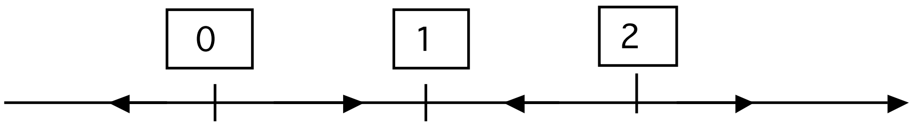
KTH Matematik
Lösningsförslag till SF1633, Differentialekvationer I.
Kontrollskrivning nr 1, måndagen den 4 april 2011, kl 08.30-09.30.
BETA, Mathematics Handbook är tillåtet hjälpmedel.

1. Bestäm de stationära lösningarna (jämviktslösningarna) till den autunoma differentialekvationen $\frac{dy}{dx} = y(y \quad 1)(y \quad 2)$.
Undersök om det finns någon attraktor och bestäm även för vilka startvärden $y(0) = y_0$ som $\lim_{x} y(x)$ är ändligt.

……………………………………………………………………………

Lösningsförslag:
De stationära lösningarna erhålles då derivatan är lika med noll.
Vi får de stationära lösningarna $y_1 = 0$, $y_2 = 1$ och $y_3 = 2$.
En teckenstudie av derivatan ger information rörande stabiliteten.
För $y < 0$ och $1 < y < 2$ är derivatan negativ och y är avtagande.
För $0 < y < 1$ och $y > 2$ är derivatan positiv och y är växande.



Den stationära lösningen $y_2 = 1$ är en attraktor.
De övriga stationära lösningarna är repellatorer.
$\lim_{x} y(x)$ är ändligt för startvärden $y(0) = y_0$: $0 \quad y_0 \quad 2$.

SVAR: De stationära lösningarna är $y_1 = 0$, $y_2 = 1$ och $y_3 = 2$.
Den stationära lösningen $y_2 = 1$ är en attraktor.
$\lim_{x} y(x)$ är ändligt för startvärden $y(0) = y_0$: $0 \quad y_0 \quad 2$.

2. Bestäm lösningen till begynnelsevärdesproblemet $4y \; = y^2 \quad 4,\; y(0) = 3$.
Ange därefter lösningens existensintervall.

……………………………………………………………………………

Lösningsförslag:
Differentialekvationen är separabel.
De två konstantlösningarna $y = 2$ och $y = \quad 2$ uppfyller ej villkoret.
Då $y \quad \pm 2$ kan differentialekvationen skrivas: $\frac{4}{y^2 \quad 4} y \; = 1$.

Vi partialbråksuppdelar och får då följande uttryck: $\frac{1}{y \quad 2} \quad \frac{1}{y+2} \; y \; = 1$.

Integration map x : $\ln|y \quad 2| \quad \ln|y+2| = x + \ln|C_1|$, $\ln\left|\frac{y \quad 2}{y+2}\right| = \ln|C_1 e^x|$, $\frac{y \quad 2}{y+2} = \pm C_1 e^x = Ce^x$.

Bestäm integrationskonstanten. Villkoret $y(0)=3$ ger $C=\frac{1}{5}$.

Sätt in konstanten i ekvationen och lös ut den sökta lösningen.

Vi får: $5(y-2)=e^{x}(y+2)$, $y=\dfrac{2e^{x}+10}{5-e^{x}}$ där $5-e^{x}\neq 0$.

Villkoret $5-e^{x}\neq 0$ ger att det finns två möjliga intervall:
$\{x : x<\ln 5\}$ eller $\{x : x>\ln 5\}$.

Begynnelsevillkoret, $y(0)=3$, ger att det aktuella intervallet är $\{x : x<\ln 5\}$.

SVAR: Den sökta lösningen är $y=\dfrac{2e^{x}+10}{5-e^{x}}$ och
dess existensintervall är $\{x : x<\ln 5\}$.

3. I en tank på 100 liter finns 100 liter vatten.
En saltlösning med koncentrationen 3 gram per liter pumpas in
med hastigheten 2 liter per minut.
Den välblandade lösningen pumpas ut med hastigheten 4 liter per minut.
Ställ upp en differentialekvation som beskriver detta förlopp
samt ange aktuellt tidsintervall.
Bestäm saltmängden som funktion av tiden.

……………………………………………………………………………………

Lösningsförslag:

Låt $S(t)$ vara saltmängden i tanken vid tiden t.

Vi erhåller följande differentialekvation för saltmängden

$$\frac{dS(t)}{dt}=2\cdot 3-4\cdot\frac{S(t)}{100-t(4-2)}\,.$$

Detta är en linjär differentialekvation av första ordningen.
Vi löser den med hjälp av en integrerande faktor.
Omskrivning av differentialekvationen ger:

$$\frac{dS(t)}{dt}+\frac{2}{50-t}S(t)=6\,.$$

Multiplicera med en integrerande faktor: $(50-t)^{-2}$.

$$(50-t)^{-2}\frac{dS(t)}{dt}+2(50-t)^{-3}S(t)=6(50-t)^{-2}$$

Detta kan skrivas:

$$\frac{d}{dt}\left\{S(t)(50-t)^{-2}\right\}=6(50-t)^{-2}\,.$$

Integrera med avseende på t. $S(t)(50-t)^{-2}=6(50-t)^{-1}+C$.

Villkoret $S(0)=0$ ger: $0=6(50)^{-1}+C$, $C=-3(25)^{-1}$.

Insättning ger: $S(t)=6(50-t)-\dfrac{3(50-t)^{2}}{25}$ där $0\le t\le 50$.

Tanken är tom efter 50 minuter.

SVAR: Saltmängden ges av $S(t)=6(50-t)-\dfrac{3(50-t)^{2}}{25}$, $0\le t\le 50$.