4. Bestäm tangentplanet till ytan $z = x^2 - y^3 + x$ i punkten $(1, 2, -1)$

Om vi sätter

$$F(x,y,z) = z - x^2 + y^3 - x$$

så ges ytan av

$F(x, y, z)$

Normalen till ytan ges då av grad F

$$\operatorname{grad} F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right)$$

$$= (-2x-1, 2y, 1)$$

I punkten $(1, 3, -1)$

maj 12-10:12

får vi då

$\bar{n} = (-3, 4, 1)$

Hur får vi planets ekvation?

Kom ihåg

$\bar{n} \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$

$$(-3,4,1)\cdot(x-1,\,y-2,\,z+1)=0$$

$$-3(x-1)+4(y-2)$$
$$+(z+1)=0$$

$$-3x+4y+z=4$$

Planets ekvation.

5. Vi har

$$2x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$u(x,y) = f(xy^2)$$

där f är någon godtycklig deriverbar funktion. Visa att u är en lösning.

maj 12-10:16

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(xy^2) =$$

$$= f'(xy^2) \cdot y^2$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f(xy^2) =$$

$$= f'(xy^2)\,2xy$$

Sätt in i V.L på ekvationen:

$$2x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} =$$

$$2xf'(xy^2)y^2 - yf'(xy^2)\,2xy$$

$$= 0$$

Så vi har en lösning till ekvationen.

maj 12-10:20

6. Vi skall lösa diffekv

$$3\frac{\partial f}{\partial x} - 2\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

med variabelbytet

$$\begin{cases} u = 2x + 3y \\ v = x + y \end{cases}$$

maj 12-10:23

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial}{\partial v}$$

$$= 2 \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial}{\partial v}$$

$$= 3 \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}$$

maj 12-10:24

$$3 \cdot \frac{\partial f}{\partial x} - 2\frac{\partial f}{\partial y} =$$

$$3\left(2\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}\right) -$$

$$2\left(3\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}\right) =$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}$$

maj 12-10:26

Så ekvationen lyder

$$\frac{\partial f}{\partial v} = 0$$

Då måste $f(u,v) =$

$g(u)$ för en godtycklig

deriverbar funktion g.

$$f(x,y) = g(3x+2y)$$

maj 12-10:28

7. Bestäm Taylor-polynomet för

$$f(x,y) = \frac{y^2}{1+x}$$

i punkten $(1,2)$. Ta med termer upp till grad 2.

$$f(1,2) = \frac{2^2}{2} = 2$$

maj 12-10:30

1:a-gradsleranera

$$P_1(h,k) = \frac{\partial f}{\partial x} h + \frac{\partial f}{\partial y} k$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{y^2}{(1+x)^2} = -1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{1+x} = 2$$

maj 12-10:32

$$P_1(h,k) = -h + 2k$$

$$P_2(h,k) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}k^2\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2y^2}{(1+x)^3} = 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\frac{2y}{(1+x)^2} = -1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2}{1+x} = 1$$

$$P_2(h,k) = -\frac{1}{2}h^2 - hk + \frac{1}{2}k^2$$

maj 12-10:35

Polynomet blir

$$2-h+2k+\frac{h^2}{2}-hk+\frac{k^2}{2}$$

(Skiss till en annan lösningsmetod.)

Sätt in $x=1+h$

$y=2+k$

maj 12-10:36

i $\dfrac{y^2}{1+x}$. Det ger

$$\frac{(2+h)^2}{2+h}.$$

De kan utvecklas var för sig.

maj 12-10:37

$$(2+h)^2 = 4+4h+h^2$$

$$\frac{1}{2+h} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{h}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1+\frac{h}{2}+\frac{h^2}{4}+\ldots\right)$$

Vi kan räkna ut vad termerna av grad två blir.

8. $Q = 2hk - 2h^2 - 3k^2$

Vi skriver om lite:

$$-Q = 2h^2 - 2hk + 3k^2$$

Dividera med 2:

$$-\frac{Q}{2} = h^2 - hk + \frac{3}{2}k^2$$

Kvadratkomplettera:

$$h^2 - hk + \frac{3}{2}k^2 =$$

$$= \left(h - \frac{k}{2}\right)^2 - \frac{k^2}{4} + \frac{3}{2}k^2 =$$

$$= \left(h - \frac{k}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}k^2$$

Positivt definit.

Då är Q negativt definit.

maj 12-10:41

9. Bestäm alla kritiska punkter till

$$f(x,y) = (x^2+y)e^{-x+y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xe^{-x+y} - (x^2+y)e^{-x+y}$$

$$= (2x-x^2-y)e^{-x+y}$$

maj 12-10:43

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{-x+y} + (x^2+y)e^{-x+y}$$

$$= (1+x^2+y)e^{-x+y}$$

e^{-x+y} är aldrig 0.

$$\begin{cases} 2x - x^2 - y = 0 \\ 1 + x^2 + y = 0 \end{cases}$$

maj 12-10:45

Lägg ihop ekvationerna

$2x+1=0$

$x=-\frac{1}{2}$

2:a ekv ger

$1+\frac{1}{4}+y=0$

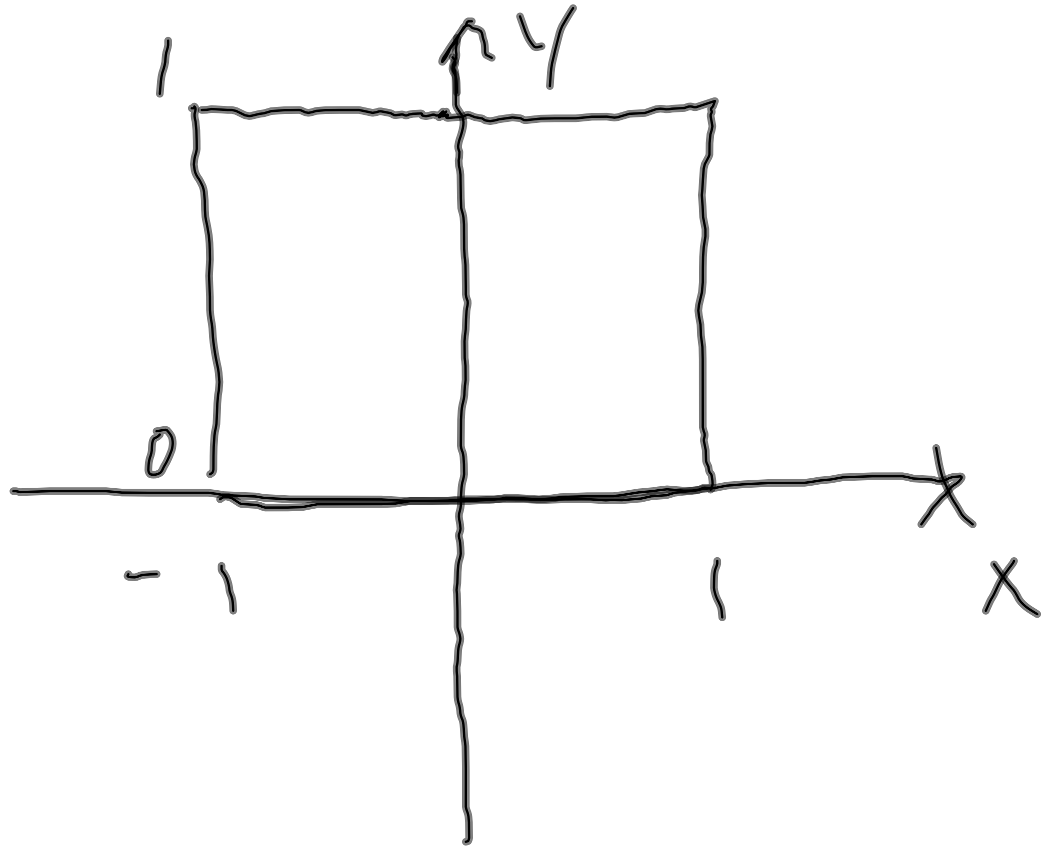
$y=-\frac{5}{4}$

$\left(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{4}\right)$

är enda lösningen.

maj 12-10:47

11.



$$f(x,y) = xy - 2x$$

Leta först efter kritiska punkter.

maj 12-11:07

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = y - 2 = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = x = 0 \end{cases}$$

så $(0, 2)$ är enda kritiska punkten.

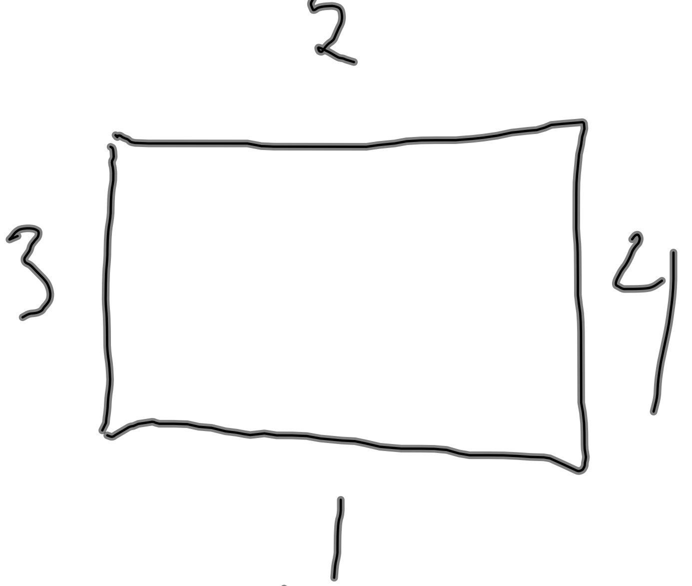
Den ligger utanför

maj 12-11:08

området och är därför inte intressant.

Vi undersöker rutan.

Den består av 4 delar.



Undersöker dem var för sig.

1: $g(t) = f(t, 0)$

$= -2t \quad -1 \leq t \leq 1$

Max $= 2$ fås i $(-1, 0)$

Min $= -2$ fås i $(1, 0)$

2: $g(t) = f(t, 1)$

$= t - 2t = -t \quad -1 \leq t \leq 1$

Max $= 1$ Min $= -1$

maj 12-11:10

3: $g(t) = f(-1, t)$

$= -t + 2 \quad 0 \leq t \leq 1$

Max $= 2$ i $(-1, 0)$

Min $= 1$

4: $g(t) = f(1, t)$

$= t - 2$

Max $= -1$ i $(1, 0)$, Min $= -2$

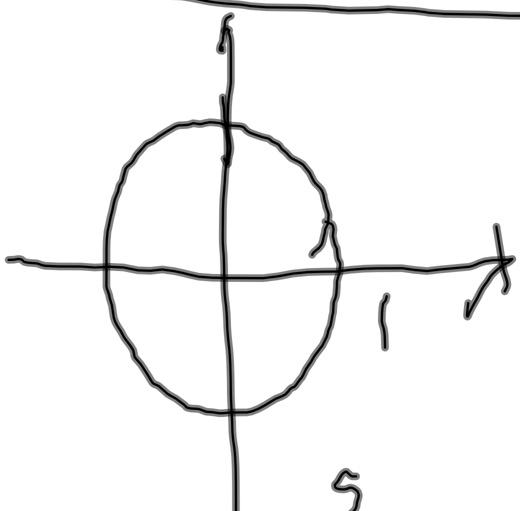
maj 12-11:13

Vi sammanställer:

Max $= 2$ i $(-1,0)$

Min $= -2$ i $(1,0)$

12.



$$f(x,y) = x^2 + \frac{y^2}{2}$$

Leta efter kritiska punkter:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = y = 0 \end{cases}$$

$(0,0)$ är en kritisk punkt med $f=0$.

maj 12-11:17

Undersök randen.

Sätt C: $(\cos t, \sin t)$

$$g(t) = (\cos t)^2 + \left(\frac{\sin t}{2}\right)^2$$

$$g'(t) = -2\cos t \sin t + \sin t \cos t = 0$$

$$-\sin t \cos t = 0$$

Så vi har $\sin t = 0$

eller $\cos t = 0$

$t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$

Testa dessa värden.

$g(0) = 1$, $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$

$g(\pi) = 1$, $g\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$

maj 12-11:22

Vi har max

i $(1,0)$ och $(-1,0)$

Min $= \frac{1}{2}$ är sämre än

0 i $(0,0)$.

Men i parametriseringen

antog vi att $0 \le t \le 2\pi$

maj 12-11:24

Vi skall undersöka
vad som händer i $t=0$
och $t=\pm\pi$.

Men vi vet redan att
$f=1$ i $t=0$.

Svar: Max $=1$ i $(\pm 1,0)$
Min $=0$ i $(0,0)$.

maj 12-11:25

13. $f(x,y) = \dfrac{x}{1+x^2+y^2}$

Vi letar efter kritiska punkter

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1\cdot(1+x^2+y^2) - 2x^2}{(1+x^2+y^2)^2} =$$

maj 12-11:26

$$= \frac{1+y^2-x^2}{(1+x^2+y^2)^2} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-2yx}{(1+x^2+y^2)^2} = 0$$

Forenklas till

$$\begin{cases} 1+y^2-x^2=0 \\ -2yx=0 \end{cases}$$

2:a ekv ger $x=0$
eller $y=0$

$y=0$ ger punkter på
randen. Förkasta dem.

maj 12-11:29

$x=0$ sätts in i ekv 1.

$1+y^2=0$. Ingen

lösning.

Inga kritiska punkter

alltså.

maj 12-11:29

Kolla medan $y=0$

$$g(t) = f(t,0) = \frac{t}{1+t^2}$$

$$g'(t) = \frac{1\cdot(1+t^2) - 2t^2}{(1+t^2)^2} =$$

maj 12-11:30

$$= \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2} = 0$$

$$t = \pm 1$$

$$g(1) = \frac{1}{2} \qquad g(-1) = -\frac{1}{2}$$

Vad händer i ∞?

maj 12-11:31

Vi börjar med att

titta på g(t) då

$t \to \pm\infty$

$$\lim_{t \to \infty} \frac{t}{1+t^2} = 0$$

$$\lim_{t \to -\infty} \frac{t}{1+t^2} = 0$$

maj 12-11:32

Vi måste kolla om
vi kan få större/mindre
värde än $1/\varepsilon$ / $-\frac{1}{\varepsilon}$ då
vi går mot ∞ på
andra sätt.

Om $x \to \infty$ kan vi
se att

maj 12-11:34

$$\left|\frac{x}{1+x^2+y^2}\right| \leq \left|\frac{x}{1+x^2}\right|$$

och då $x \to \infty$ får

vi att detta går mot

0.

Vad händer om x

är begränsad och

$y \to \infty$?

Antag att $|x| \leq k$

$$\left|\frac{x}{1+x^2+y^2}\right| \leq \left|\frac{k}{1+y^2}\right|$$

och detta går mot

0 då $y \to \infty$

maj 12-11:37

Så $\lim\limits_{x\to\infty, y\to\infty} f(x,y) = 0$

Max $= \frac{1}{2}$ i $(1,0)$

Min $= -\frac{1}{2}$ i $(-1,0)$

maj 12-11:38

14. $f(x,y,z) = x + y - z$

$g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$

Lagranges metod:

$\frac{\partial f}{\partial x} - \lambda \frac{\partial g}{\partial y} = 1 - 2\lambda x = 0$

$\frac{\partial f}{\partial y} - \lambda \frac{\partial g}{\partial y} = 1 - 2\lambda y = 0$

maj 12-11:39

$$\frac{\partial f}{\partial z} - \lambda \frac{\partial g}{\partial z} = -1 + 2\lambda z = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

De tre första ekvationerna ger

$$x = \frac{1}{2\lambda}$$

$$y = \frac{1}{2\lambda}$$

$$z = -\frac{1}{2\lambda}$$

maj 12-11:40

Sätt in detta i ekv 4:

$$\frac{1}{4\lambda^2}+\frac{1}{4\lambda^2}+\frac{1}{4\lambda^2}=1$$

$$\frac{3}{4\lambda^2}=1 \qquad \lambda^2=\frac{3}{4}$$

$$\lambda=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Dessa två värden ges punkterna

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

I 1:a fås $f = \sqrt{3}$

I 2:a fås $f = -\sqrt{3}$

maj 12-11:42

Detta är max och min.