Föreläsning 4

Förra gången.

Kedjeregeln

$$g(t) = f(x(t), y(t))$$

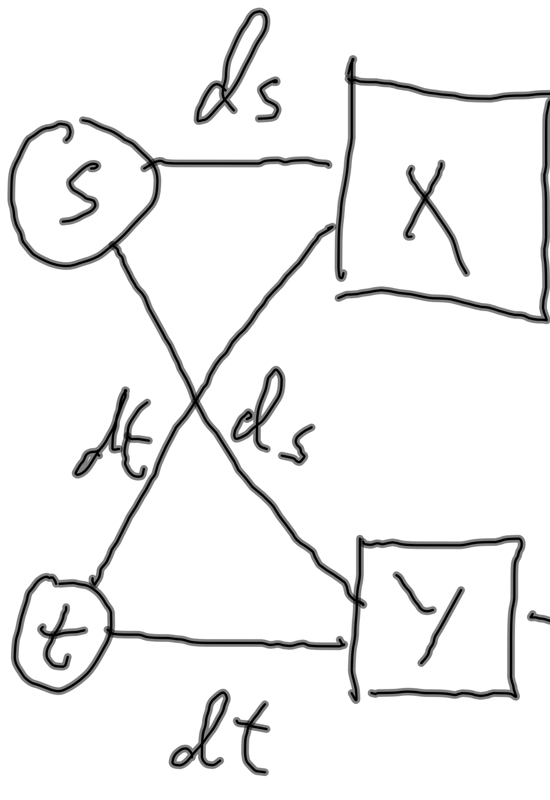
$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y} y'(t)$$

Nu ser vi på ett mer avancerat fall.

Vi har två variabler s, t och x, y som funktion av dem.

Vi har också en funktion $f(x, y)$

Hur fortplantar sig ändringar i s,t



$$\frac{\partial x}{\partial s}ds + \frac{\partial x}{\partial t}dt$$

$$\frac{\partial y}{\partial s}ds + \frac{\partial y}{\partial t}dt$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial s}ds + \frac{\partial x}{\partial t}dt\right) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial s}ds + \frac{\partial y}{\partial t}dt\right)$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} \right) ds$$

$$+ \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} \right) dt$$

Om $g(s,t) = f(x(s,t), y(s,t))$

så får vi

$$\frac{\partial g}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

Enkla fall av "integrering".

<u>Ex</u> $g(x,y) = x + x^2 y$

Finns det en funktion $f(x,y)$ så att

mar 28-10:09

$$\frac{\partial f}{\partial x} = g(x,y)^?$$

Vi integrerar i x

Vi tänker på y som en konstant.

$$\int (x + x^5 y)\,dx = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} y$$

$+\,?$

Vad bör ? vara?

Det bör vara något
som försvinner vid
derivation med X.

? kan vara vilken funktion
som helst som bara
beror på Y.

Vi sätter den till h(Y).

Det ger

$$\int (x + x^2 y)\,dx = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}y + h(y)$$

Detta är fullständiga lösningen på integrations-problemet.

mar 28-10:17

Mer avancerat problem

Finns det en funktion $f(x,y)$ så att

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \quad , \frac{\partial f}{\partial y} = x+y \quad ?$$

Vi försöker först lösa

$\frac{\partial f}{\partial x} = y$ genom att integrera. (Integrera i x)

$$\int y\,dx = xy + h(y)$$

Detta løser $\frac{\partial f}{\partial x} = y$

(med $f(x,y) = xy + h(y)$)

Kan vi nu ordna $\frac{\partial f}{\partial y} = x + y$?

Vi vet att

$$f(x,y) = xy + h(y)$$

mar 28-10:21

Då måste $\frac{\partial f}{\partial y} = x + h'(y)$

och detta skall vara

$x + y$.

Då måste $h'(y) = y$

Använd vanlig envariabel-integration

$$\int y\,dy = \frac{y^2}{2} + C$$

$$f(x,y) = xy + \frac{y^2}{2} + C$$

(C kan inte bestämmas.)

Enklare exempel

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 \ , \ \frac{\partial f}{\partial y} = 1$$

$$\int 1 \, dx = x + h(y)$$

$$f(x,y) = x + h(y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = h'(y)$$

Vi vill att detta är 1

$$h'(y) = 1$$

$$\int 1\,dy = y + C$$

$$f(x,y) = x + y + C$$

Fungerar den här metoden alltid?

Nej!

Ex Kan vi hitta f så att

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x \quad ?$$

Vi testar vår metod:

$$\int y^2 dx = xy^2 + h(y)$$

$$= f$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy + h'(y)$$

Vi vill att detta skall vara x.

mar 28-10:32

Det ger

$$2xy + h'(y) = x$$

$$\underbrace{h'(y) = x - 2xy}$$

Detta är omöjligt!

Generellt:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = a(x,y) \quad \frac{\partial f}{\partial y} = b(x,y)$$

mar 28-10:34

har lösningar precis

då $\frac{\partial b}{\partial x} = \frac{\partial a}{\partial y}$

I våra fall

1. $a = y \quad b = x + y$

$\frac{\partial b}{\partial x} = 1 \quad \frac{\partial a}{\partial y} = 1$ ok.

2. $a = 1 \quad b = 1$ ok.

$\frac{\partial b}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial a}{\partial y} = 0$

3. $a = y^2 \quad b = x$

$$\frac{\partial b}{\partial x} = 1 \quad \frac{\partial a}{\partial y} = 2y$$

Inte ok!

Men i slutet av kursen då vi tittar på punktlider HH

mar 28-10:38

vektorfält,

Gradienter

Vi har sett att

$$\Delta f \approx \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$$

Ofta används notationen

$\Delta x = h$, $\Delta y = k$

(t.ex i boken)

mar 28-10:40

$$\Delta f \approx \frac{\partial f}{\partial x} h + \frac{\partial f}{\partial y} k$$

Vi kan använda vektorform:

$$\Delta f \approx \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \cdot (h, k)$$

Skalärmultiplikation.

Vi använder beteckningen

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Kallas för gradienten till f (eller grad f)

<u>Ex</u> $f = x^2 - xy$

$$\nabla f = (2x - y, -x)$$

mar 28-11:03

Ex $f = x^3 + y^2$

$\nabla f = (3x^2, 2y)$

Varför använder vi vektornotation?

Jo, vi kan uttrycka vissa andra saker på ett enkelt sätt.

mar 28-11:04

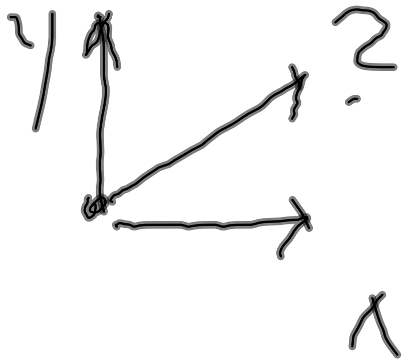
Riktningsderivata

$\frac{\partial f}{\partial x}$ är derivatan i x-riktning.

$\frac{\partial f}{\partial y}$ är derivatan i y-riktning.

Men andra riktningar då?

mar 28-11:06



Om vi ändrar med

$(\Delta x, \Delta y)$ så får vi

ungefär ändringen

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \cdot (\Delta x, \Delta y)$$

$(\Delta x, \Delta y)$ ger en ändring

mar 28-11:07

med en viss riktning.

Riktningar kan anges med vektorer.

<u>Def</u>: En riktningsvektor är en vektor $\bar{v}$ med $|\bar{v}|=1$.

<u>Ex</u> $\bar{v}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ är

mar 28-11:09

en riktningsvektor
med vinkel 45° mot
x-axeln.

$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Om $\bar{u}$ <u>inte</u> är
en riktningsvektor

mar 28-11:11

Så kan den "göras" om till $\bar{v} = \dfrac{\bar{u}}{|\bar{u}|}$

som är en riktnings-vektor. Detta kallas för <u>normering</u> av $\bar{u}$.

mar 28-11:13

<u>Def</u>: Om vi har en funktion f och en riktningsvektor $\bar{v}$ så är derivatan av f i $\bar{v}$:s riktning

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \cdot (v_x, v_y)$$

$$= \nabla f \cdot \bar{v}$$

mar 28-11:14

Specialfall

$\bar{v} = (1,0)$ ger

$\nabla f \cdot \bar{v} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \cdot (1,0)$

$= \frac{\partial f}{\partial x}$

Ex: $f(x,y) = \dfrac{x}{x+y^2}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1\cdot(x+y^2) - 1\cdot x}{(x+y^2)^2} =$$

$$= \frac{y^2}{(x+y^2)^2}$$

mar 28-11:16

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-2yx}{(x+y^2)^2}$$

Om vi väljer en viss punkt t.ex $(1,1)$

så får vi

$$\nabla f = \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right)$$

Vi sätter

$\bar{v} = (\cos\varphi, \sin\varphi)$

(Detta ger alla riktningsvektorer.)

Derivatan i riktningen $\bar{v}$ blir $\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right)(\cos\varphi, \sin\varphi)$

$= \frac{\cos\varphi}{4} - \frac{\sin\varphi}{2}$

mar 28-11:20

Nivåkurvor

Om $z = f(x,y)$

så ger ekvationerna

$k = f(x,y)$ en mängd

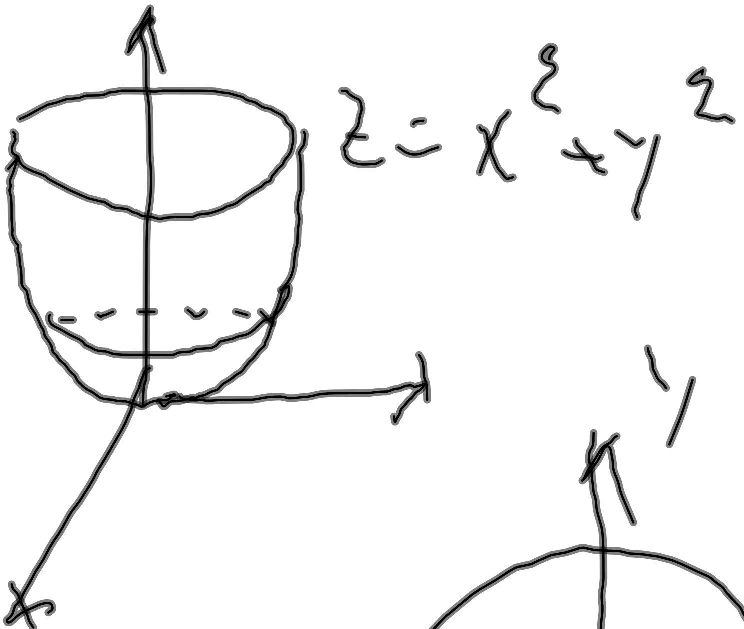
nivåkurvor.

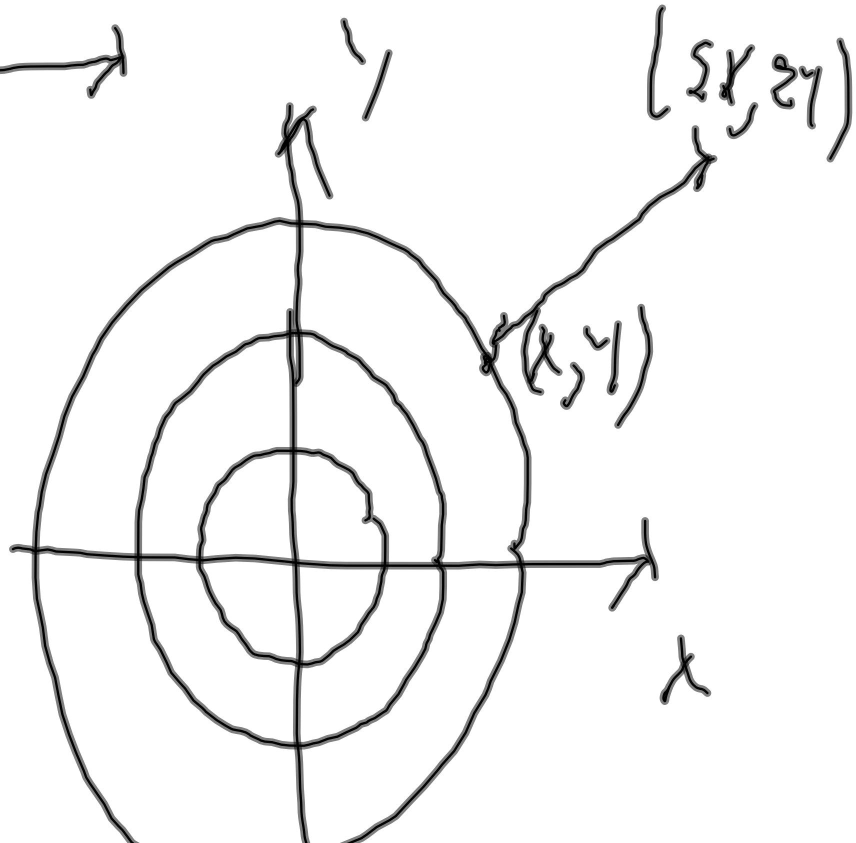
En nivåkurva är en

s.k. <u>implicit</u> funktion.

mar 28-11:26

Ex $z = x^2 + y^2$





Nivåkurvorna är cirklar.

funktionen x^2+y^2

har gradienten

$(2x, 2y)$

Om vi tar en punkt

(x,y) på någon nivå-

kurva så är $(2x, 2y)$

vinkelrät mot nivåkurvan.

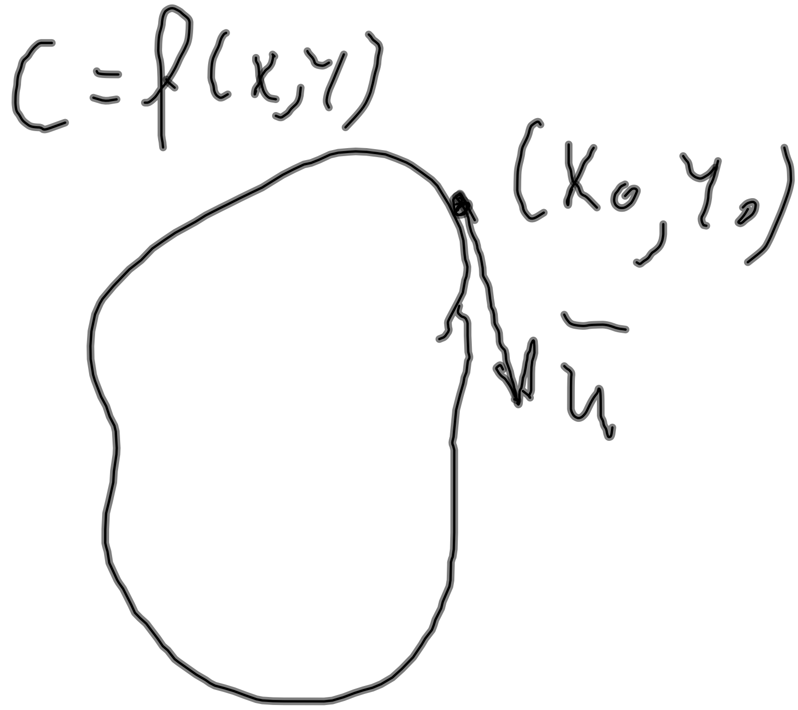
Detta är <u>inte</u> en slump.

<u>Sats:</u> Om vi har en nivåkurva $c = f(x, y)$ och (x_0, y_0) är en punkt på nivåkurvan så är ∇f (beräknad i x_0, y_0)

mar 28-11:31

är en normal till kurvan.

Bevisskiss



Om $\bar{u}$ är en tangent till kurvan så måste derivatan av f i $\bar{u}$:s riktning vara 0.

Det betyder att

$\nabla f \cdot \bar{u} = 0$

Detta betyder att gradienten är en normal

mar 28-11:35

till kurvan.

Snabbaste ökningen

Om vi är i en punkt (x_0, y_0) och vill veta i vilken riktning f ökar snabbast, hur gör vi då?

mar 28-11:37

Den riktning som gör $\nabla f \cdot \bar{v}$ maximal är den riktning som är parallell med ∇f

Det är den riktning som ges av ∇f.

(Riktning som är vinkelrät mot f:s nivåkurvor.)

Allt detta går att generalisera till flera dimensioner.

Om $f(x,y,z)$ är en 3-variabelfunktion gäller

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

Vi kan definiera riktningsvektorer $\bar{v}$ och riktningsderivator $\nabla f \cdot \bar{v}$ i tre dimensioner också.

Gradienterna kommer att vara normaler till nivåkurvor