Förra gången:

* Gränsvärden
* Kontinuitet
* Partiella derivator

I dag:

* Totala differentialen.
* Kort om felanalys.
* Tangentplan
* Kedjeregeln.

mar 24-10:03

Vi har definierat

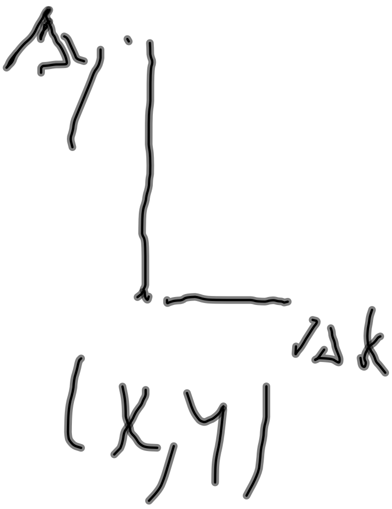
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

Så

$$\Delta f \approx \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x \text{ vid } x\text{-ändring}$$

$$\Delta f \approx \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y \text{ vid } y\text{-ändring}$$

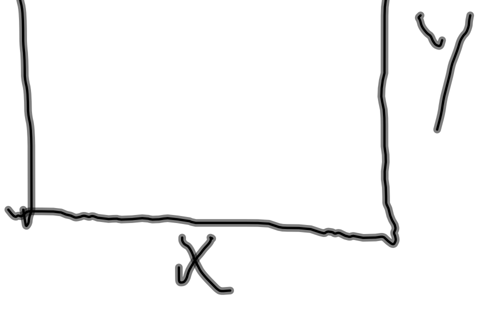


Vad händer om vi ändrar i x och y samtidigt?

Vi får

$$\Delta f \approx \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$$

<u>Ex</u> Vi har en plåt med sidor



Plåtens area är

$A(x,y) = xy$

Vi ändrar x med Δx

och y med Δy.

Ungefär hur mycket

ändras A?

$$\Delta A \approx \frac{\partial A}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial A}{\partial y}\Delta y$$

$$= y\,\Delta x + x\,\Delta y$$

Detta är inte exakt.

Den exakta ändringen

är $(x+\Delta x)(y+\Delta y) - xy$

$$= y\Delta x + x\Delta y + \underbrace{\Delta x \cdot \Delta y}$$

mar 24-10:12

Generellt gäller

att $\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$

$+ R$

där R har belopp som

är mindre än $k\left(\max(|\Delta x|, |\Delta y|)\right)^2$

för något k.

Det betyder att vi ofta kan "strunta" i R

d.v.s. $\Delta f \approx \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$

Om vi tänker oss att $\Delta x, \Delta y$ är "oändligt små" så ersätter vi Δx

mar 24-10:17

med dx och ∂y med dy.

Vi sätter

$$df = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy}$$

Detta är <u>totala differentialen</u> av f.

<u>Ex</u> $f(x,y) =$

$= x^3 y - 5xy$

$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy =$

$= (3x^2 y - 5y) dx$

$+ (x^3 - 5x) dy$

mar 24-10:21

Felanalys

Vi tittar på ett exempel.

Vid en hastighetskontroll kollas tiden T det tar för en bil att köra en sträcka S.

Hastigheten $V = f(S, T) = \frac{S}{T}$

T.ex $S = 20\,m$

$T = 0,7\,s$

ger $V = 28.57\ m/s$

$= 102.86\ km/h.$

Men antag att felet i S kan vara maximalt

mar 24-10:25

5 cm.

Hur stort kan felet i T vara.

Antag att det maximalt är 0,05 s.

Vi vill uppskatta hur stort felet i V maximalt kan vara.

mar 24-10:27

$$dV = \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{\partial V}{\partial T} dT$$

$$= \frac{1}{T} dS - \frac{S}{T^2} dT$$

Vi sätter

$$\Delta V \approx \frac{1}{T} \Delta S - \frac{S}{T^2} \Delta T$$

Sätt in $S = 20$

$T = 0,7$

mar 24-10:29

$$\Delta V \approx \frac{1}{0{,}7}\Delta S - \frac{20}{(0{,}7)^2}\Delta T$$

Kan vi uppskatta maximum av $|\Delta V|$?

Försök hitta den kombination av värden på $\Delta S, \Delta T$ så att

$$\left|\frac{1}{0{,}7}\Delta S - \frac{20}{(0{,}7)^2}\Delta T\right|$$ blir

mar 24-10:32

Så stort som möjligt.

Vi vet också att

$|\Delta S| \leq 0{,}05$ $|\Delta T| \leq 0{,}05$

Vi får största värde

då $\Delta S = 0{,}05$ och

$\Delta T = -0{,}05$

$|\Delta v| \leq 2{,}11$ m/s $= 7{,}6$ km/h

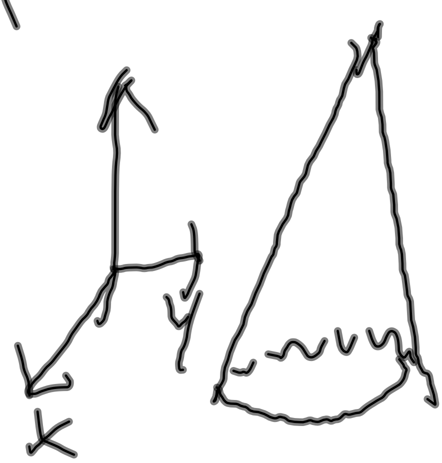
Differentierbarhet

Om vi har en funktion $f(x,y)$ som är definierad i D så säger vi att f är differentierbar i D om den totala differentialen existerar överallt

mar 24-10:39

i D.

Ex: Finns det funktioner som inte är differentierbara?
Ja, t. ex



d.v.s. funktionsgrafen

är en kon, med spets

i (0,0). Då finns

inte differentialen

i (0,0).

Derivatorna finns inte

i (0,0).

mar 24-10:41

Sats: Om $\frac{\partial f}{\partial x}$

och $\frac{\partial f}{\partial y}$ existerar

överallt i D och

är kontinuerlig så

är f differentierbar.

mar 24-10:44

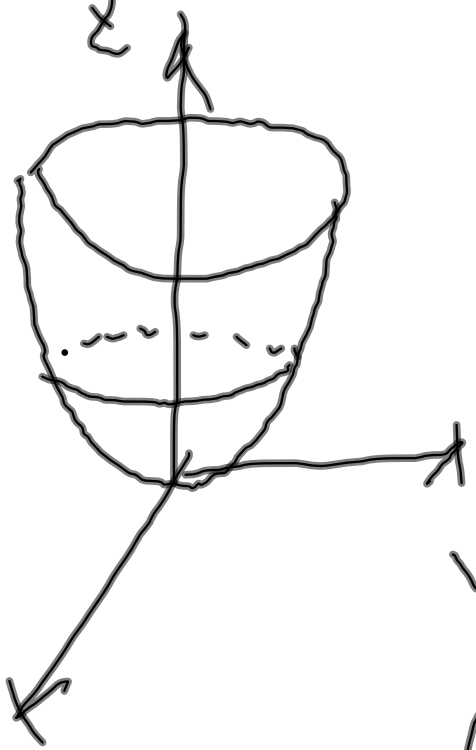
Tangentplan

Idé: Den totala differentialen kan beskrivas som ett plan.

Vi ser på ett exempel.

mar 24-11:01

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$



punkten $(2,1,5)$ ligger på funktionsgrafen.

Om vi tittar på den nya punkten $(2+\Delta x, 1+\Delta y)$

mar 24-11:02

Så ändras funktionsvärdet.

Ändringen

$$\Delta f \approx \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$$

$$= 2x\Delta x + 2y\Delta y$$

$$= 4\Delta x + 2\Delta y$$

(eftersom $x=2$, $y=1$)

Vi får en punkt

*) $(2+\Delta x,\ 1+\Delta y,\ 5+4\Delta x+2\Delta y)$

Denna punkt ligger "nästan" på funktionsgrafen.

Om vi tar uttrycket *)

och varierar $\Delta x, \Delta y$
får vi en mängd punkter

som bildar ett plan.

(Planet

$(2+s, 1+t, 5+4s+2t)$

där s, t är parametrar.)

Det är ett tangentplan

till f i punkten $(2,1,5)$

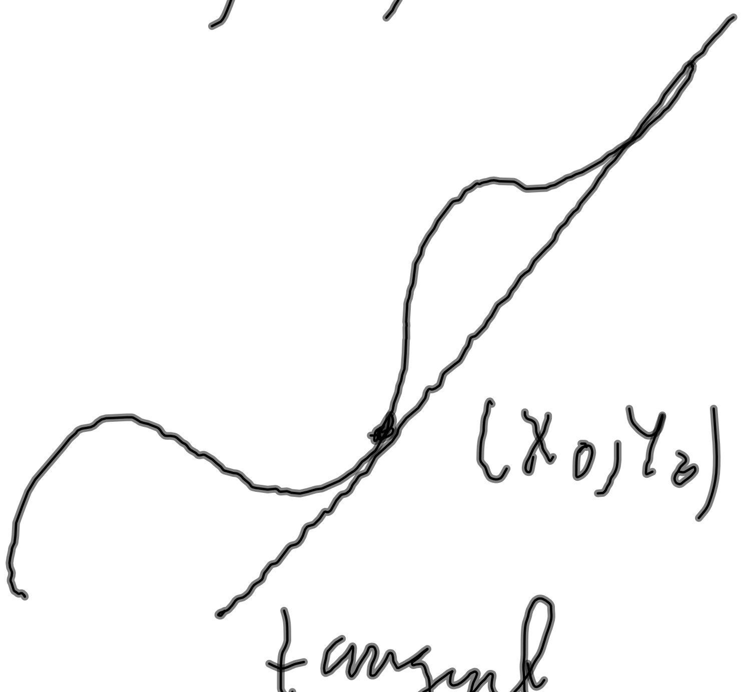
mar 24-11:09

Jämtför med envariabel:

$y = f(x)$.

Vi har en punkt

(x_0, y_0) så att $y_0 = f(x_0)$



Att en funktion är differentierbar i en punkt betyder precis att det finns ett tangentplan i punkten.

mar 24-11:15

Generell metod

för tangentplans-

beräkning:

Antag att vi har

en funktion $z = f(x,y)$

och en punkt (x_0, y_0, z_0)

mar 24-11:17

Så att $z_0 = f(x_0, y_0)$

Beräkna

$a = \frac{\partial f}{\partial x}$ i (x_0, y_0)

$b = \frac{\partial f}{\partial y}$ i (x_0, y_0)

Sedan kan vi ställa upp tangentplanet i

mar 24-11:18

parameterform:

$(X_0+s,\ Y_0+t,\ Z_0+as+bt)$

Men vi kanske vill ha planet på normalform (ekvationsform)

mar 24-11:20

Normalformen blir

$$ax + by - z = c$$

där $c = ax_0 + by_0 - z_0$

Kedjeregeln

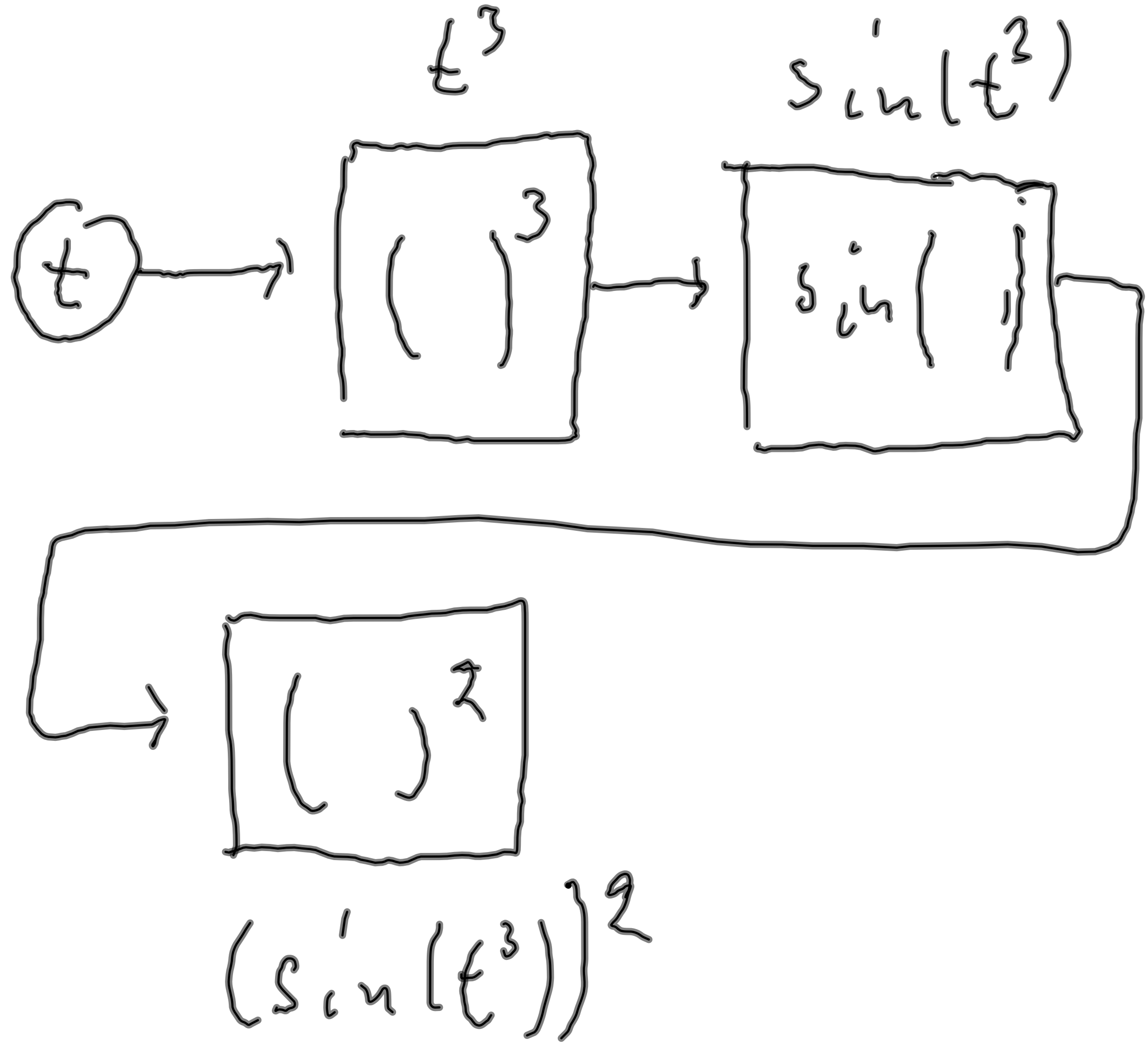
Vi tittar först på kedjeregeln i envarre.

Ex: $f(t) = (\sin(t^3))^2$

Tre funktioner har kombinerats:

mar 24-11:24

Vi kan representera dem så här:



Vi ändrar t med dt

Hur fortplantar sig ändringen?

$$t \xrightarrow{dt} \boxed{t^3} \longrightarrow 3t^2\,dt$$

$$\longrightarrow \boxed{\sin t^3} \longrightarrow \cos(t^3)\,3t^2\,dt \;\longrightarrow \ldots\ldots$$

$\dots \to \boxed{(\sin(t^3))^2}$

$$2\sin(t^3)\cos(t^3)\,3t^2\,dt$$

I varje steg får vi en faktor som är derivatan av <u>inrefunktionen</u>

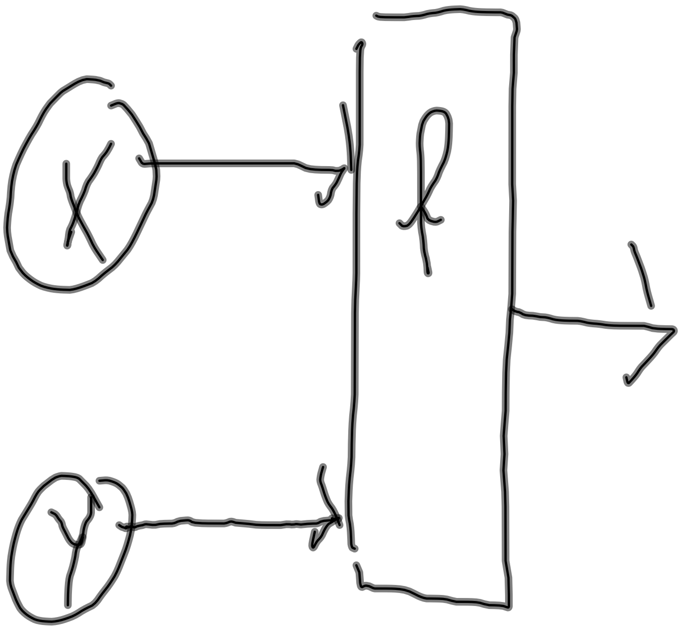
mar 24-11:30

Vi kollar nu

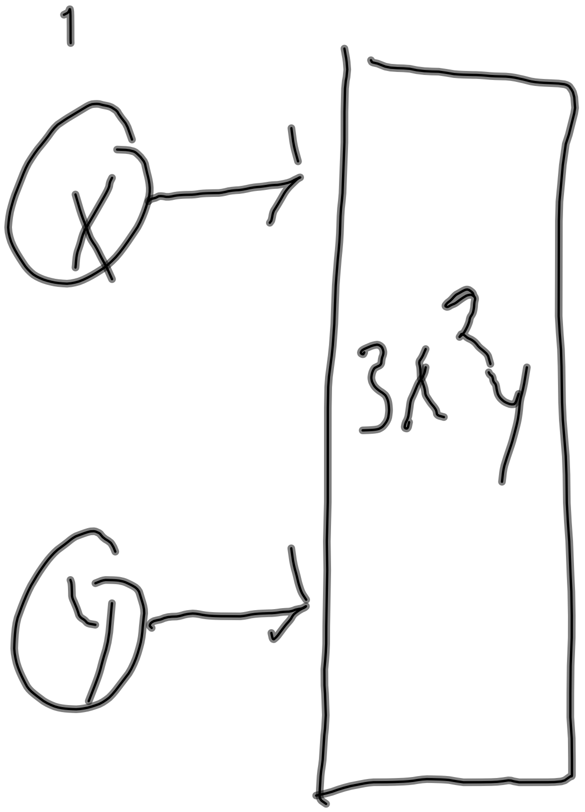
sammansättning i

flera variabler

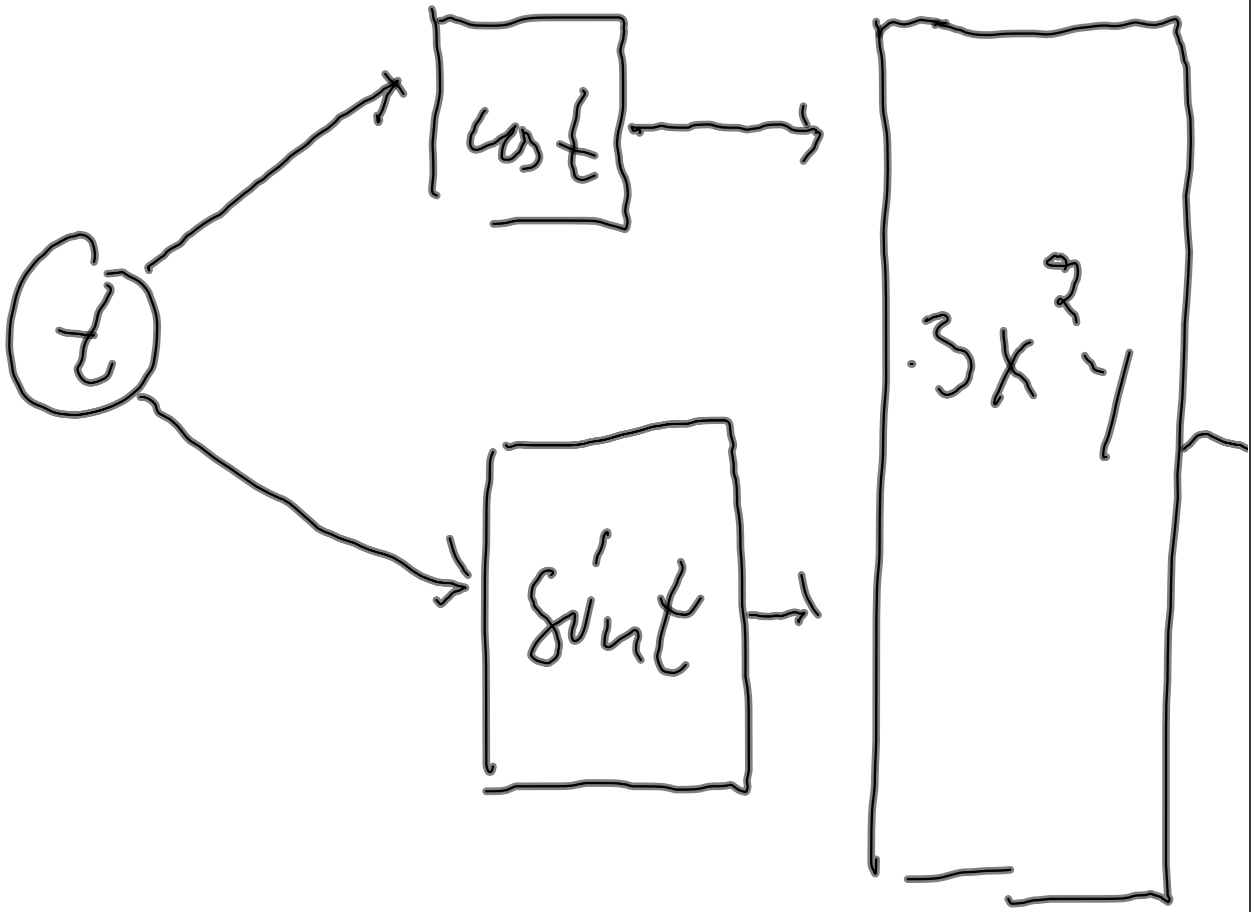
Tvåvariabel



Till ex kan vi ha

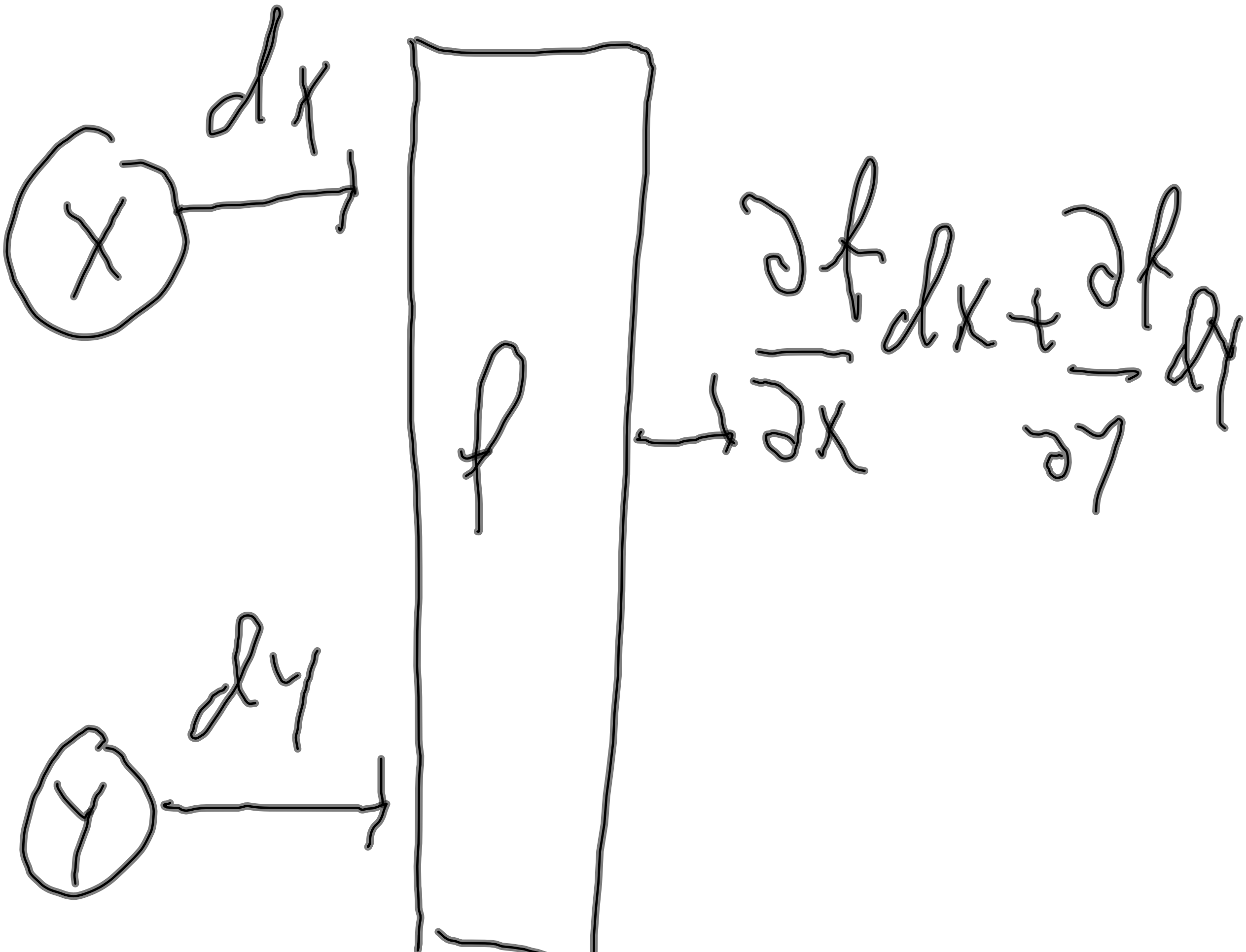


Vi kan starta med en variabel



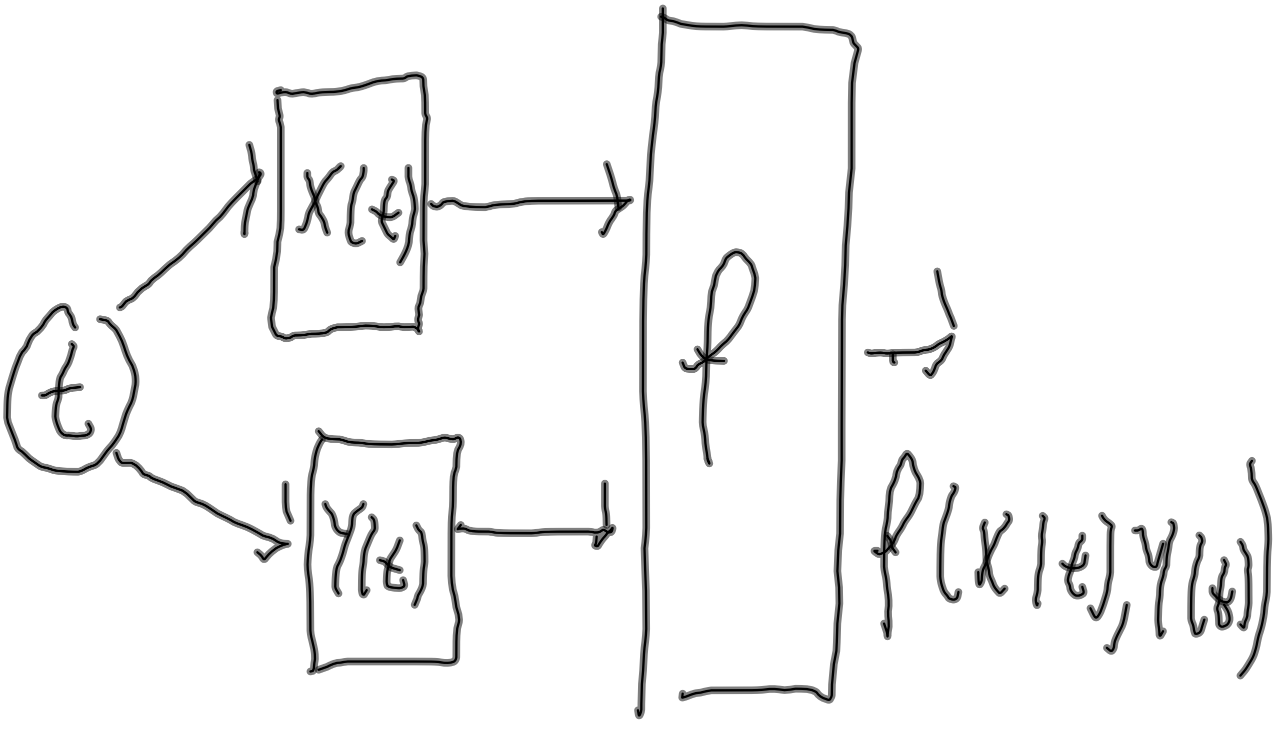
$$\rightarrow 3(\cos t)^2 \sin t$$

Hur fortplantar sig ändringar?

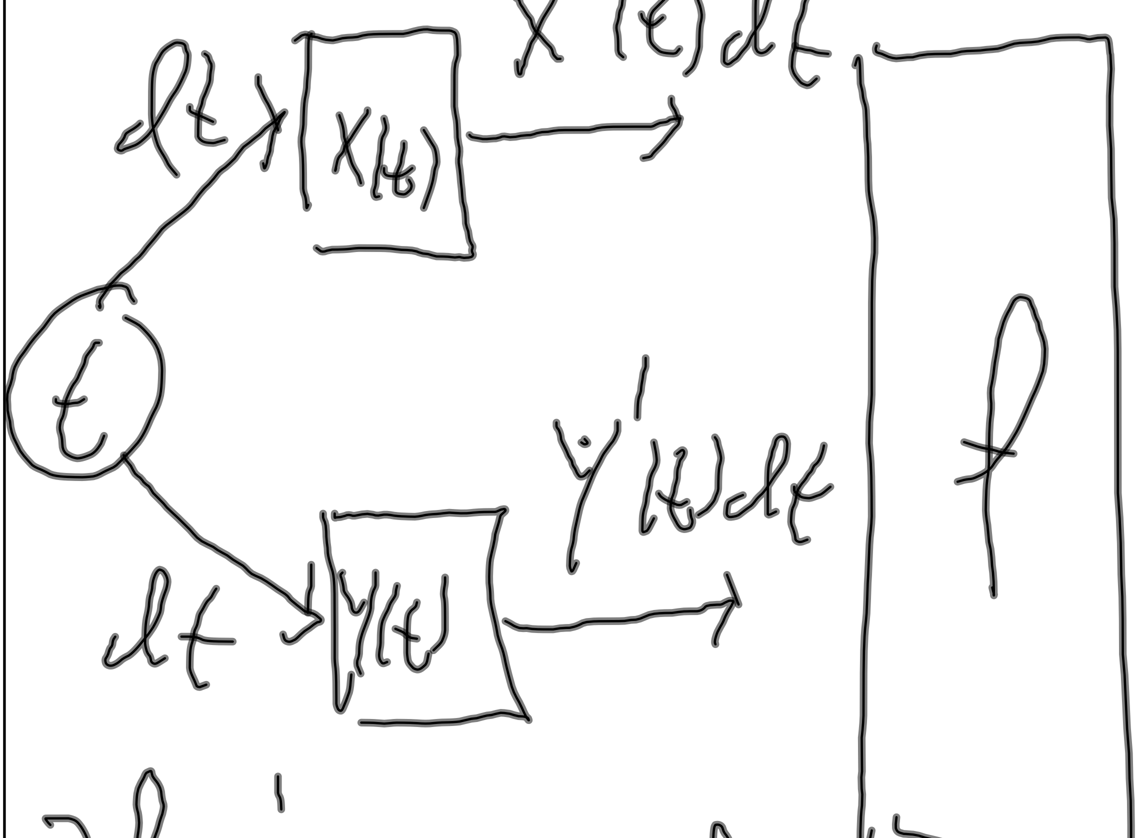


Antag att vi har en funktion

$$g(t) = f(x(t), y(t))$$



Hur fortplantar sig en ändring dt i t?



$$\frac{\partial f}{\partial x} x'(t)\,dt + \frac{\partial f}{\partial y} y'(t)\,dt$$

Det betyder att

$$dg = \left(\frac{\partial f}{\partial x}x' + \frac{\partial f}{\partial y}y'\right)dt$$

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}x' + \frac{\partial f}{\partial y}y'$$

mar 24-11:41