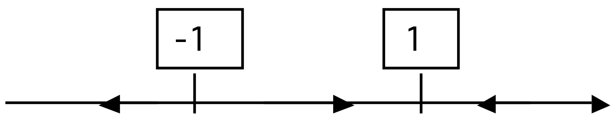
KTH Matematik
SF1633, Differentialekvationer I.
SF1637 Differentialekvationer och transformer III.
Lösningsförslag.
Kontrollskrivning nr 1, måndagen den 13 september 2010, kl 08.30-09.30.
BETA, Mathematics Handbook är tillåtet hjälpmedel.

1. Bestäm de stationära lösningarna (jämviktslösningarna) till differentialekvationen $\frac{dy}{dx} = (1 \quad y^2)(1+y^2)$.
Klassificera med avseende på stabilitet/instabilitet de stationära lösningarna.
Bestäm $\lim_{x} y(x)$ då startvärdet $y(0) = y_0$ är a) $y_0 = \quad 1$ och b) $y_0 = 0$.

……………………………………………………………………………….………

Lösningsförslag:
De stationära lösningarna erhålles då derivatan är lika med noll.
Vi får de stationära lösningarna $y_1 = \quad 1$ och $y_2 = 1$.
En teckenstudie av derivatan ger information rörande stabiliteten.
Nu över till studie av derivatans tecken.
För $y < \quad 1$ och $y > 1$ är derivatan negativ och $y(t)$ är avtagande.
För $\quad 1 < y < 1$ är derivatan positiv och $y(t)$ är växande.



Den stationära lösningen $y_1 = \quad 1$ är instabil och den stationära lösningen $y_2 = 1$ är asymptotiskt stabil.
a) $\lim_{x} y(x) = \quad 1$, ty $y_0 = \quad 1$ är en stationär lösning.
b) $\lim_{x} y(x) = 1$.

SVAR: De stationära lösningarna $y_1 = \quad 1$ och $y_2 = 1$.
$y_2 = 1$ är asymptotiskt stabil och $y_1 = \quad 1$ är instabil.
a) $\lim_{x} y(x) = \quad 1$ b) $\lim_{x} y(x) = 1$.

2. Bestäm lösningen till begynnelsevärdesproblemet $xy \quad y^2 = y,\ y(1) = 3$.
Ange därefter lösningens existensintervall.

……………………………………………………………………………….………

Lösningsförslag:
Differentialekvationen är separabel. (Även av Bernoulli typ.)
Vi omformar: $xy \ = y^2 + y$.
De två konstantlösningarna $y = 0$ och $y = \quad 1$ uppfyller ej villkoret.
Då $y \quad 0$ och $y \quad 1$ samt $x \quad 0$ kan differentialekvationen skrivas: $\frac{1}{y^2+y} y \ = \frac{1}{x}$.

Vi partialbråksuppdelar och får då följande uttryck: $\frac{1}{y} \quad \frac{1}{y+1} \quad y \quad = \frac{1}{x}$.

Integration map x : $\ln|y| \quad \ln|y+1| = \ln|x| + \ln|C_1|$, $\ln\left|\frac{y}{y+1}\right| = \ln|C_1 x|$, $\frac{y}{y+1} = \pm C_1 x = Cx$.

Bestäm integrationskonstanten. Villkoret $y(1) = 3$ ger $C = \frac{3}{4}$.

Sätt in konstanten i ekvationen och lös ut den sökta lösningen.

Vi får: $4y = 3x(y+1)$, $y = \frac{3x}{4 \quad 3x}$ där $4 \quad 3x \quad 0$.

Villkoret $4 \quad 3x \quad 0$ ger att det finns två möjliga intervall:

$x : 0 < x < \frac{4}{3}$ eller $x : x > \frac{4}{3}$.

Begynnelsevillkoret, $y(1) = 3$, ger att det aktuella intervallet är $x : 0 < x < \frac{4}{3}$.

SVAR: Den sökta lösningen är $y = \frac{3x}{4 \quad 3x}$ och dess existensintervall är $x : 0 < x < \frac{4}{3}$.

3. I en befolkningsmodell för ett samhälle antas att hastigheten varmed befolkningsmängden, $P(t)$, förändras vara beroende av differensen mellan födelse- och dödshastigheten.
Födelsehastigheten är proportionell mot befolkningsmängden medan dödshastigheten är proportionell mot kvadraten på befolkningsmängden.
Ställ upp ovanstående modell i form av en differentialekvation.
Analysera därefter modellen kvalitativt med proportionalitetskonstanterna lika med tre och ett i nämnd ordning. Ange även befolkningsmängden efter lång tid.

... ...

Lösningsförslag

Den sökta modellen blir: $\frac{dP}{dt} = k_1 P \quad k_2 P^2$, där $P \quad 0$.

Inför de givna värdena på konstanterna $k_1 = 3$ och $k_2 = 1$: $\frac{dP}{dt} = 3P \quad P^2 = P(3 \quad P)$.

Vi bestämmer först de stationära lösningarna och analyserar därefter lösningarnas uppförande för olika startvärden.

Vi är intresserade av långtidsbeteendet.

De stationära lösningarna ges av: $P_1 = 0$ och $P_2 = 3$.

Vi erhåller:

$P > 3 \quad \frac{dP}{dt} < 0 \quad P(t)$ är avtagande .

$0 < \mathrm{P} < 3 \quad \frac{dP}{dt} > 0 \quad P(t)$ är växande .

Detta innebär att vi erhåller ett stabilt jämviktsläge $P = 3$.

Efter lång tid kommer befolkningsmängden att vara lika med 3.

SVAR: Den sökta modellen ges av: $\frac{dP}{dt} = k_1 P \quad k_2 P^2$, där $P \quad 0$ och $\lim_{t} P(t) = 3$.