Föreläsning 6

Parametriserade kurvor.

<u>Ex</u>: Kurvan

$x^2+y^2=1$ (en cirkel)

är given på <u>implicit</u> form.

Vi kan beskriva
den med y som
funktion av x:

$$y = \pm\sqrt{1-x^2}$$

Ofta är det bättre
att göra en parametrisering

mar 31-10:04

Sätt $\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases}$

$$0 \leq t \leq 2\pi,$$

t är en <u>parameter</u>.

Liknande saker kan göras i $\mathbb{R}^3$.

(Parametrisering är ännu viktigare där.)

mar 31-10:05

Ex: Vi har en cirkel som är parallell med YZ-planet, har mittpunkt i $(1,4,3)$ och har radie 7. Hur kan vi ange den på parameterform?

mar 31-10:09

Att den är parallell
med YZ-planet betyder
att X är konstant.
Så $x=1$ på hela kurvan.
Hur ser den ut i YZ?
Mittpunkten är (4,3)
och radien är 7.

mar 31-10:10

Vi får parametriseringen

$(x(t), y(t), z(t)) =$

$= (1, 4+7\cos t, 3+7\sin t)$

$0 \le t \le 2\pi$

Ex En linje går genom punkterna $(2,-1,3)$ och $(7,1,-2)$.

mar 31-10:13

Hur kan den anges på parameterform?

Sätt

$$\bar{d} = (7,1,-2)-(2,-1,3)$$

$$= (5,2,-5)$$

Vi söker sedan

$$(x(t), y(t), z(t)) =$$

$$= (2, -1, 3) + t\,(5, 2, -5)$$

$t \in \mathbb{R}$

Om vi sätter

$$\bar{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

och $\bar{P}_1 = (2, -1, 3)$

kan vi skriva

mar 31-10:16

$$\bar{r}(t) = \bar{P}_1 + t\bar{d}$$

Generellt:

En parametriserad kurva har formen

$$\bar{r}(t) = (x(t), y(t))$$

$$t \in [a, b]$$

eller

$$\bar{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

$$t \in [a, b].$$

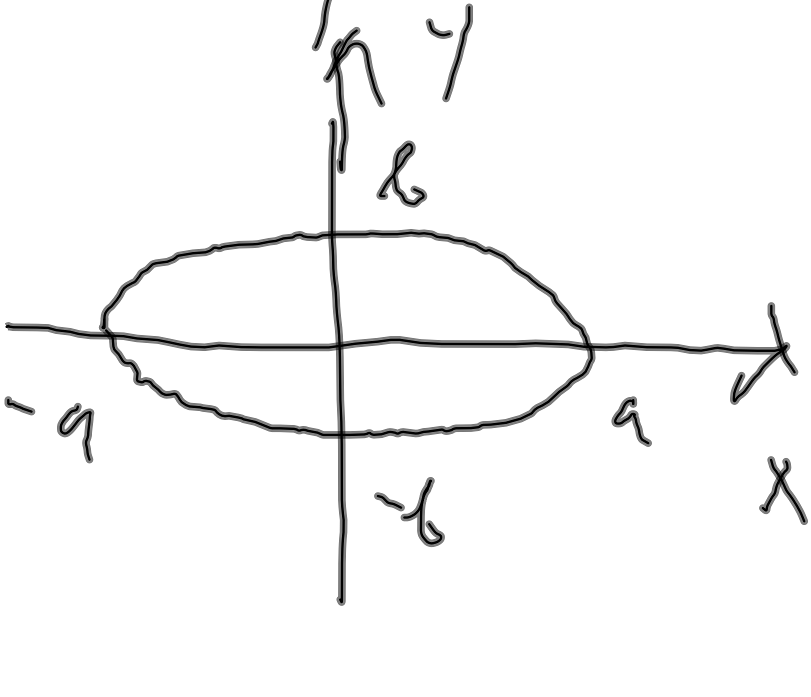
<u>Obs</u>: En vanlig funktion $y = f(x)$ kan beskrivas på parameterform

mar 31-10:19

genom att sätta

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = f(t) \end{cases}$$

Ex: Ellips



$$\begin{cases} x(t) = a\cos t \\ y(t) = b\sin t \end{cases}$$

$$0 \leq t \leq 2\pi$$

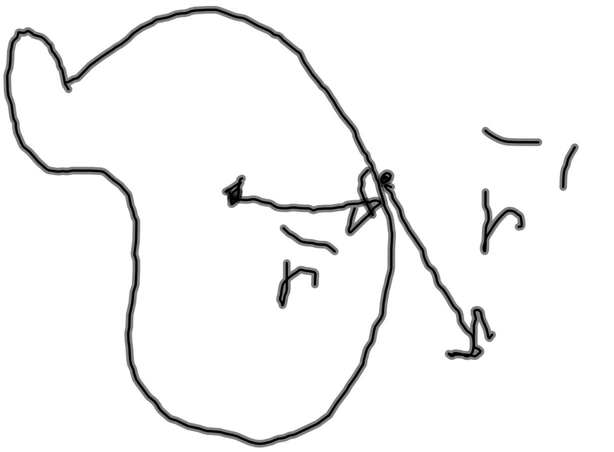
<u>Tangenten till kurvan</u>

Om $\bar{r}(t) = (x(t), y(t))$

så är tangenten till

$\bar{r}(t)$:

$$\bar{r}'(t) = (x'(t), y'(t))$$



Det går att visa att
$\bar{r}'$:s riktning är
parallell med kurvan
och att $|\bar{r}'|$ anger
"farten" vi rör oss med
om t tolkas som tid.
(Mer exakt anger $|\bar{r}'|$
längdändring per t-enhet.)

mar 31-10:26

Ex Cirkel

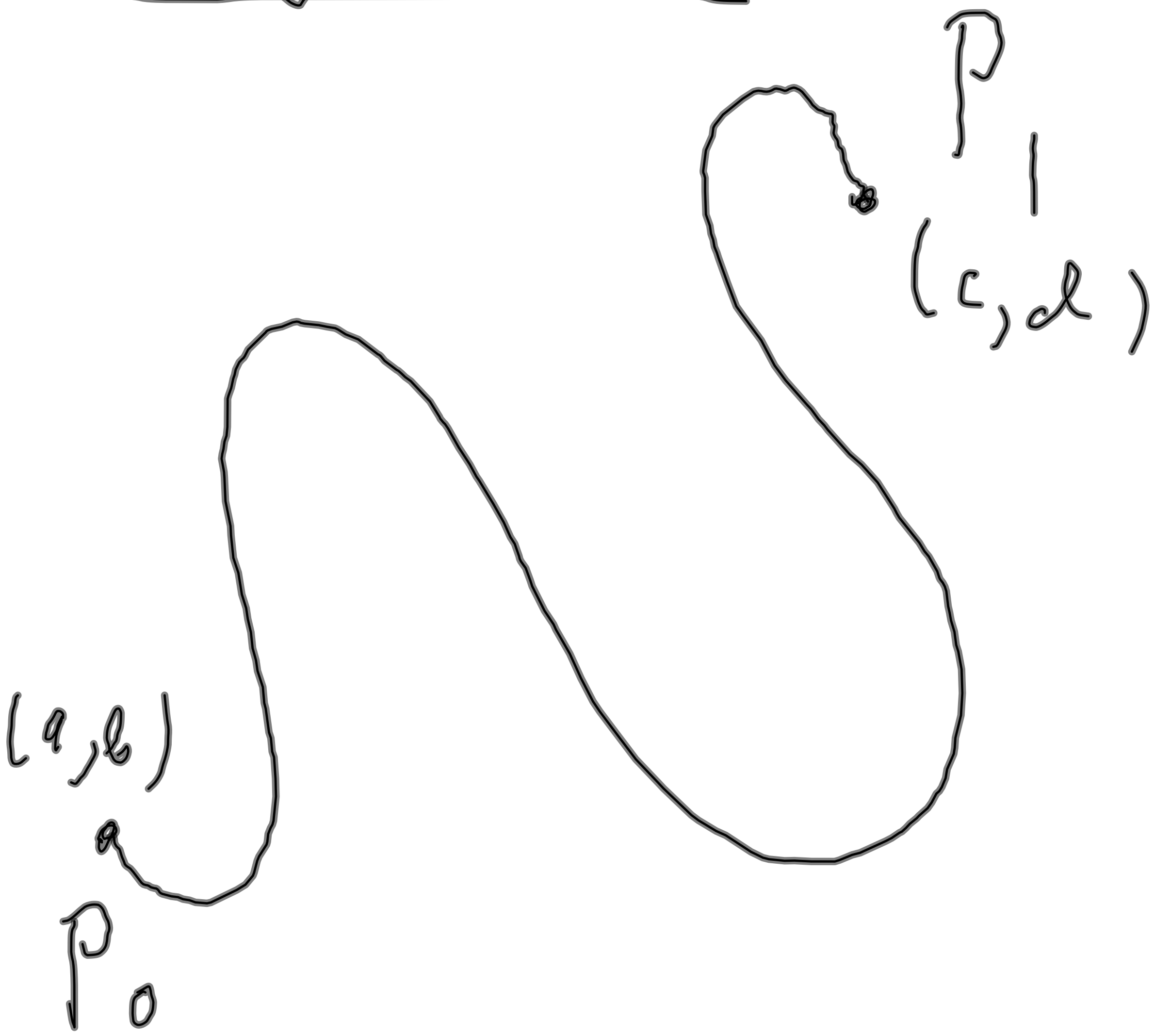
$\bar{r}(t) = (\cos t, \sin t)$

$\bar{r}'(t) = \left(\frac{d}{dt}\cos t, \frac{d}{dt}\sin t\right)$

$= (-\sin t, \cos t)$

mar 31-10:28

Båglängd



Hur lång är kurvan
från P_0 till P_1?

Om kurvan är på parameterform går det "i princip" att räkna ut det:

Kalla båglängden för s

$$s = \int_{t_0} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt$$

där t_0 ger punkten

P_0 och t_1 ger

punkten P_1.

<u>Ex</u>: En cirkel med

radien R.

$$\begin{cases} x(t) = R\cos t \\ y(t) = R\sin t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'(t) = -R\sin t \\ y'(t) = R\cos t \end{cases}$$

$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 =$$

$$R^2\sin^2 t + R^2\cos^2 t =$$

$$= R^2$$

$$S = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2}\, dt = \int_0^{2\pi} R\, dt = 2\pi R$$

mar 31-10:36

Obs: Formeln för båglängd ger ofta extremt svåra integraler!

Yta på parameterform.

En yta kan ges

1) Explicit genom

$$z = f(x, y)$$

2) Implicit genom

$$f(x, y, z) = C$$

mar 31-10:40

Ett tredje alternativ är

3) Parameterform

$$\left(X(s,t), Y(s,t), Z(s,t)\right)$$

Dessutom måste vi ange vilka värden s,t kan ha.

mar 31-10:42

Ex: Ett halvklot

En möjlighet är att använda parametrar φ, θ. Antag att halvklotet har radie R

mar 31-10:43

$$\begin{cases} X = R\cos\varphi\sin\theta \\ Y = R\sin\varphi\sin\theta \\ Z = R\cos\theta \end{cases}$$

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi \qquad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

mar 31-10:45

Tangenter till ytor

Om vi sätter

$$\bar{r}(s,t) = (x(s,t), y(s,t), z(s,t))$$ så är

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial s} = \left(\frac{\partial x}{\partial s}, \frac{\partial y}{\partial s}, \frac{\partial z}{\partial s}\right)$$

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial t} = \left(\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial t}\right)$$

mar 31-11:00

Dessa vektorer är båda tangenter till ytan.

De är inte de enda tangenterna.

Mängden av tangenter kan skrivas på formen

$$\alpha \frac{\partial \bar{r}}{\partial s} + \beta \frac{\partial \bar{r}}{\partial t}$$

Tangentplanet "spänns upp" av $\frac{\partial \bar{r}}{\partial s}$ och $\frac{\partial \bar{r}}{\partial t}$.

Normalen till en yta.

Om ytan ges av

$f(x,y,z)=C$ så är

∇f en normal till ytan.

mar 31-11:05

Detta fungerar bara om kurvan är på implicit form.

Om ytan är på parameterform gäller

$$\bar{n} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial t}$$

mar 31-11:07

Jämförelser

Implicit form

1) Ytan är svår att plotta.

2) Normalen är lätt att beräkna.

3) Tangenten lite svårare.

Parameterform

1) Ytan är lätt
att plotta.

2) Normalen är lite
krånglig att beräkna.

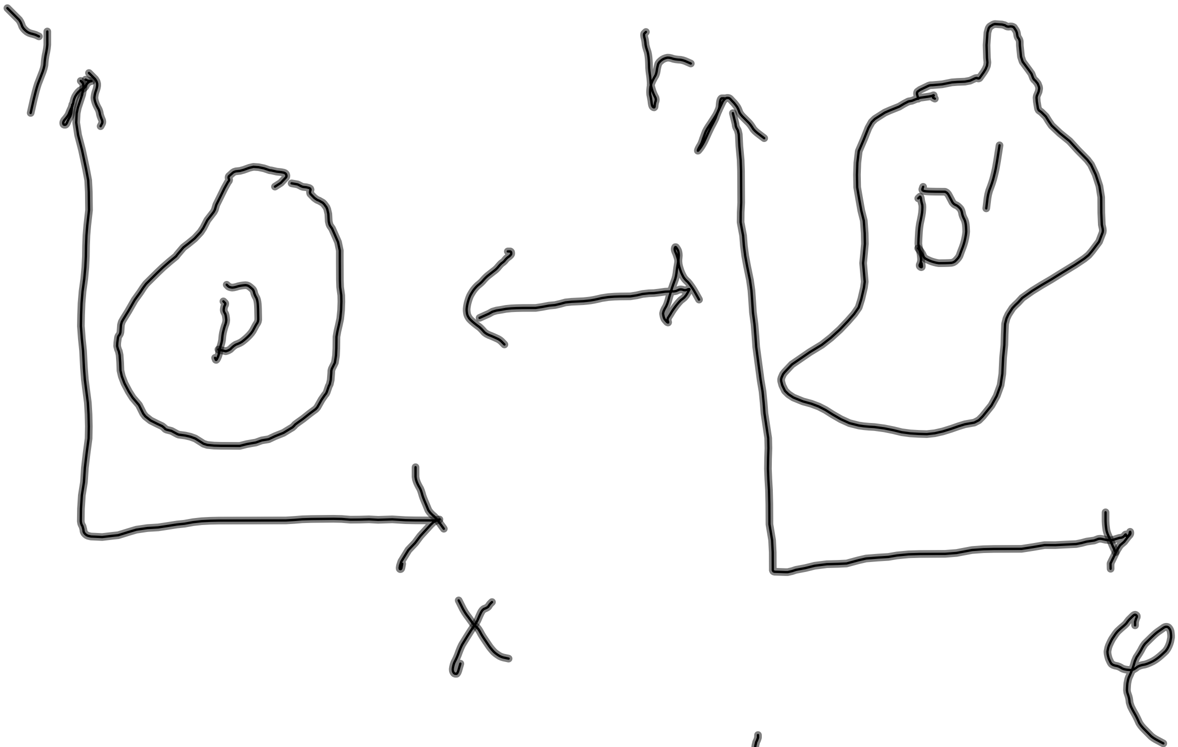
3) Tangenter är lätta
att beräkna.

Variabelbyten

Vi tittar på polära koordinater

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

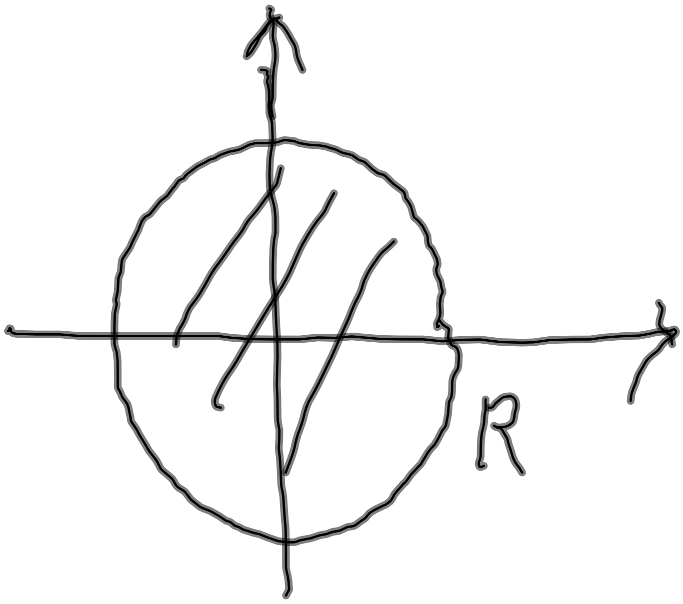
mar 31-11:11



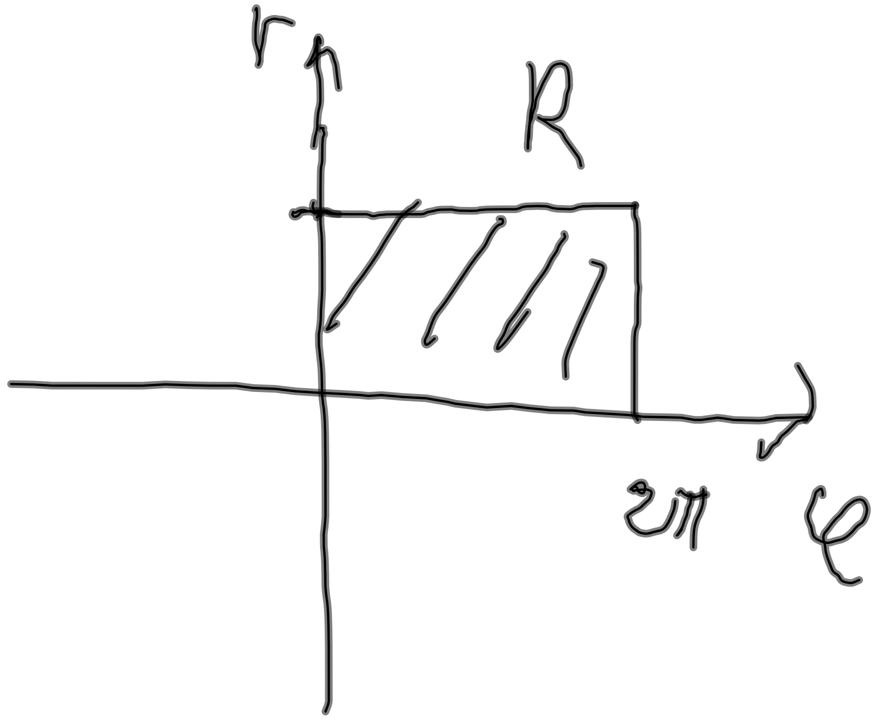
Områden och kurvor kan "översättas" fram och tillbaka mellan koordinatsystemen.

mar 31-11:13

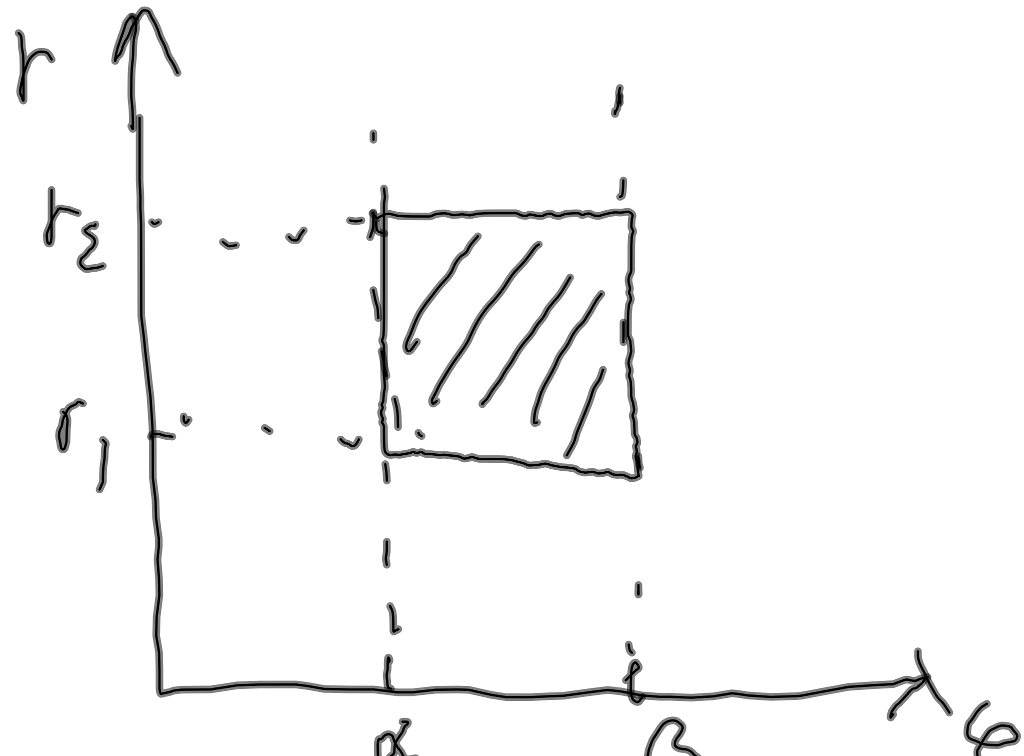
Ex



motsvarar



motsvaras av

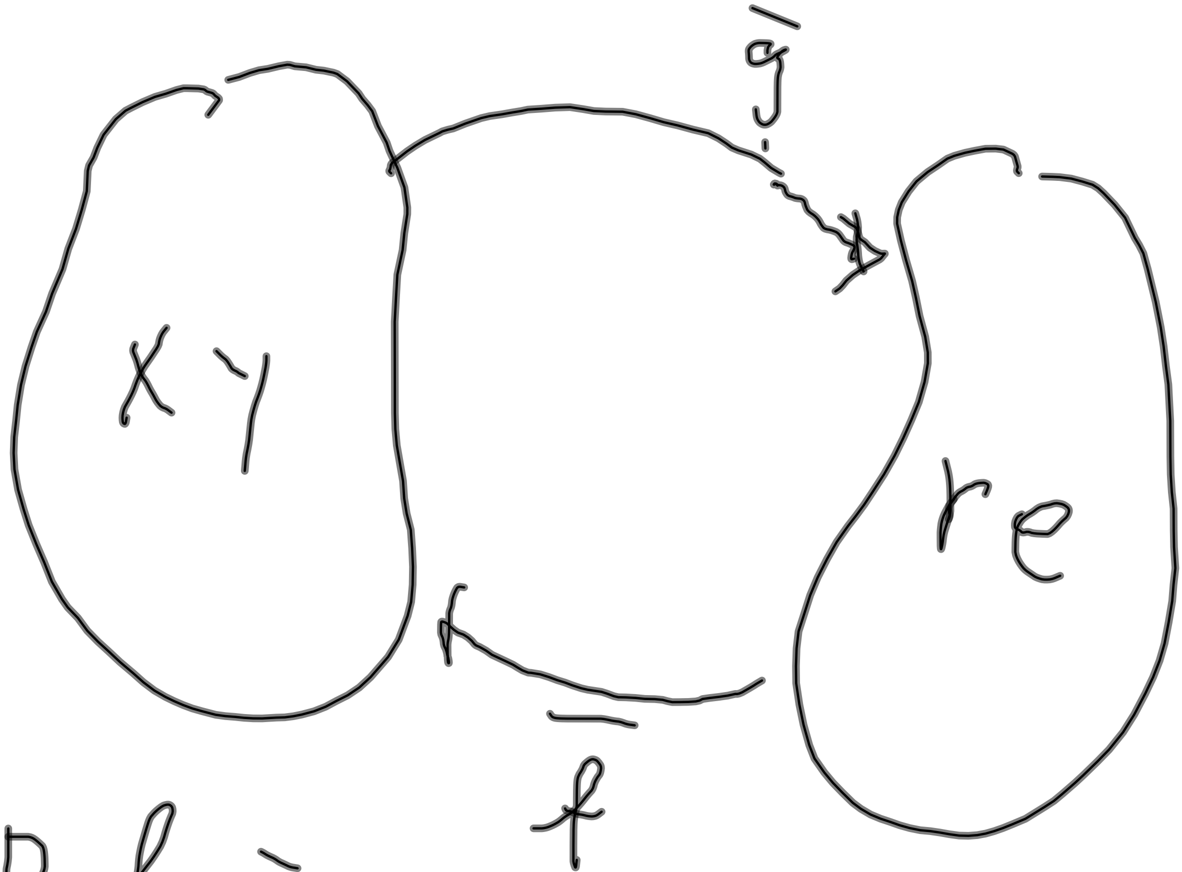


Mer formellt kan vi uttrycka variabelbytet som

$$\begin{cases} x = f_1(r,\varphi) = r\cos\varphi \\ y = f_2(r,\varphi) = r\sin\varphi \end{cases}$$

Vi sätter $\bar{f} = (f_1, f_2)$

mar 31-11:19



Det är möjligt att gå åt andra hållet också.

$$r = g_1(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\varphi = g_2(x,y) =$$

$$= \arctan \frac{y}{x} + n \cdot \pi$$

där n väljs så att vi hamnar i rätt kvadrant.

mar 31-11:22

Hur fortplantas ändringar i r och θ.

Om vi ändrar r med δr och θ med $\delta\theta$ kommer X och Y alt ändras.

Hur mycket?

$$\Delta x \approx \frac{\partial x}{\partial r}\Delta r + \frac{\partial x}{\partial \varphi}\Delta\varphi$$

$$= \cos\varphi\,\Delta r - r\sin\varphi\, d\varphi$$

$$\Delta y \approx \frac{\partial y}{\partial r}\Delta r + \frac{\partial y}{\partial \varphi}\Delta\varphi$$

$$= \sin\varphi\,\Delta r + r\cos\varphi\,\Delta\varphi$$

Vi kan skriva detta på matrisform:

mar 31-11:26

$$\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta r \\ \Delta\varphi \end{pmatrix}$$

Om vi använder rotationen f_1, f_2 för variabelbytena så kan vi skriva

$$\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial r} & \frac{\partial f_1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial f_2}{\partial r} & \frac{\partial f_2}{\partial \varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta r \\ \Delta \varphi \end{pmatrix}$$

Om vi har "oändligt små" ändringar kan vi skriva

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \approx \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial r} & \frac{\partial f_1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial f_2}{\partial r} & \frac{\partial f_2}{\partial \varphi} \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} dr \\ d\varphi \end{pmatrix}$$

Kallas för funktional-matrisen till $\bar{f}$.

mar 31-11:31

Generell definition

Om $\bar{f}$ ges av

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ y_n = f_n(x_1, \ldots, x_n) \end{cases}$$

Så ges funktional-matrisen av

mar 31-11:33

$$\bar{f}' = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

(D.v.s. en $n \times n$-matris)

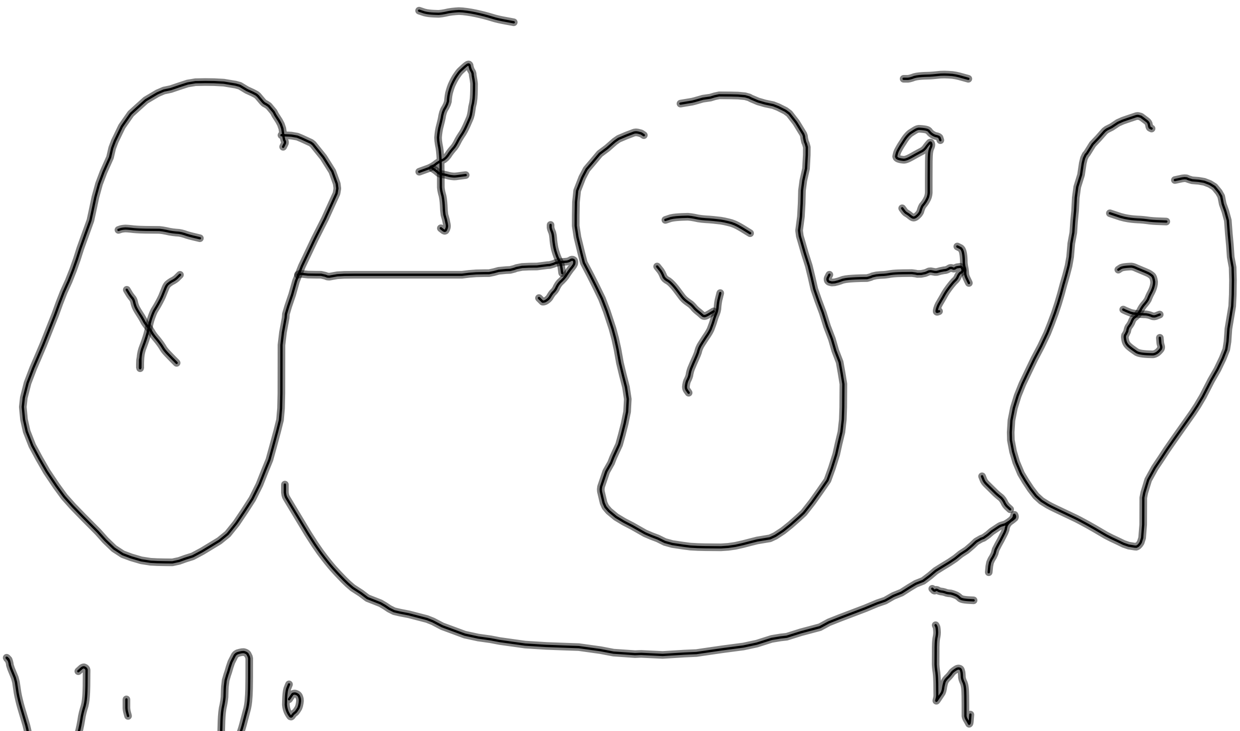
mar 31-11:34

Om x-koordinaten ändras med $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ (vi skriver ändringen som $\overline{\Delta x}$) så gäller

$$\Delta \bar{f} \approx \bar{f}' \, \overline{\Delta x}$$

mar 31-11:36

Sammansättning av avbildningar

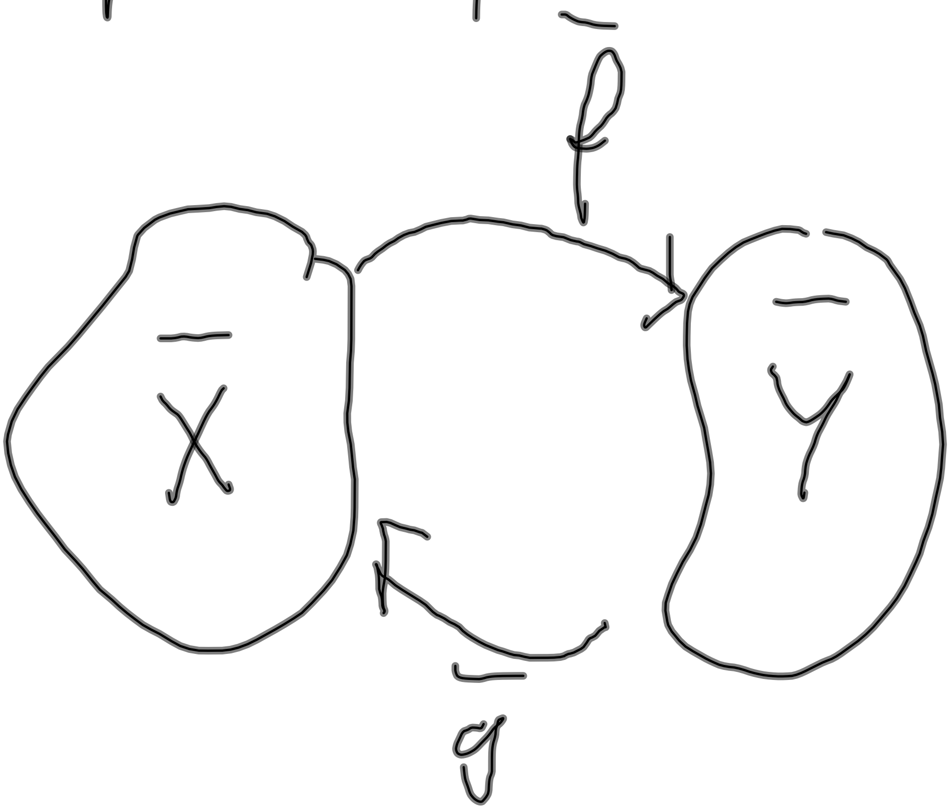


Vi får en sammansatt funktion $h(\bar{x}) = \bar{g}(\bar{f}(\bar{x}))$

Vad blir $\bar{h}^{-1}$?

$$\bar{h}^{-1} = \bar{g}^{-1} \circ \bar{f}^{-1}$$

Specialfall:



Antag att $\bar{g}$ är

<u>invers</u> till $\bar{f}$.

Då gäller $\bar{g}' = (\bar{f}')^{-1}$

mar 31-11:41

Funktionaldeterminanter

Kom ihåg:

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ger

$|A| = ad - bc$

Om vi har $\bar{f}$

och $\bar{f}' = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}$

så är $|\bar{f}'|$

$$= \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_2} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_1}$$

mar 31-11:43

funktionaldeterminanten till $\bar{f}$.

Den skrivs ofta

$$\frac{d(f_1, f_2)}{d(x_1, x_2)}$$

Viktigt:

Om $\bar{f}$ är inverterbar

så måste $|\bar{f}'| \neq 0$

(Det omvända gäller "i stort sett". Mer om detta senare.)

mar 31-11:46