Att hitta max/min

Lite repetition av envarre.

Om $f'(x) = 0$

i en punkt kan

det betyda att vi

har ett lokalt max/min i punkten.

Taylorutveckling ger

$$f(x+h) \approx f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2} f''(x) h^2$$

Om $f''(x) > 0$ har vi minimum.

apr 4-10:03

Om $f''(x) < 0$ har vi maximum.

Om $f''(x) = 0$ måste vi göra grundligare undersökning.

Vi vet att lokala max/min bara kan finnas i punkter där $f'(x) = 0$.

apr 4-10:05

Vi generaliserar nu till funktioner $f(x,y)$.

Extremvärde:

Max/min kallas extremvärde

Maxpunkt/minpunkt kallas extrempunkt.

Två typer av extrempunkter

1) Globala extrempunkter

2) Lokala extrempunkter.

1) $\bar{a}$ är global extrempunkt i D

om

$$f(\bar{a}) \geq f(\bar{x}) \quad (\leq)$$

för alla $\bar{x} \in D$

($\geq$ ger max $\leq$ ger min)

apr 4-10:09

2) $\bar{a}$ är lokal extrempunkt i D

om

$$(\leq)$$

$$f(\bar{a}) \geq f(\bar{x})$$

för alla $\bar{x} \in D$

som ligger nära $\bar{a}$.

$\bar{a}$ är global

extrempunkt

$\Longrightarrow$

$\bar{a}$ är lokal

extrempunkt.

apr 4-10:13

<u>Sats:</u> Om f är differentierbar i D och $\bar{a}$ är en <u>inre</u> lokal extrempunkt så gäller

$$\nabla f(\bar{a}) = \bar{0}$$

(Inre: $\bar{a}$ ligger inte på randen.)

apr 4-10:14

Bev's:

Vi antar att $\bar{a}$ är ett lokalt max.

$\bar{a} = (x, y)$.

Om vi tar små h, k så måste $f(x+h, y+k) \leq f(x,y)$

Men $f(x+h, y+k) \approx$

$f(x,y) + \frac{\partial f}{\partial x} h + \frac{\partial f}{\partial y} k$

apr 4-10:16

Om inte $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$

går det att välja

h, k så att

$$\frac{\partial f}{\partial x} h + \frac{\partial f}{\partial y} k > 0$$

Men det ger $f(x+h, y+k)$

$> f(x,y)$.

Då måste $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$

apr 4-10:18

Samma gäller om $\bar{a}$ är lokalt min.

<u>Obs:</u> $\overline{\nabla f}(\bar{a}) = \bar{0}$

garanterar inte att vi har ett max eller min.

apr 4-10:20

Ex 1: $f(x,y) =$

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 6$$

Om vi plottar funktionen verkar det som att $x = 1, y = 2$ är en minpunkt.

Det går att se att

apr 4-10:23

$f(x,y) = (x-1)^2 + (y-2)^2 + 1$

och av den formen ser vi att vi verkligen har ett min i $x=1, y=2$.

Men kan vi se det utan att först ha plottat funktionen?

apr 4-10:24

Tänk så här:

Försök först hitta punkter där $\overline{\nabla f} = \overline{0}$

(Kallas stationära punkter.)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 4 = 0$$

apr 4-10:26

Det ger $x=1$, $y=2$.

Det är den enda stationära punkten. Är den max/min?

Vi använder Taylors formel:

$$f(x+h, y+k) \approx f(x,y) + \frac{\partial f}{\partial x} h + \frac{\partial f}{\partial y} k + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} h^2 + \right.$$

apr 4-10:28

$$+ 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} k^2 \Big)$$

I vår punkt gäller

$$f(1,2) = 1 \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 \; , \; \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$$

apr 4-10:30

Det ger

$$f(1+h, 2+k) \approx 1 + \frac{1}{2}(2h^2 + 2k^2) = 1 + h^2 + k^2$$

Vid små ändringar

får vi $f(1+h, 2+k) > 1$

Det betyder att vi har ett lokalt minimum.

Generell metod

För att hitta lokala extrempunkter till f:

1) Hitta punkter (x_0, y_0) så att
$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

apr 4-10:34

2) Om vi har en stationär punkt x_0, y_0

så sätter vi

$$\begin{cases} A = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} \\ B = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ C = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{cases}$$

beräknat i (x_0, y_0)

apr 4-10:36

Vi ställer upp den

<u>kvadratiska formen</u>

$$Q(h,k) = Ah^2 + 2Bhk + Ck^2$$

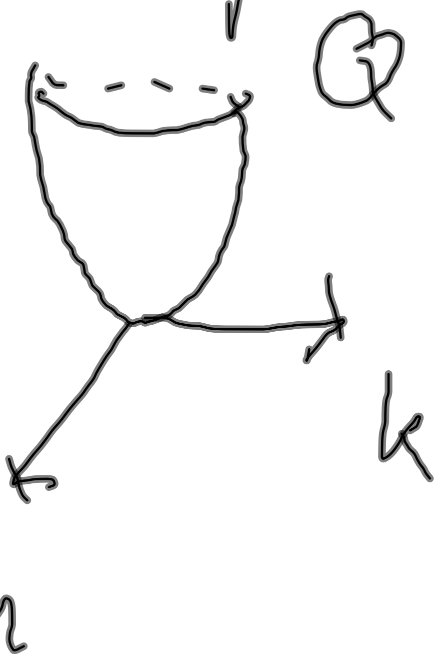
Karaktären hos denna form avgör extrempunktens karaktär.

apr 4-10:37

Olika karaktärer

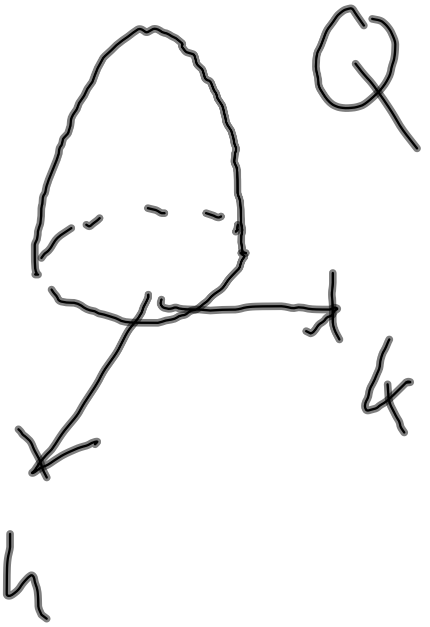
Det finns 5 fall.

1) Q är positivt definit



Det ger minimum

2) Q är negativt definit



Det ger maximum

3) Q är indefinit

Vi har varken max eller min.

(Vi har en sadelpunkt)

4) Q är semidefinit

Krävs mer analys.

apr 4-10:43

5) $Q = 0$

Mer analys krävs.

Hur avgör vi karaktären hos Q.

I boken används kvadratkomplettering.

apr 4-10:46

Ex:

$$Q = 2h^2 - 2hk + 6k^2$$

Vi kan dividera med 2

$$\frac{1}{2}Q = h^2 - hk + 3k^2$$

$$= \left(h - \frac{1}{2}k\right)^2 - \frac{k^2}{4} + 3k^2$$

$$= \left(h - \frac{1}{2}k\right)^2 + \left(3 - \frac{1}{4}\right)k^2$$

apr 4-11:03

Formen är positivt definit. (Minimum)

<u>Ex</u>: $Q = 4h^2 + 6hk + k^2$

$\frac{1}{4} Q = h^2 + \frac{3}{2} hk + \frac{1}{4} k^2$

$\left(h + \frac{3}{4} k\right)^2 - \frac{9}{16} k^2 + \frac{k^2}{4} =$

apr 4-11:05

$$= \left(h + \frac{3}{4}k\right)^2 - \frac{5}{16}k^2$$

Kan vara både positiv och negativ. Den är indefinit.

Om vi har Q kan

apr 4-11:08

Vi gör kvadratkomplettering för att få bort t_1t_2-termen. Det ger olika möjliga fall

1. $Q = t_1^2 + t_2^2$

(t_1, t_2 termen) positivt definit.

apr 4-11:09

2. $Q = -t_1^2 - t_2^2$

Negativt definit

3. $Q = t_1^2 - t_2^2$

Indefinit.

4. Men krångliga fall som t.ex $Q = t_1^2$

Semidefinit.

apr 4-11:10

Två alternativa metoder

I. $Q = Ah^2 + 2Bhk + Ck^2$

Om $B^2 - AC > 0$

är Q indefinit.

Om $B^2 - AC < 0$

och $A > 0$ är Q
positivt definit.

apr 4-11:12

Om $B^2 - AC < 0$

och $A < 0$ är Q

negativt definit.

II. Matrismetod

Ställ upp hessianen

apr 4-11:14

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

Beräkna egenvärden.

1. Om vi har $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ är Q pos. def.

2. Om $\lambda_1, \lambda_2 < 0$

är Q neg def.

3. Om $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$

är Q indefinit.

Alla övriga fall kräver mer analys.

apr 4-11:16

Optimering på kompakta mängder

En mängd är kompakt

om 1) Den är begränsad

2) Den innehåller sin rand.

apr 4-11:18

Sats: Om f är kontinuerlig på en kompakt mängd så finns det ett globalt maximum och ett globalt minimum i D.

apr 4-11:20

Vad kan gå "snett" om D inte är kompakt.

Väldigt mycket!

$D = \mathbb{R}$

$y = x$ har varken max eller min.

Ex Sätt $D = (0,1)$

$y = \frac{1}{x}$. Har varken

max eller min i D.

Vi definierar nu

en metod för att

hitta max/min på kompakta

apr 4-11:23

mängder.

Först: Vi hittar alla lokala max/min.

Vi hittar sedan globala max/min genom att jämföra alla lokala max/min.

apr 4-11:26

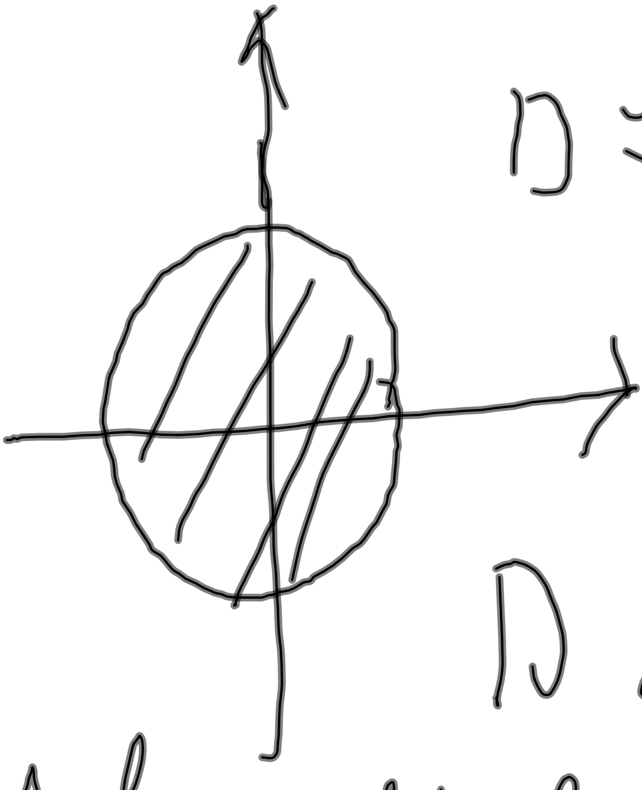
När vi letar efter
lokala max/min gör
vi två saker

1. Vi hittar alla
<u>inre</u> stationära
punkter och avgör
deras karaktär.

2. Sedan letar vi efter extrempunkter på randen

3. Vi jämför det vi fått från 1 och 2.

Vi tittar på ett specialfall: Enhetscirkeln.



$D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$

D är kompakt.

Antag att $f(x,y)$ är given.

apr 4-11:30

1. Hitta alla x, y så att

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}$$ och $x^2 + y^2 < 1$

2. Sätt sedan

$$g(t) = f(\cos(t), \sin(t))$$

Hitta alla t så att

$g'(t) = 0$ och $0 < t < 2\pi$

(Vi har parametriserat randen.)

3. Räkna slutligen $g(0)$

$(= g(8\pi))$

Jämför alla punkter

apr 4-11:33

och se var vi har globalt max/min.

Ex $f(x,y)=xy$

på enhetscirkeln.

1. Undersök inre punkter

$$\frac{\partial f}{\partial x}=y \quad \frac{\partial f}{\partial y}=x$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ ger } \left\{\begin{aligned} y &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}\right.$$

d.v.s. punkten $(0,0)$.

<u>Obs:</u> Om vi bara är ute efter globalt max/min behöver vi

inte analysera kandidaten hos $(0,0)$. Vi lägger på minnet att $f(0,0)=0$.

(Om vi är ute efter <u>alla</u> lokala max/min måste vi undersöka kandidaten.)

apr 4-11:38

2. Undersök randen

med parametrisering

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$g(t) = f(\cos t, \sin t)$$

$$= \cos t \cdot \sin t$$

Leta efter extremvärden

apr 4-11:41

för $g(t)$.

$$g'(t) = (-\sin t)\sin t$$

$$+\cos t \cdot \cos t = \cos^2 t - \sin^2 t$$

$g'(t) = 0$ ger

$$\cos^2 t = \sin^2 t$$

Det betyder att

$$\tan^2 t = 1$$

apr 4-11:42

$\tan t = \pm 1$

Det ger

$t = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$

Beräkna funktionsvärden

$g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$

apr 4-11:44

På samma sätt

$$g\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$g\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

$$g\left(\frac{7\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}$$

3. Definitionen av $g(t)$ "missar" $t = 0$!

apr 4-11:46

$g(0) = 0.$

Vi får max $= \frac{1}{2}$

i punkterna $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

och min $= -\frac{1}{2}$ i punkterna

$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

apr 4-11:47