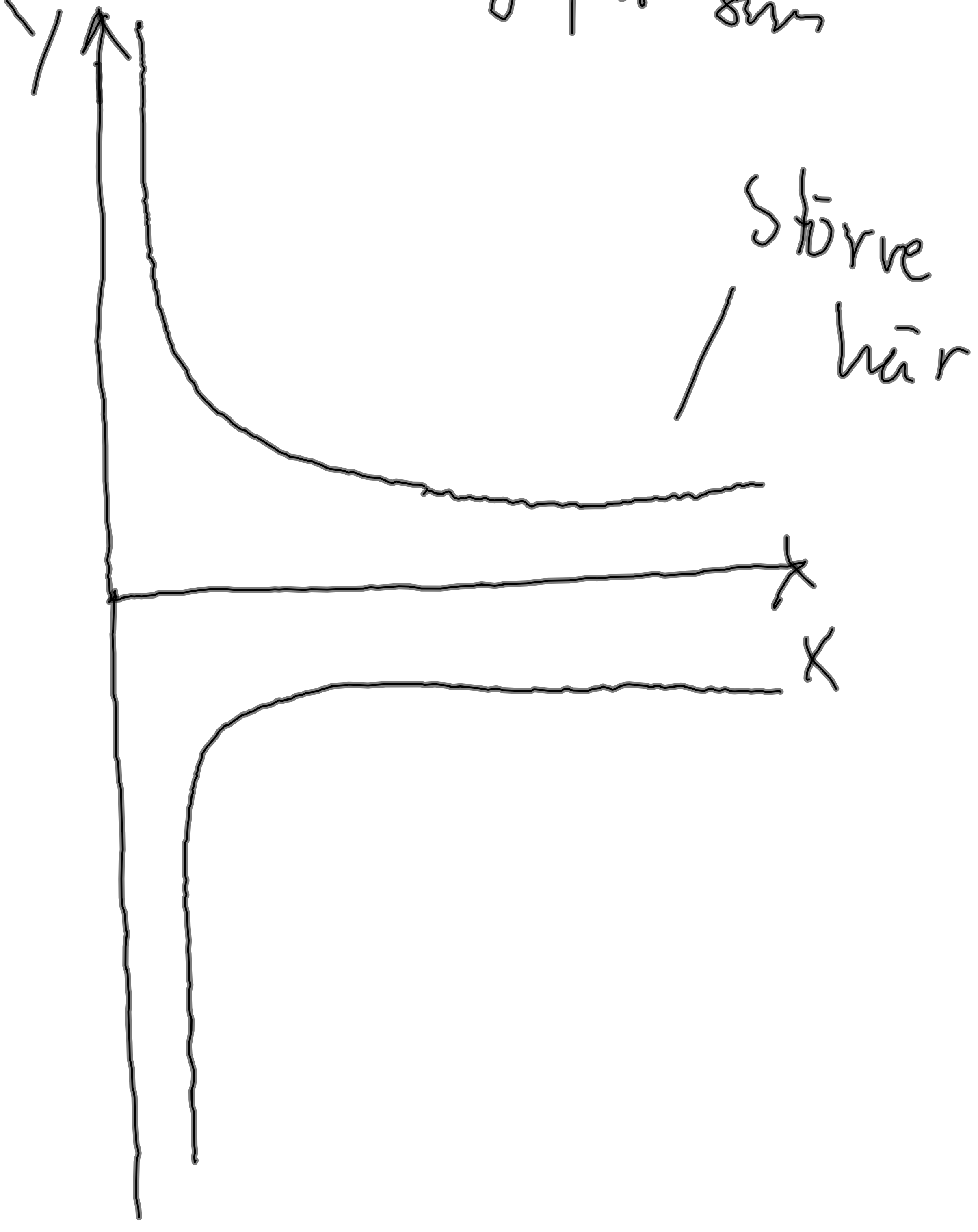
d.v.s. $x=0$ eller $y=0$

Om vi sätter $k=2$

får vi $x=\frac{1}{y^2}$

maj 10-14:23

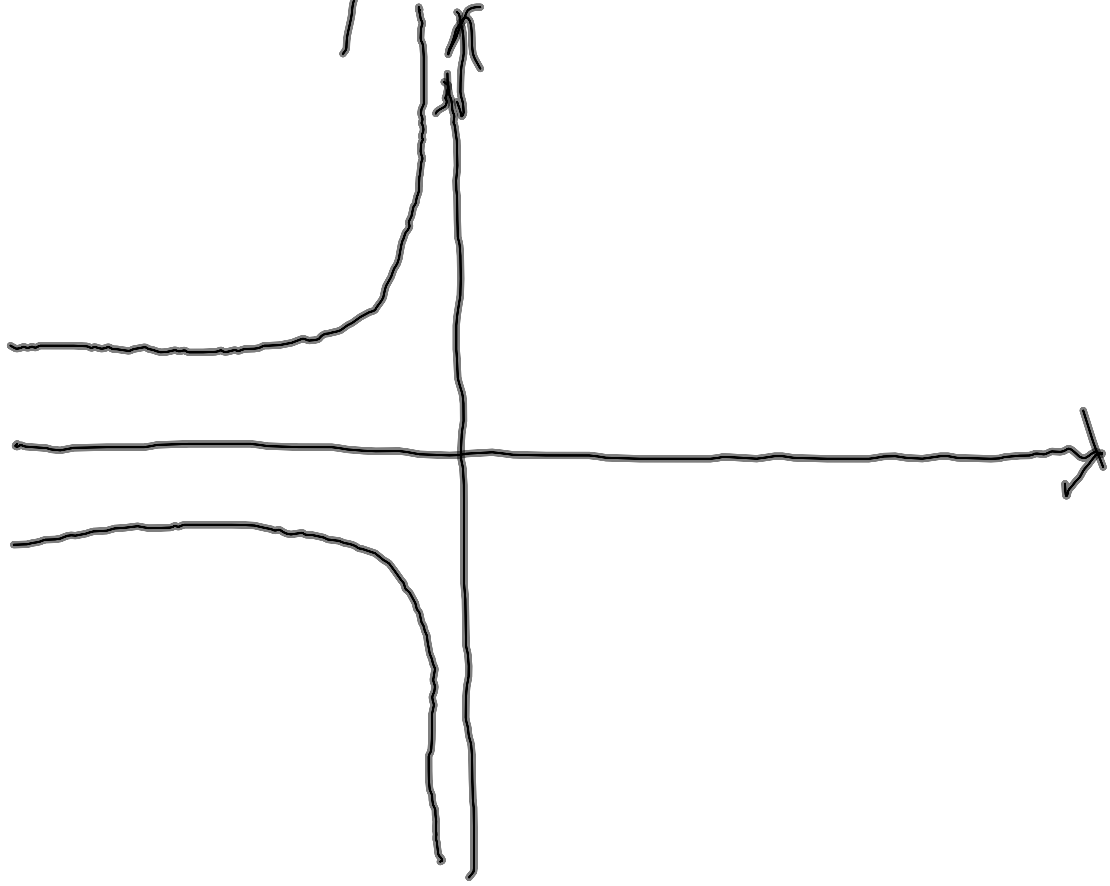
Ser ut ungefär som



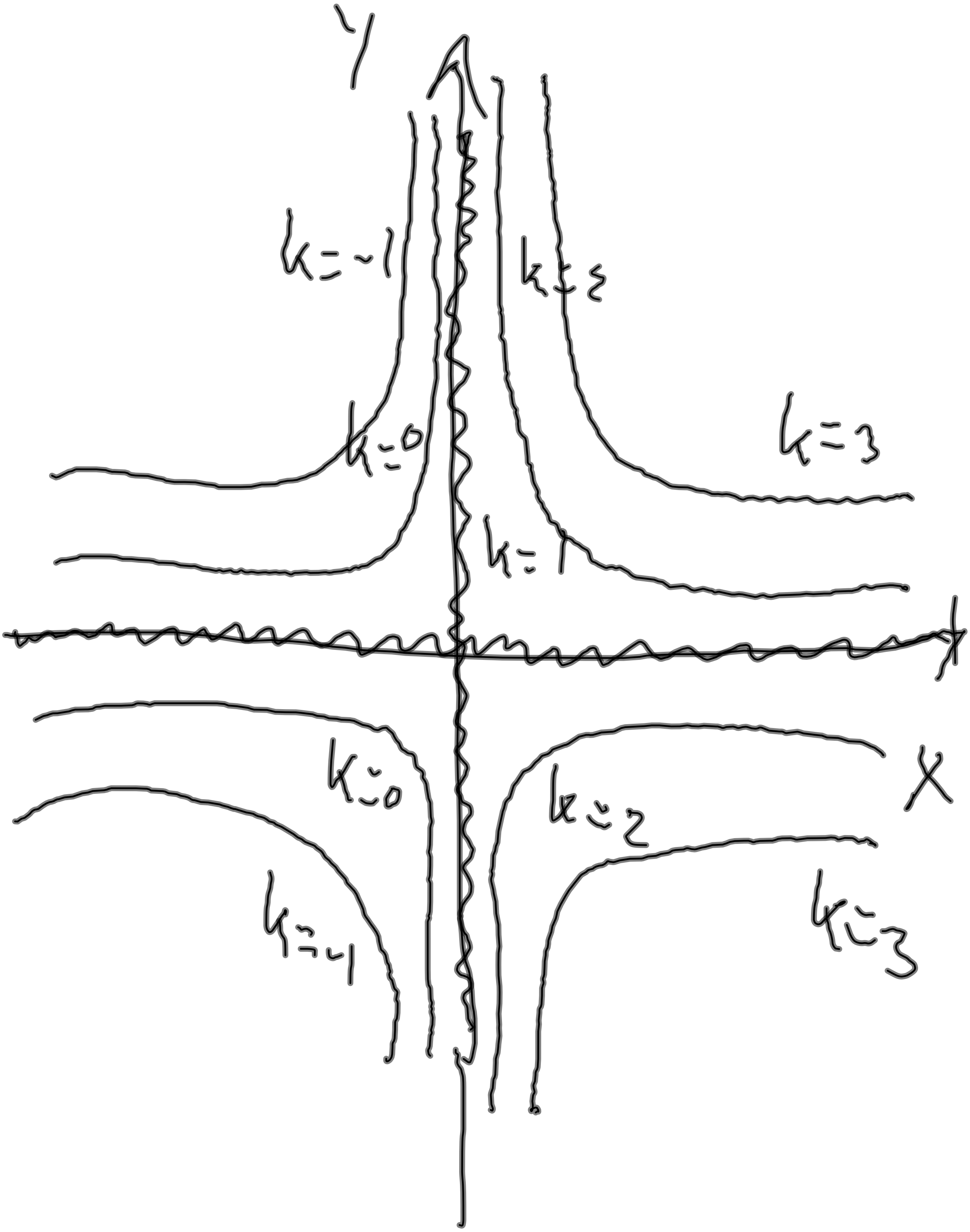
Vad händer om $k<1$

t.ex $k=0$

$$x = -\frac{1}{y^2}$$



Vi kan nu skissa



maj 10-14:28

2. Repetition av enkel integrering.

Vi söker F så att

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x\cos(x^2+y) - \frac{y}{x^2} - \sin x$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \cos(x^2+y) + \frac{1}{x} + 1$$

Integrera först i y-led

$$F = \int \left(\cos(x^2+y) + \frac{1}{x} + 1\right) dy$$

$$= \sin(x^2+y) + \frac{y}{x} + y$$

$$+ g(x)$$

Då blir $\frac{\partial F}{\partial x} =$

maj 10-14:32

$$2x\cos(x^2+y) - \frac{y}{x^2} + g'(x)$$

Vi vill att detta skall vara

$$2x\cos(x^2+y) - \frac{y}{x^2} - \sin x$$

Det ger $g'(x) = -\sin x$

maj 10-14:35

$$g(x) = \int (1 - \sin x)\,dx =$$

$$= \cos x + C$$

$$F = \sin(x^2 + y) + \frac{y}{x} + y$$

$$+ \cos x + C$$

maj 10-14:36

3. Felanalys

Antag att vi har en storhet K med ett fel ε.

Då är det absoluta felet ε och det relativa felet

$$\frac{\varepsilon}{K}$$

Vi söker

$$F(a,b,\alpha)=\frac{1}{2}ab\sin\alpha$$

Vi ställer upp differentialen

$$dF=\frac{\partial F}{\partial a}da+\frac{\partial F}{\partial b}db+\frac{\partial F}{\partial \alpha}d\alpha$$

$$=\frac{1}{2}b\sin\alpha\, da+\frac{1}{2}a\sin\alpha\, db+$$

maj 10-14:39

$$+\frac{1}{2}ab\cos\alpha\, d\alpha$$

I vårt fall gäller för de absoluta felen

$$|\Delta a| \leq 0{,}1 \text{ m}$$

$$|\Delta b| \leq 0{,}13 \text{ m}$$

$|\Delta \alpha| \leq 0{,}006$ radianer

maj 10-14:41

Nu måste vi tänka
ut vilken typ av
kombination av fel
som ger maximalt
fel ΔF.
I detta fall är det
enkelt. Värsta fall
fås då

maj 10-14:43

$\Delta a = 0{,}1$

$\Delta b = 0{,}13$

$\Delta \alpha = 0{,}006$

(eller $\Delta a = -0{,}1$

$\Delta b = -0{,}13$

$\Delta \alpha = -0{,}006$)

Om vi fyller in detta i

maj 10-14:45

differentialen fås

$\Delta F = 1{,}08 \text{ m}^2$

Det är absoluta felet.

Det relativa felet

är $\dfrac{1.08}{38{,}35} = 2{,}8\,\%$

maj 10-14:46