Repetition från förra föreläsningen

Stationära punkter:

- Punkter med $\nabla f = \bar{0}$

Karaktären hos punkterna kan avgöras med den kvadratiska formen

apr 5-12:53

i Taylorpolynomet.

Metoden fungerar bara för inre punkter.

Att leta efter extremvärden

Inre extremvärden måste vara stationära punkter

Om vi letar efter alla <u>lokala</u> extremvärden

måste vi undersöka karaktären hos de stationära punkterna.

Om vi letar efter <u>globala</u> extremvärden

behöver vi alltså inte
bry oss om kandidaterna.

Om vi har kompakt
D vet vi att det
finns globala extrem-
värden.

apr 5-13:05

Metod för kompakta D:

Leta efter inre

stationära punkter.

Leta efter lokala

extremvärden på randen.

(Ger analys i en

lägre dimension.)

apr 5-13:07

Jämför alla punkter vi hittat.

Extremvärden på icke-kompakta mängder.

Att D <u>inte</u> är kompakt kan bero på 2 saker

1. D "innehåller" delar
av oändligheten.

2. Det finns en rand
till D men D
innehåller inte
alla delar av den.

apr 5-13:10

Vi antar att f
är kontinuerlig på D
(men inte nödvändigtvis
överallt annars.)
Vad gäller om
max/min?

apr 5-13:12

Ex: $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

definierad på $\mathbb{R}$.

Här finns max $(=1)$ men inget min.

apr 5-13:13

Ex: $y = \arctan x$

definierad på hela $\mathbb{R}$.

Har varken max eller min.

Strategi för att

hitta max/min

för funktionen

apr 5-13:15

definierade på hela $\mathbb{R}$.

1. Hitta alla stationära punkter.

2. Försök beräkna

$\lim_{x \to \infty} f(x)$ och

$\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

apr 5-13:17

Jämför vad vi får.

Ex i $\mathbb{R}^2$

1. $f(x,y) = x+y$

varken max eller min.

apr 5-13:18

2. $f(x,y) = x^2 + y^2$

Har ett min men

inget max.

3. $f(x,y) = \dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$

Funktionen har faktiskt

apr 5-13:20

både max och min.
Det krångliga här
är att se vad som
händer då $(x,y) \to \infty$.
Om vi sätter $r = \sqrt{x^2+y^2}$
så ser vi att

apr 5-13:22

$$f = \frac{\sin r^2}{r^2}$$

$$|f| < \frac{1}{r^2}$$

Då $r \to \infty$ gäller

$$|f| \to 0$$

apr 5-13:24

Generell metod för

att hitta max/min

för funktioner i $\mathbb{R}^n$.

Vi har ett område

D som innehåller

1. Inre punkter

apr 5-13:25

2. Ev en rand R
och punkter i D
som ligger på R.

3. Ev delar av ∞.

4. Ev delar av R
som inte tillhör D.

apr 5-13:26

Undersök dessa delar.

1. Hitta stationära inre punkter.

2. Lokala max/min på delar av R som tillhör D.

apr 5-13:27

3. Gränsvärden $\lim_{(x,y)\to\infty} f(x,y)$

på de delar av ∞

som ligger i D.

4. Gränsvärden $\lim_{(x,y)\to\bar{a}} f$

där $\bar{a}$ är en punkt

på R som inte ligger

i D.

apr 5-13:28

Ex $f(x,y) = \dfrac{1}{1+(x^2+y^2)}$

definierad på hela $\mathbb{R}^2$.

1. Leta efter stationära punkter.

apr 5-13:29

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-2x}{(1+(x^2+y^2))^2} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-2y}{(1+(x^2+y^2))^2} = 0$$

Enda lösningen är

$x = y = 0$

apr 5-13:31

$f(0,0) = 1$

2. Kolla vad som händer då vi går mot ∞.

Vi kan sätta

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

Då får vi $f = \dfrac{1}{1+r^2}$

apr 5-13:33

Då r går mot ∞

gäller $r \to \infty$.

Då gäller $\lim_{r \to \infty} \frac{1}{1+r^2} = 0$

Vi får att max = 1

i punkten (0,0).

Men det finns inget

minimum eftersom

apr 5-13:35

$$\frac{1}{1+x^2+y^2} > 0$$ för alla

ändliga x, y.

Svårighet med

gränsvärden :

$(x,y) \to \infty$

Det finns oändligt
många sätt att
närma sig ∞.

Olika vägar ger ibland olika gränsvärden.

Ex $f = \frac{y}{x}$

Vad är $\lim_{(x,y)\to 0} \frac{y}{x}$?

apr 5-13:40

Om vi går mot ∞

längs vägen

$$\begin{cases} x = t \\ y = \alpha t \end{cases} \quad 0 \leq t < \infty$$

Då är $\dfrac{y}{x} = \alpha$ längs

hela vägen.

Genom att välja α

olika kan vi få vilket

gränsvärde som helst!

$$\lim_{(x,y)\to\infty} \frac{y}{x}$$ existerar inte!

Men ibland kan det

räcka att bara

apr 5-13:42

hitta gränser för

f då $(x,y)\to\infty$.

<u>Ex</u>: $f(x,y)=\dfrac{(x-y)^2}{1+(x-y)^2}$

Finns max/min till

funktionen.

apr 5-13:44

Vi ser att

$f \geq 0$ överallt

och att $f = 0$ då

$x = y$.

Vi ser också att

$f(x, y) < 1$ överallt.

apr 5-13:46

Vi behöver fallisht
inte undersöka inre punkter.
När vi går mot oändligheten
längs linjen

$$\begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases}$$ så får vi

$$\lim_{t \to \infty} f(x(t), y(t)) =$$

apr 5-13:48

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^2}{1+t^2} = 1$$

Om vi går längs

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases}$$ får vi

$$\lim_{t\to\infty} f = \frac{0}{1} = 0$$

Funktionen kan bli godtyckligt nära 1.

Det finns inget max.

Min = 0 Max finns inte.

Lite kort om KS1

Några saker som vi bör titta på:

* Riktningsderivator

* Tangentplan
* Kedjeregeln

* Taylors formel

apr 5-14:08

* Variabelbyten med funktionalmatris.

* Variabelbyten i enklare diff ekvationer.

* Diffekv: Visa att en viss funktion är lösning till en diffekv.

* Parametriserade kurvor och ytor.

apr 5-14:12

Optimering med bivillkor

Sök extremvärden till

$f(x,y)$

under villkoret

$g(x,y)=c$

Ex: Bestäm den punkt i planet

$$2x+y+3z=6$$

som ligger närmast origo.

Problemet är samma som:

Hitta min för

$x^2+y^2+z^2$

då $2x+y+3z=6$

$\Big(f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$

$g(x,y,z)=c$

är $2x+y+3z=6 \Big)$

apr 5-14:17

Ex: Hitta max

till $xy+y$

på enhetscirkeln

$$x^2+y^2=1$$

(Här är $f(x,y)=xy+y$

och $g(x,y)=c$ är

$x^2+y^2=1$)

apr 5-14:18

Generell lösningsmetod

I 2 dimensioner

ställer vi upp systemet

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} - \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} - \lambda \dfrac{\partial g}{\partial y} = 0 \\ g(x,y) = c \end{cases}$$

apr 5-14:19

Det är ett ekv.syst
med tre obekanta
x, y, λ
Om vi hittar en lösning
så ger (x, y) en
möjlig extrempunkt.

apr 5-14:21

Metoden kallas

Lagranges multiplikator-

metod.

(Motsvarande fungerar i 3 dim)

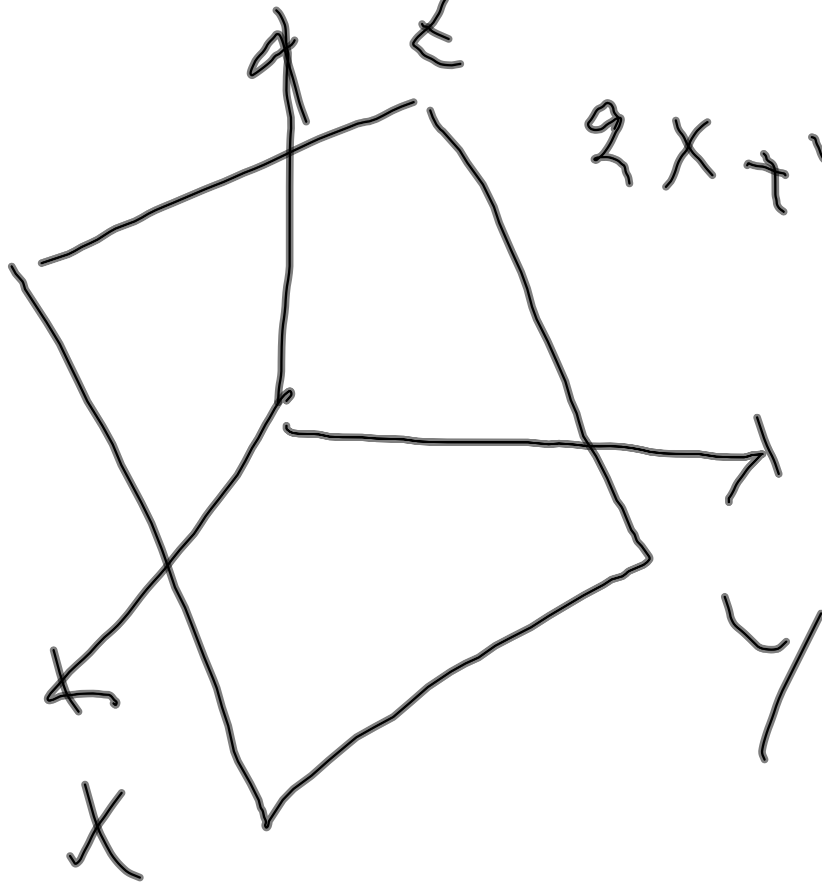
Vi ser vad som

händer i våra två

exempel:

apr 5-14:22

1. Planet och origo



$2x+y+3z=6$

I varje punkt (x,y,z)

på planet är $(-x,-y,-z)$

apr 5-14:23

riktningen från punkten till origo. När vi är närmast origo måste denna riktning vara parallell med normalen. Normalen är $(2,1,3)$

Så $(-x,-y,-z)$ är parallell med $(2,1,3)$

Det betyder att det finns ett tal k

$$(-x,-y,-z)=k(2,1,3)$$

Vi letar efter punkter och motsvarande k så att

apr 5-14:27

detta gäller.

Om vi skriver $-k = \lambda$

så får vi systemet

$$\begin{cases} x - \lambda 2 = 0 \\ y - \lambda \cdot 1 = 0 \\ z - \lambda \cdot 3 = 0 \\ 2x + y + 3z = 6 \end{cases}$$

apr 5-14:29

Om vi sätter

$$g(x,y,z) = 2x + y + 3z$$

så får vi

$$\nabla g = (2, 1, 3)$$

Om vi sätter

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$$

får vi $\nabla f = (2x, 2y, 2z)$

apr 5-14:30

Lagranges ekvationer

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x} = 0$$

o.s.v.

blir

$$\begin{cases} 2x - \lambda \cdot 2 = 0 \\ 2y - \lambda \cdot 1 = 0 \\ 2z - \lambda \cdot 3 = 0 \\ 2x + y + 3z = 6 \end{cases}$$

apr 5-14:31

Om vi byter λ mot $\frac{\lambda}{2}$ får vi precis de ekvationer vi fick förut.

Om vi löser systemet får vi $x = \lambda$; $z = \frac{3\lambda}{2}$

$y = \lambda/2$

apr 5-14:32

Sätt in i sista ekvationen:

$$2\lambda + \frac{\lambda}{2} + \frac{9\lambda}{2} = 6$$

$$\lambda = \frac{6}{7}$$

$$x = \frac{6}{7} \quad y = \frac{3}{7} \quad z = \frac{9}{7}$$

apr 5-14:35

2. Maximera

$f(x,y) = xy + y$

då $x^2 + y^2 = 1$

En metod är att

parametrisera:

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

apr 5-14:36

och sätter $g(t) = f(x(t), y(t))$.

Vi gör <u>inte</u> så.

Istället sätter vi

$\nabla f = (y, x+1)$

Vi letar nu efter

apr 5-14:38

en punkt där

∇f är parallell

med normalen till

cirkeln $x^2+y^2=1$

Vi letar efter en

punkt där

$(y, x+1)$ är parallell

med $(2x, 2y)$

apr 5-14:40

Det betyder att
det finns ett tal λ
så att
$$(y, x+1) = \lambda(2x, 2y)$$
Det ger ekvationerna
$$\begin{cases} y - 2\lambda x = 0 \\ x + 1 - 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

apr 5-14:44

Det här är precis Lagranges ekvationer.

Vi löser systemet:

Byt 2λ mot λ.

$$\begin{cases} y = \lambda x \\ x + 1 = \lambda y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$x+1=\lambda^2 x$$

$$x=\frac{1}{\lambda^2-1}$$

$$y=\frac{\lambda}{\lambda^2-1}$$

Sätt in i 3:dje ekv

$$x^2 + y^2 = \frac{(1+\lambda^2)^2}{(\lambda^2-1)^2} = 1$$

$$\lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 = \lambda^2 + 1$$

$$\lambda^4 - 3\lambda^2 = 0$$

$\lambda = 0$ är en möjlighet

ger $x = -1$, $y = 0$

apr 5-14:47

$\lambda^2 - 3 = 0$ ger

$\lambda = \pm\sqrt{3}$

Ger $x = \frac{1}{2}$ $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

Det ger tre punkter.

Beräkna funktionsvärdena.

Max fås i $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

med $f = \frac{5\sqrt{3}}{4}$

apr 5-14:48