Lite repetition

Lösning av partiella diffekv.

Ex $\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}=0$

Gör variabelbytet

$$\begin{cases} x = s+t \\ y = s-t \end{cases}$$

$$g(s,t) = f(x(s,t), y(s,t))$$

$$= f(s+t, s-t)$$

Beräkna derivator i

s, t.

$$\frac{\partial g}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot 1 =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial y} (-1) = \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}$$

$\frac{\partial g}{\partial s} = 0$ betyder att

g inte beror av s.

Så $g(s,t) = h(t)$

för någon funktion h.

Men $\begin{cases} x = s+t \\ y = s-t \end{cases}$

apr 8-08:06

Ger $2t = x - y$

$$t = \frac{x-y}{2}$$

Så $g(s,t) = h(t)$

$$= h\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

Vi kan byta namn på h och skriva det som

apr 8-08:08

$p(x-y)$ där p

är godtycklig.

Men g uttryckt i x,t

är ju f.

$$f(x,t) = p(x-y)$$

och detta är fullständiga

lösningen.

Ex 1:

Lös ekvationen

$$3\frac{\partial f}{\partial x} - 2\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

med variabelbytet

$$\begin{cases} u = 2x + 3y \\ v = x + y \end{cases}$$

apr 8-08:10

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} =$$

$$= 2\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$= 3\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}$$

$$3\frac{\partial f}{\partial x} - \xi\frac{\partial f}{\partial y} =$$

$$3\left(\xi\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}\right) -$$

$$\xi\left(3\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}\right) = \frac{\partial f}{\partial v}$$

Så ekvationen blir

$$\frac{\partial f}{\partial v} = 0$$

apr 8-08:13

Så $f(u,v) = h(u)$

Vad är då u uttryckt i x, y?

$u = 2x + 3y$

Så $f(x,y) = h(2x+3y)$

där h är godtycklig,

apr 8-08:14

Taylorutveckling

Några tips för förenkling.

Ex $f(x,y) = \dfrac{1}{1+xy}$

Sök Taylorutveckling kring $(0,0)$.

apr 8-08:19

Det betyder att vi skall ha

$$f(0+h, 0+k) = P_0 + P_1 + P_2 + \ldots$$

(Verkar vara enormt komplicerat?!)

Vi kan tänka så här:

$$f(0+h, 0+k) = \frac{1}{1+hk}$$

Från envarren vet vi

att

$$\frac{1}{1+hk} = 1 - hk + (hk)^2 - (hk)^3 + \ldots$$

Detta är en polynomutveckling av $f(0+h, 0+k)$

apr 8-08:24

Är det "rätt" utveckling.

<u>Sats:</u> Det finns aldrig

mer än ett sätt

att serieutveckla

en funktion.

Så detta är den

korrekta Taylorutvecklingen.

apr 8-08:25

Detta trick fungerar

ibland.

Några optimeringsproblem

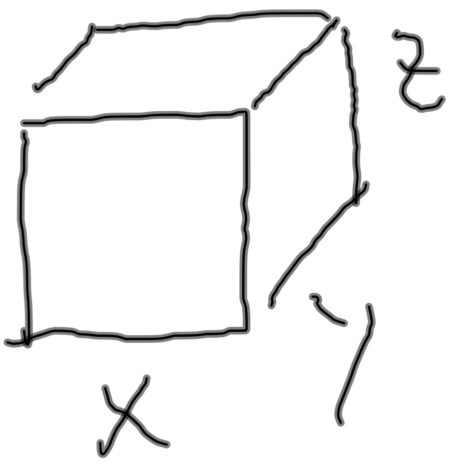
Ex Bestäm formen

på en rektangulär

låda utan lock som

apr 8-08:28

skall ha given volym $\bar{V}$ och som samtidigt har minimal area S på sidorna.



$$\bar{V} = xyz$$

$$S = xy + 2yz + 2xz$$

$\bar{V}$ är given.
S skall minimeras.

Det finns olika

angreppssätt.
Följande är nog enklast:

$$z = \frac{\bar{V}}{xy}$$

apr 8-08:32

$$S(x,y) = xy + \frac{2V}{x} + \frac{2V}{y}$$

Välj x, y så att vi får minimum.

Leta efter stationär punkt.

$$\frac{\partial S}{\partial x} = y - \frac{2\bar{V}}{x^2} = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial y} = x - \frac{2\bar{V}}{y^2} = 0$$

Så $y = \dfrac{2\bar{V}}{x^2}$

sätt in i 2:a ekv

apr 8-08:36

$$x = \frac{2\bar{v}}{y^2} = \frac{2\bar{v}}{\left(\frac{2\bar{v}}{x^2}\right)^2}$$

$$= \frac{x^4}{2\bar{v}}$$

$$1 = \frac{x^3}{2\bar{v}}, \quad x = \sqrt[3]{2\bar{v}}$$

På samma sätt (symmetri) fås

$$y = \sqrt[3]{2\bar{V}}$$

$$z = \frac{\bar{V}}{xy} = \frac{\bar{V}}{(2\bar{V})^{2/3}}$$

$$= 2^{3/2} \cdot \sqrt[3]{V}$$

Detta är en stationär punkt. Ä den max

apr 8-08:38

eller min?

Vi kan undersöka

den kvadratiska formen

(Vi får att det är
min i så fall.)

Vi ser att problemet

apr 8-08:40

måste ha ett minimum någonstans.
(Annars skulle vi kunna ha en låda med volym $\bar{V}$ och godtyckligt liten area.)
Så min finns någonstans.

apr 8-08:42

Det finns ingen rand
(i XY-planet)

Minimum måste ligga
i en stationär punkt.

Vi har hittat den
<u>enda</u> stationära punkten.

Så vi måste ha min.

apr 8-08:44

Ex: Temperaturen

på en oändlig platta

i xy-planet ges av

$$T(x,y) = (x+y)e^{-x^2-y^2}$$

Avgör om max/min

finns.

Leta efter stationära punkter

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 1 \cdot e^{-x^2-y^2} + (x+y) \cdot \left(-2xe^{-x^2-y^2}\right)$$

$$= 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 1 \cdot e^{-x^2-y^2} + (x+y) \cdot \left(-2ye^{-x^2-y^2}\right)$$

$$= 0$$

Del. ger

$$(1-2x(x+y))e^{-x^2-y^2}=0$$

$$(1-2y(x+y))e^{-x^2-y^2}=0$$

Eftersom $e^{-x^2-y^2} \neq 0$

kan vi dividera bort $e^{-x^2-y^2}$.

$$\begin{cases} 1-2x^2-2xy=0 \\ 1-2xy-2y^2=0 \end{cases}$$

Subtrahera ekvationerna:

$$2y^2-2x^2=0$$

$$y^2=x^2$$

$$y=\pm x$$

Testa först $y = x$

Sätt in i ekv 1:

$$1 - 4x^2 = 0$$

$$x^2 = \frac{1}{4} \quad x = \pm\frac{1}{2}$$

Ger punkterna $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

apr 8-09:08

Testa sedan $y = -x$

Sätt in i ekv 1

Det ger $1 = 0$!

Ingen lösning alltså.

Det finns två skärnings
punkter.

$$T\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=e^{-1/2}$$

$$T\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)=-e^{-1/2}$$

Detta kan möjligen

vara max/min.

Men vi måste veta

vad som händer då

$(x,y) \to \infty.$

Så vad vet vi

om $\lim_{(x,y) \to \infty} (x+y)e^{-x^2-y^2}$

Vi inser att då

$r = \sqrt{x^2+y^2}$ är stort

apr 8-09:12

måste $|x+y| < r^2$

$$\left(|x+y|^2 = x^2 + 2|xy| + y^2 \right.$$

$$\left. = r^2 + 2|xy| < r^4 \right.$$

då r är stort)

så $|T(x,y)| < r^2 e^{-r^2}$

apr 8-09:14

$$\lim_{r \to \infty} r^3 e^{-r^2} = 0$$

Så $\lim_{(x,y) \to \infty} (x+y) e^{-x^2-y^2}$

$= 0$

Så vårt problem

är max/min,

apr 8-09:17

Invertering

$$\begin{cases} u = x^2 + y^2 \\ v = x^2 - y^2 \end{cases}$$

kan "invers"

$$x = \pm\sqrt{\frac{u+v}{2}}$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{u-v}{2}}$$

Det ger 4 möjliga

kombinationer

De fungerar inte

för alla u, v.

Vi måste ha

$u+v \geq 0$

$u-v \geq 0$

Så vi ser att

1) Inte alla u, v fungerar.

2) För u, v som fungerar finns det flera möjliga lösningar.

apr 8-09:29

Inversa funktionssatsen

<u>Om</u> vi har en funktion

$$\begin{cases} u = f_1(x,y) \\ v = f_2(x,y) \end{cases}$$

och en punkt (x_0, y_0) så att $(x_0, y_0) \to (u_0, v_0)$

apr 8-09:30

och så att

$|\bar{f}'| \neq 0$

så kan vi hitta en

öppen mängd D i

uv planet så att

$(u_0, v_0) \in D$ och

funktioner g_1, g_2

apr 8-09:31

så att (g_1, g_2)

är invers till

(f_1, f_2) i D.

Funktionen gör att

invertera <u>lokalt</u>

Enkelt fall i envariabel

$f(x) = x^2$

Funktionen är egentligen inte inverterbar

Om vi sätter $x_0 = 1$ så är $f(1) = 1$

apr 8-09:34

Nära 1 gäller

att $\sqrt{y}$ är en

invers till x^2.

<u>Implicita funktions-</u>

<u>satsen</u>

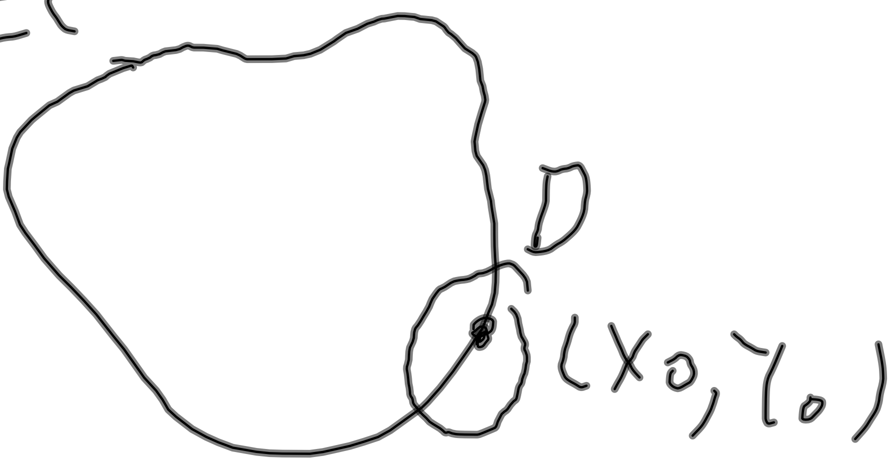
apr 8-09:36

Antag att vi har
en komplicerad
implicit kurva

$$f(x,y)=C$$

Antag att (x_0, y_0)
ligger på kurvan

$f(x,y)=c$



Går det att lösa ut y som funktion av x?

Ja, om $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ i (x_0,y_0)

Så finns det en

liten omgivning D

som innehåller (x_0, y_0)

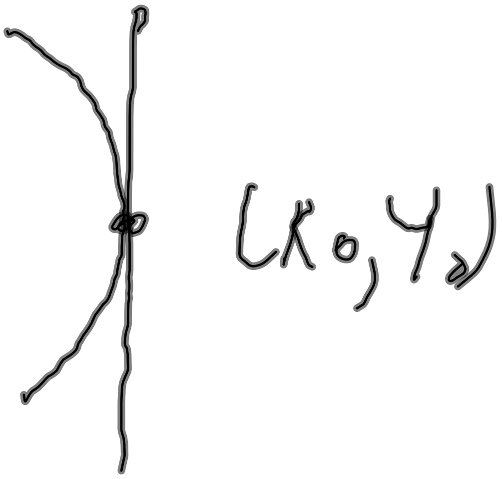
så att $y = g(x)$ i D.

(Betyder att $F(x, g(x)) = 0$)

Om $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ är

apr 8-09:42

normalen parallell med x-axeln och vi får följande situation



Dessutom gäller att

$$g'(x_0) = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}$$

Så $g'(x)$ kan bestämmas utan att vi vet vad $g(x)$ är.

apr 8-09:44