Förra gången lärde
i oss drivs om gradienten

$z = f(x,y)$

$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$

∇f riktning är den
riktning som f växer
snabbast !!

mar 29-12:58

Hur snabbt?

$|\nabla f|$ anger ändring i f per längdenhet.

Om vi har en nivåkurva

$C = f(x, y)$ så är ∇f en normal till kurvan.

Nu lär vi oss dessutom hur vi beräknar tangenter.

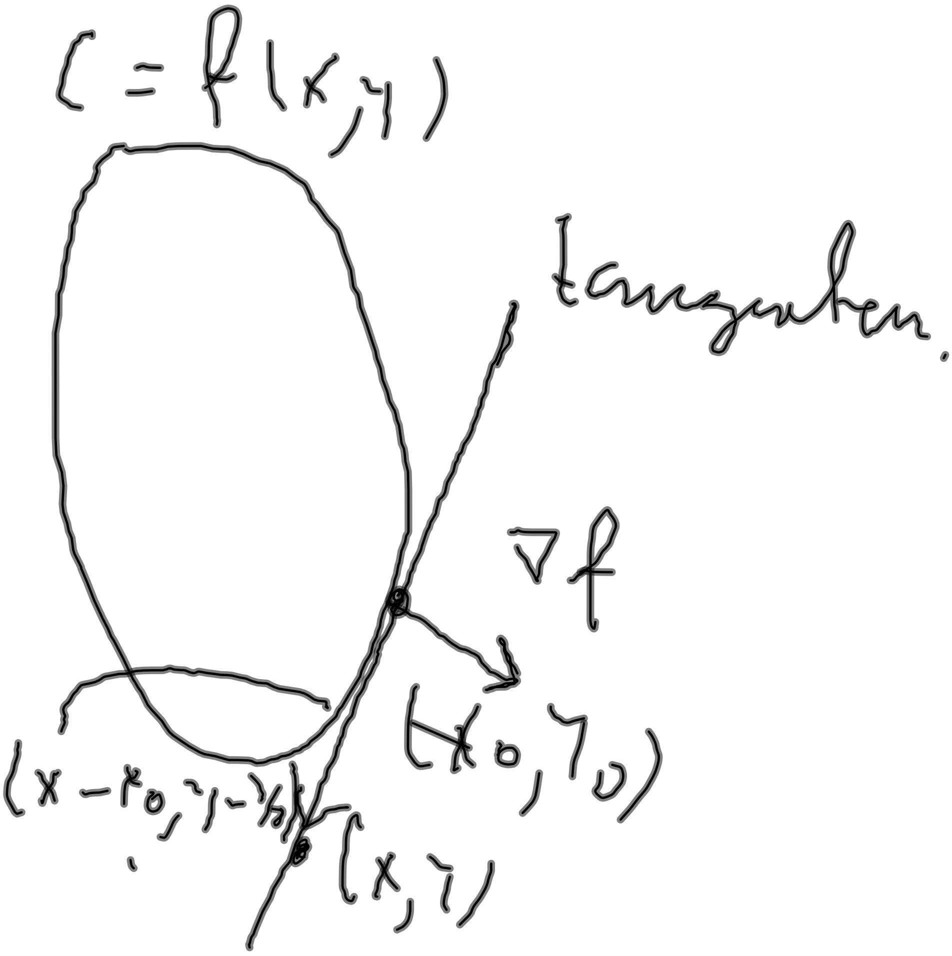
Vi har den implicita kurvan $C = f(x,y)$ och en punkt (x_0, y_0) på kurvan.

mar 29-13:07

Vi vill bestämma tangenten i (x_0, y_0).

(En metod är att "lösa ut" y:

$y = g(x)$ och göra som vanligt. Men då måste vi lösa en ekvation.)



Antag att (x,y) är en punkt på tangenten

Då måste $\nabla f \cdot (x-x_0, y-y_0) = 0$

mar 29-13:11

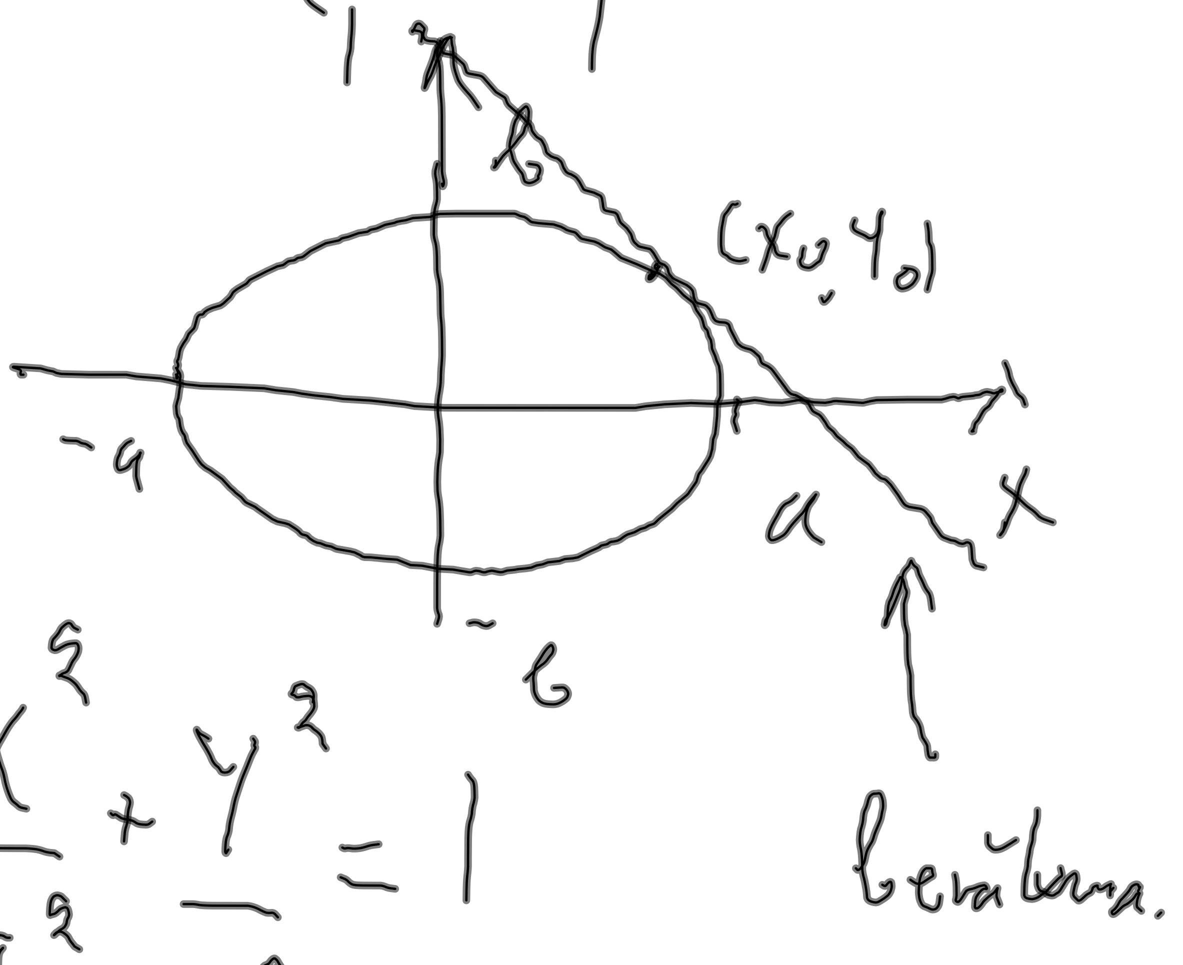
Vi får ekvationen

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \cdot (x - x_0, y - y_0) = 0$$

dvs $$\frac{\partial f}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(y - y_0) = 0$$

(Obs. x, y är variabler
x_0, y_0 är kända.)

Ex: Beräkna tangenten till en ellips.



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Vi sätter

$$f(x,y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

Då blir ellipsen

$$f(x,y) = 1$$

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) =$$

$$= \left(\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}\right)$$

mar 29-13:17

Nu väljer vi punkten (x_0, y_0) och får då gradienten

$$\left(\frac{2x_0}{a^2}, \frac{2y_0}{b^2}\right)$$

Tangentens ekvation är $\left(\frac{2x_0}{a^2}, \frac{2y_0}{b^2}\right) \cdot (x-x_0, y-y_0) = 0$

mar 29-13:20

$$\frac{2x_0(x-x_0)}{a^2}+\frac{2y_0(y-y_0)}{b^2}=0$$

Kan skrivas om till

$$\frac{2x_0x}{a^2}+\frac{2y_0y}{b^2}=\frac{2x_0^2}{a^2}+\frac{2y_0^2}{b^2}$$

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}$$

mar 29-13:21

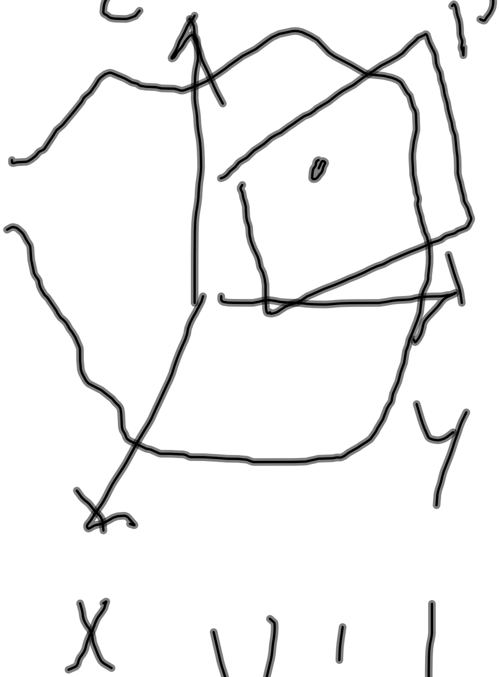
Eftersom (x_0, y_0) ligger på ellipsen måste $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$$

Detta är tangentens ekvation.

Naturlig generalisering
till 3 dimensioner:
Tangentplan.
(Vi har redan talat
om tangentplan, men
detta är ett annat
angreppssätt på dem.)

$C = f(x,y,z)$ definierar en yta i $\mathbb{R}^3$.



(x_0, y_0, z_0) ligger på ytan.

Vi har ett tangentplan P i (x_0, y_0, z_0)

Vad har det för ekvation?

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

∇f är en normal till ytan. Om (x, y, z) ligger på tangentplanet måste $\nabla f \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$

Det ger

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(z - z_0) = 0$$

mar 29-13:30

$$\frac{\partial f}{\partial x} x + \frac{\partial f}{\partial y} y + \frac{\partial f}{\partial z} z =$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} x_0 + \frac{\partial f}{\partial y} y_0 + \frac{\partial f}{\partial z} z_0$$

mar 29-13:32

Högre ordningens derivator

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$ betyder att

vi deriverar 2 gången

m.a.p x.

Ex: $f(x,y) = x^5 y^7$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 20x^3y^7$$

$$f(x,y) = xe^{\sin(y^7)}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ betyder förstås

deriverting 2 gånger

m.a.p y.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

mar 29-13:36

<u>Obs:</u> Det gäller "oftast" att

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

<u>Ex:</u> $f(x,y) = x^3 y^2$

mar 29-13:39

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y} x^3 y^2\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} 2x^3 y = 6x^2 y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} x^3 y^2\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial y} 3x^2 y^2 = 6x^2 y$$

Mer komplicerat:

$$f(x,y) = \sin\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\sin\left(\frac{x}{y}\right)\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\cos\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)\right)$$

$$= -\sin\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\frac{1}{y}\left(-\frac{x}{y^2}\right) +$$

mar 29-13:42

$$\cos\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right)$$

$$= \sin\left(\frac{x}{y}\right)\frac{x}{y^3} - \cos\left(\frac{x}{y}\right)\frac{1}{y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\sin\left(\frac{x}{y}\right)\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\left(\cos\left(\frac{x}{y}\right)\frac{1}{y}\right) =$$

$$-\sin\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)\cdot\frac{1}{y}$$

$$+\cos\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right)$$

$$=\sin\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{x}{y^3}\right)$$

$$-\cos\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\frac{1}{y^2}.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$$

mar 29-13:46

Sats: Om vi har ett område D och

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

alla existerar och är kontinuerliga i D så gäller

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Allt detta går att generalisera

Vi förstår t.ex vad

$$\frac{\partial^{17} f}{\partial x^{10}\,\partial y^{5}\,\partial z^{2}}$$

betyder.

Partiella differential-ekvationer

Ex $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$

är en P.D.E.

Hur löser vi den?

Vi vill hitta alla f

mar 29-14:07

som är lösningar,

Integrera:

$$\int \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,dx = \int 0\,dx$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = g(y) \text{ där}$$

g är godtycklig.

mar 29-14:08

$$\int \frac{\partial f}{\partial x}\,dx = \int g(y)\,dx$$

$$\underbrace{f = x\,g(y) + h(y)}_{\text{Detta är fullständiga lösningen.}}$$

Ex:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\int \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx = \int 0 \, dx$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = g(y)$$

$$\int \frac{\partial f}{\partial y} dy = \int g(y) dy$$

mar 29-14:14

$$f = G(y) + h(x)$$

där $G'(y) = g(y)$

Eftersom g är godtycklig är faktiskt G också godtycklig.

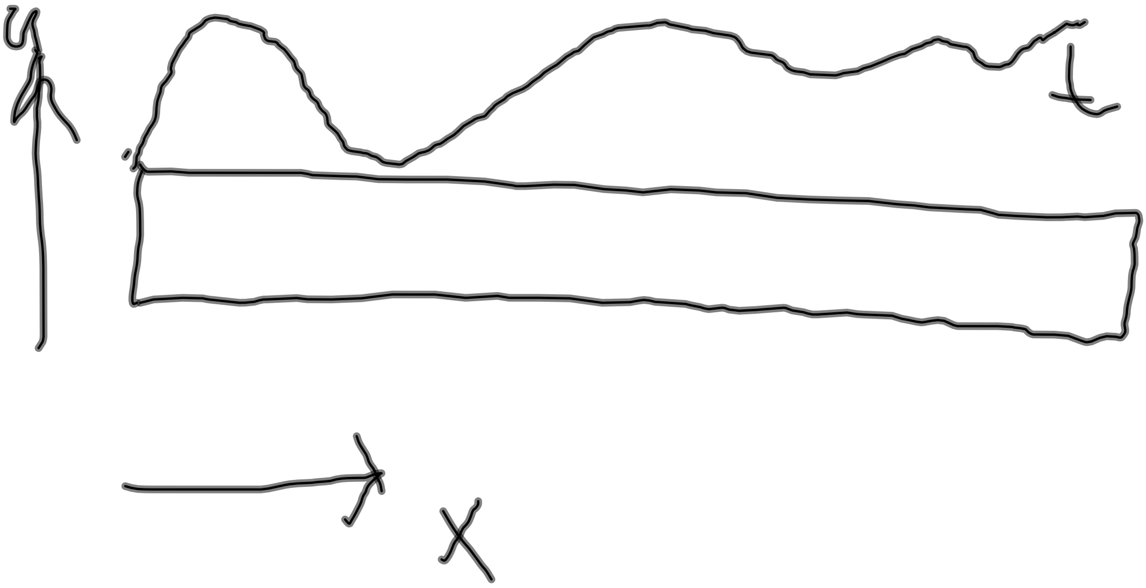
f kan skrivas som
$$g(y) + h(x)$$

mar 29-14:16

Berömda differential-ekvationer

Värmeledningsekvationen

$u(x,t)$ är temperaturen i en stav



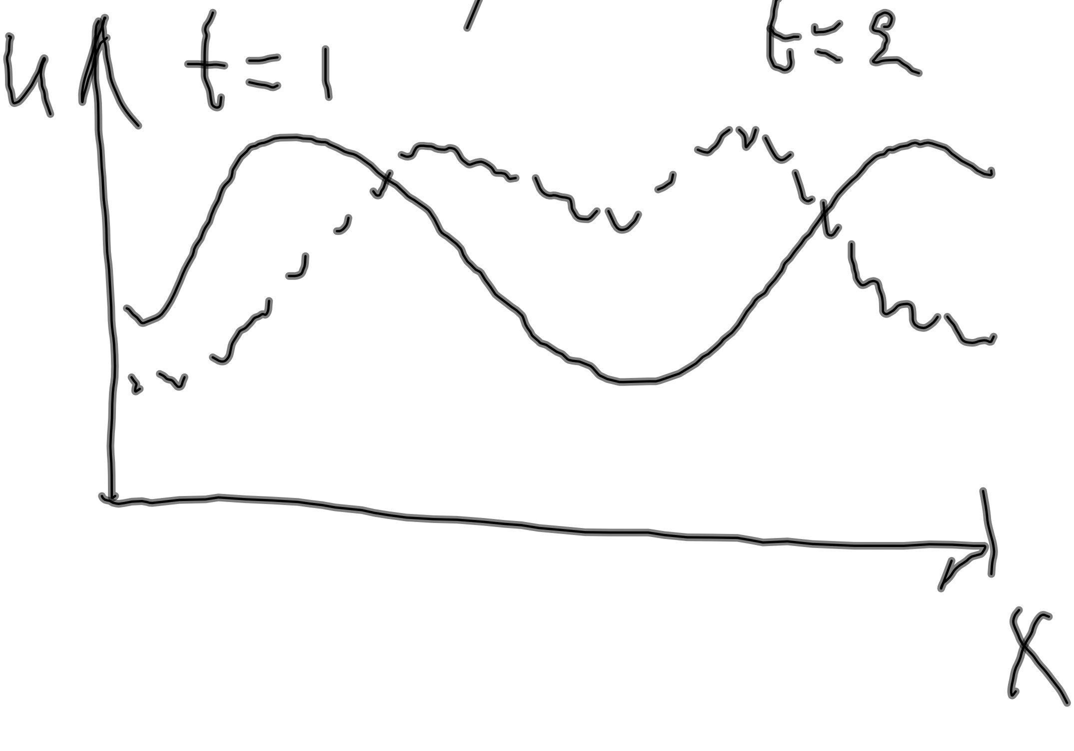
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = k \frac{\partial u}{\partial t}$$

k är värmeledningskoefficienten.

Vågrörelseekvationen

Vi har en våg

$u(x,t)$



$$c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

där c är våghastig-heten.

Lösning av ekvationen

Vi vill lösa

$$c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

Vi sätter $u = x + ct$

$v = x - ct$

mar 29-14:29

Då gäller

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}$$

(kedjeregeln)

$$\frac{\partial f}{\partial t} = c\left(\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v}\right)$$

Varför?

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial v}$$

$$= 1 \cdot \frac{\partial f}{\partial u} + 1 \cdot \frac{\partial f}{\partial v}$$

o.s.v.

mar 29-14:32

Om vi gör derivering
två gånger kommer
vi fram till att

$$c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

kan översättas till

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = 0$$

Det betyder att

$$f = g(u) + h(v)$$

d.v.s.

$$f = g(x+ct) + h(x-ct)$$

Taylorutveckling

Vi vet att om h, k

är små så gäller

$$f(x+h, y+k) \approx f(x,y) + \frac{\partial f}{\partial x} h + \frac{\partial f}{\partial y} k$$

Men vi kan ta med fler termer!

mar 29-14:38

En bättre uppskattning

är

$$f(x+h, y+k) \approx f(x,y)$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial x} h + \frac{\partial f}{\partial y} k +$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} h^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} hk \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} k^2 \right)$$

mar 29-14:40

Sista termen är en
2:a ordningens term
i h, k

Detta gör att
generalisera till 3
variabler

mar 29-14:42

$$f(x+h, y+k, z+l) \simeq$$

$$f(x,y,z) + \frac{\partial f}{\partial x} h + \frac{\partial f}{\partial y} k + \frac{\partial f}{\partial z} l$$

$$+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} h^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} k^2 \right.$$

$$+ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} l^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} hk$$

$$\left. + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} hl + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} kl \right)$$

Väldigt generellt.

$$f(x+h, y+k) = P_0 + P_1 + P_2 + \ldots + P_n + \ldots$$

$$P_0 = f(x,y)$$

$$P_1 = \frac{\partial f}{\partial x} h + \frac{\partial f}{\partial y} k$$

mar 29-14:47

$$P_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial^n f}{\partial x^n} h^n + \ldots\right.$$

$$\ldots \frac{n!}{a!(n-a)!}\frac{\partial^n f}{\partial x^a \partial y^{n-a}} h^a k^{n-a}$$

$$\left.\ldots + \frac{\partial^n f}{\partial y^n} k^n\right)$$

mar 29-14:48