Institutionen för matematik
KTH
Michael Benedicks

Lösningsförslag till tentamen i Komplex analys, SF1628, den 13 januari 2011, A-delen

1. Använd Eulers formler för att visa identiteten

$$\sin^2 z = \frac{1}{2}(1 - \cos 2z).$$

Lösning. Enligt Eulers formler är

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

och

$$\cos 2z = \frac{e^{2iz} + e^{-2iz}}{2}$$

Vi får

$$\sin^2 z = \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)^2 = -\frac{1}{4}(e^{2iz} - 2 + e^{-2iz})$$
$$= \frac{1}{2}(1 - \frac{e^{2iz} + e^{-2iz}}{2}) = \frac{1}{2}(1 - \cos 2z)$$

och identiteten är därmed bevisad.

2.(a) Betrakta funktionen

$$f(z) = \frac{2}{z(z+2)}.$$

Denna funktion kan Laurentserieutvecklas i två olika (maximala) områden omkring $z = 0$. Ange dessa områden!

(b) Bestäm de två Laurentserierna omkring $z = 0$.

Lösning (a) Funktionen har singulariteter i $z = 0$ och $z = -2$. Den är därför analytisk i $0 < |z| < 2$ och $|z| > 2$.

(b) Partialbråksuppdelning ger

$$f(z) = \frac{2}{z(z+2)} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z+2}.$$

I området $0 < |z| < 2$ skriver vi

$$-\frac{1}{z+2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z}{2}} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot \left(\frac{z}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \cdot (-1)^{n+1} z^n$$

och koefficienterna för Laurentserien blir

$$a_n = \begin{cases} 1 & n = -1 \\ (-1)^{n+1} \cdot 2^{-n-1} & n \geq 0. \end{cases}$$

I området $|z| > 2$ skriver vi

$$-\frac{1}{z+2} = -\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+\frac{2}{z}} = -\frac{1}{z}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\cdot\left(\frac{2}{z}\right)^m = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^{m+1}\cdot 2^m\cdot\frac{1}{z^{m+1}}$$

$$= [n=-m-1] = \sum_{n=-\infty}^{-1}(-1)^n\cdot 2^{-n-1}\cdot z^n$$

så serien blir

$$a_n = \begin{cases}(-1)^n\cdot 2^{-n-1}, & n\le -2,\\ 0, & n\ge -1.\end{cases}$$

3. Hur många lösningar har ekvationen $\sin z + z^5 + 8z^2 + z + 1 = 0$ i cirkelskivan

$|z| < 1$?

Lösning. Skriv den givna funktionen som $F(z) = f(z) + g(z)$, där $f(z) = 8z^2$ och $g(z) = \sin z + z^5 + z + 1$

Om $|z| = |x+iy| = 1$ fås

$$|\sin z| = \left|\frac{e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}}{2}\right| \le \frac{e^{-y}+e^{y}}{2} \le e < 3.$$

Detta innebär att då $|z| = 1$ är

$$|g(z)| \le |\sin z| + |z|^5 + |z| + 1 \le 3+1+1+1 = 6 < 8 = |8z^2| = |f(z)|.$$

Enligt Rouches sats fås att $F(z)$ har lika många nollställen som $f(z)$ i $|z| < 1$, dvs. 2 nollställen.

Svar. Ekvationen har 2 lösningar i $|z| < 1$.

4. Beräkna integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{x^2+2x+4}\,dx.$$

Lösning. Betrakta integranden

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+2z+4}.$$

Residusatsen ger

$$(1)\qquad \int_{-R}^{R}\frac{e^{ix}}{x^2+2x+4}\,dx + \int_{C_R}\frac{e^{iz}}{z^2+2z+4} = 2\pi i\cdot\sum\operatorname{Res}\left[\frac{e^{iz}}{z^2+2z+4}\right],$$

där summan går över alla poler övre halvplanet.

Funktionen har en enkelpoler då $z^2+2z+4 = 0$ och lösningen $z_1 = -1+i\sqrt{3}$ ligger i övre halvplanet. Vi får enligt formeln för residuberäkning i en enkelpol att

$$\operatorname{Res}[f, -1+i\sqrt{3}] = \left[\frac{e^{iz}}{2z+2}\right]_{z=-1+i\sqrt{3}}$$

$$= \frac{e^{-\sqrt{3}-i}}{2i\sqrt{3}} = -\frac{e^{-\sqrt{3}}}{2\sqrt{3}}\sin 1 - i\frac{e^{-\sqrt{3}}}{2\sqrt{3}}\cos 1$$

Vi uppskattar integralen över halvcirkeln enligt följande:

$$\left|\int_{C_R}\frac{e^{iz}}{z^2+2z+4}\,dz\right| \le \int_{C_R}\frac{e^{-y}}{|z|^2-2|z|-4}|dz| \le \frac{\pi R}{R^2-4R-4} \to 0$$

då $R \to \infty$.

Då $R \to \infty$ i (1) fås

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+2x+4}\,dx = 2\pi i \cdot \left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}\sin 1 - i\frac{1}{2\sqrt{3}}\cos 1\right). \tag{2}$$

Genom att ta realdel i (2) fås att den sökta integralen är

$$\frac{\pi e^{-\sqrt{3}}}{\sqrt{3}}\cos 1.$$