KTH Matematik
SF1633, Differentialekvationer I.
SF1637, Differentialekvationer och transformer III.
Kontrollskrivning nr 2, måndagen den 27 september 2010, kl 0830-09.30.
BETA, Mathematics Handbook är tillåtet hjälpmedel.

1. $y_1(x) = x^2$ är en lösning till differentialekvationen $x^3 y \; + x^2 y \quad 4xy = 0$, $x > 0$.
Bestäm den allmänna lösningen $x^3 y \; + x^2 y \quad 4xy = \quad 3$, $x > 0$.
Bestäm även den lösning som uppfyller villkoren $y(1) = 4$ och $y\,(1) = 1$.
....
Lösningsförslag:
Vi utnyttjar den kända lösningen genom att använda metoden ”reduktion av ordning”.
Detta innebär att vi sätter $y(x) = x^2 z(x)$ vilket insättes i
den inhomogena differentialekvationen.
Vi får då den allmänna lösningen.
$x^3(x^2 z \; + 4xz \; + 2z) + x^2(x^2 z \; + 2xz) \quad 4xx^2 z = \quad 3$
Förenkling ger
$x^5 z \; + 5x^4 z \; = \quad 3$
Sätt $u = z$, $u \; = z$.
Vi får $x^5 u \; + 5x^4 u = \quad 3$.
Vi har erhållit en första ordningens linjär differentialekvation.
Den kan lösas med hjälp av en integrerande faktor.
En observation ger dock vid handen att det vänstra ledet är en derivata.
Vi har således $(x^5 u) \; = \quad 3$.
Integrera med avseende på x: $x^5 u = \quad 3x + C_1$, $u = \quad 3x^{\;4} + C_1 x^{\;5}$.
Vi får $z \; = \quad 3x^{\;4} + C_1 x^{\;5}$.
Integrera med avseende på x: $z = x^{\;3} + C_1 \dfrac{x^{\;4}}{4} + C_2$.
$y(x) = x^2 z(x)$ ger: $y(x) = x^2(x^{\;3} + C_1 \dfrac{x^{\;4}}{4} + C_2) = x^{\;1} + Ax^{\;2} + Bx^2$.
Bestäm derivatan $y\,(x) = \quad x^{\;2} \quad 2Ax^{\;3} + 2Bx$
Villkoren $y(1) = 4$ och $y\,(1) = 1$ ger: $\begin{array}{ll} 4 = 1 + A + B & \quad A + B = 3 \\ 1 = \quad 1 \quad 2A + 2B & \quad 2A + 2B = 2 \end{array}$
Konstanterna blir $A = 1$, $B = 2$.
Den sökta lösningen är $y(x) = x^{\;1} + x^{\;2} + 2x^2$

SVAR: Den allmänna lösningen är $y(x) = x^{\;1} + Ax^{\;2} + Bx^2$.
Lösningen till begynnelsevärdesproblemet är $y(x) = x^{\;1} + x^{\;2} + 2x^2$.

2. Positionen för en partikel ges av systemet $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}$.

För $2x2$-matrisen $\mathbf{A}$ gäller följande ekvationer: $\mathbf{A}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ och $\mathbf{A}\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix} = 7\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$.

Detta innebär att egenvärden och tillhörande egenvektor är givna.
Bestäm den allmänna lösningen till systemet av differentialekvationer.
Vart tar en partikel placerad i punkten $(6,\ 2)$ vägen efter lång tid ?

....

Lösningsförslag:

Vi bestämmer först matrisens egenvärden och därefter motsvarande egenvektorer. Egenvärdena erhålles direkt ur de givna sambanden.

Vi får: $\lambda_1 = -1$, $\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ och $\lambda_2 = 7$, $\mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$.

Den allmänna lösningen är $\mathbf{X} = c_1 e^{-t}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} + c_2 e^{7t}\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$.

Vi bestämmer den lösning som går genom punkten $(6,\ 2)$.

Insättning av punkten $(6,\ 2)$ och tiden $t = 0$ i $\mathbf{X} = c_1 e^{-t}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} + c_2 e^{7t}\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$

ger $\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$ vilket leder till $\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$.

Den lösning som går genom punkten $(6,\ 2)$ är $\mathbf{X} = 2e^{-t}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$.

Efter lång tid kommer partikeln att hamna i origo.

SVAR: Den allmänna lösningen är $\mathbf{X} = c_1 e^{-t}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} + c_2 e^{7t}\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$.

Partikeln närmar sig origo.

3. Studera det icke-linjära systemet $\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \begin{matrix} xy \\ x \quad 1+2y \end{matrix}$

genom att hitta alla kritiska punkter, bestäm deras typ(nod, sadelpunkt, spiral, centrum) och avgöra huruvida de är stabila eller instabila.

Lösningsförslag:

I kritiska punkter är tangentvektorn lika med nollvektorn. Vi får $\mathbf{0} = \begin{matrix} xy \\ x \quad 1+2y \end{matrix}$.

De kritiska punkterna är: $(1,0)$ och $(0,\ 0.5)$.

Nu över till bestämning av de stationära punkternas karaktär.

Vi linjariserar det icke-linjära systemet.

Först beräknas Jacobimatrisen och därefter insättes respektive stationär punkt.

Jacobimatrisen $\mathbf{J}(x,y) = \begin{matrix} y & x \\ 1 & 2 \end{matrix}$.

Insättning av $(1,0)$ ger

$$\mathbf{J}(1,0) = \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{matrix} = \mathbf{A}$$

Egenvärden bestämmes.

$$\begin{vmatrix} & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = {}^2 \quad 2 \quad 1$$

$$0 = (\quad 1)^2 \quad 2$$

$$= 1 \pm \sqrt{2}$$

Reella med skilda tecken.

Sadelpunkt och därmed instabil.

Insättning av $(0,\ 0.5)$ ger

$$\mathbf{J}(0,0.5) = \begin{matrix} 0.5 & 0 \\ 1 & 2 \end{matrix} = \mathbf{C}$$

Egenvärden bestämmes.

$$\begin{vmatrix} 0.5 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$_1 = 0.5\ , \quad _2 = 2$$

Egenvärdena är positiva.

Instabil nod.

Det linjariserade systemet uppvisar en sadelpunkt i $(1,0)$ och en instabil nod i $(0,\ 0.5)$.

Detsamma gäller även för det icke-linjära systemet.

SVAR: De kritiska punkterna är $(1,0)$ och $(0,\ 0.5)$.

$(1,0)$ är sadelpunkt och därmed instabil. $(0,\ 0.5)$ är en instabil nod.