KTH Matematik
SF1633, Differentialekvationer I.
Kontrollskrivning nr 2, måndagen den 2 maj 2011, kl 08.30-09.30.
BETA, Mathematics Handbook är tillåtet hjälpmedel.

1. $y_1(x) = 2x^2 \quad x^3$, $y_2(x) = x^2 + x^3$, $y_3(x) = x^2$ och $y_4(x) = x^2 + 4x^3$ är lösningar till differentialekvationen $x^2 y \;\; + bxy \;\; + cy = 0$ , $x > 0$. $b$ och $c$ är konstanter.
Vidare är $y_p(x) = x^4$ en partikulärlösning till $x^2 y \;\; + bxy \;\; + cy = f(x)$ , $x > 0$.
Bestäm den lösning till differentialekvationen $x^2 y \;\; + bxy \;\; + cy = f(x)$ , $x > 0$ som uppfyller villkoren $y(1) = 1$ och $y\,(1) = 6$.

Lösningsförslag:

Vi börjar med att ange den allmänna lösningen.
Den består av den allmänna homogena lösningen plus en partikulärlösning.
För att beskriva den allmänna homogena lösningen behövs två linjärt oberoende lösningar.
Vi har erhållit fyra lösningar till den linjära differentialekvationen av ordning två.
$x^2$ och $x^3$ är linjärt oberoende lösningar till den homogena differentialekvationen.
Den allmänna lösningen till den inhomogena lösningen är $y(x) = c_1 x^2 + c_2 x^3 + x^4$ ,
där $c_1$ och $c_2$ är godtyckliga konstanter.
Vi behöver även $y\,(x) = c_1 2x + c_2 3x^2 + 4x^3$.

Villkoren ger oss följande system: $\begin{matrix} 1 = y(1) = c_1 + c_2 + 1 \\ 6 = y\,(1) = c_1 2 + c_2 3 + 4 \end{matrix}$ , vilket har lösningen $\begin{matrix} c_1 = \quad 2 \\ c_2 = 2 \end{matrix}$ .

Den sökta lösningen är $y(x) = \quad 2x^2 + 2x^3 + x^4$.

SVAR: Den sökta lösningen är $y(x) = \quad 2x^2 + 2x^3 + x^4$, $x > 0$.

2. Positionen för en partikel ges av systemet $\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} = \begin{matrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{matrix} \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}$ .

Bestäm den allmänna lösningen till systemet av differentialekvationer.
Vart tar en partikel placerad i punkten $(2, \;\; 2)$ respektive $\;\; (2,2)$ vägen efter lång tid ?

Lösningsförslag:

Vi börjar med att bestämma matrisens egenvärden och tillhörande egenvektorer.

Egenvärdena erhålles ur ekvationen $0 = \begin{vmatrix} 2 & & 3 \\ & 1 & \end{vmatrix} = {}^{2} \quad 2 \quad\; 3$.

Egenvärdena är $_1 = 3$ och $_2 = \;\; 1$.

Egenvektorerna erhålles ur ekvationen $\begin{matrix} 2 & & 3 \\ & 1 & \end{matrix} \quad \mathbf{v} = \mathbf{0}$ med aktuellt egenvärde insatt.

$_1 = 3$

$\begin{matrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{matrix} \mathbf{v}_1 = \mathbf{0}, \; \mathbf{v}_1 = \begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix}$

$_2 = \;\; 1$

$\begin{matrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{matrix} \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}, \; \mathbf{v}_2 = \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}$

Den allmänna lösningen ges av en linjärkombination av de linjärt oberoende

lösningarna $\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}_1 = e^{3t} \begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix}$ och $\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}_2 = e^{\;\;t} \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}$ .

Vi får $\mathbf{X} = \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} = c_1 e^{3t} \begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix} + c_2 e^{\ t} \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} = \begin{matrix} 3e^{3t} & e^{\ t} \\ e^{3t} & e^{\ t} \end{matrix} \begin{matrix} c_1 \\ c_2 \end{matrix}$,

där $c_1$ och $c_2$ är godtyckliga konstanter.

En partikel placerad längs egenvektorn $\mathbf{v}_2 = \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}$ kommer att förflytta sig mot origo.

Partikel placerad i övriga positioner kommer att avlägsna sig obegränsat från origo.

SVAR: Den allmänna lösningen ges av $\mathbf{X} = \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} = c_1 e^{3t} \begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix} + c_2 e^{\ t} \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} = \begin{matrix} 3e^{3t} & e^{\ t} \\ e^{3t} & e^{\ t} \end{matrix} \begin{matrix} c_1 \\ c_2 \end{matrix}$.

En partikel placerad i punkten $(2,\ 2)$ går mot origo.
En partikel placerad i punkten $(2,2)$ avlägsnar sig obegränsat.

3. Studera det icke-linjära systemet $\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} = \begin{matrix} 1 \quad y \\ x^2 \quad x + y \quad y^2 \end{matrix}$

genom att finna alla kritiska punkter, bestämma deras typ(nod, sadelpunkt, spiral, centrum) o
avgöra huruvida de är stabila eller instabila.

Lösningsförslag:

I kritiska punkter är tangentvektorn lika med nollvektorn. Vi får $\mathbf{0} = \begin{matrix} 1 \quad y \\ x^2 \quad x + y \quad y^2 \end{matrix}$.

De kritiska punkterna är: $(0,1)$ och $(1,\ 1)$.
Nu över till bestämning av de kritiska punkternas karaktär.
Vi linjariserar det icke-linjära systemet.
Först beräknas Jacobimatrisen och därefter insättes respektive kritisk punkt.

Jacobimatrisen $\mathbf{J}(x,y) = \begin{matrix} 0 & 1 \\ 2x \quad 1 & 1 \quad 2y \end{matrix}$.

Insättning av $(0,1)$ ger

$\mathbf{J}(0,1) = \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix}$

Egenvärden bestämmes.

$\begin{vmatrix} & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = {}^2 + \quad 1 = 0$

$0 = ( \ + \frac{1}{2})^2 \quad \frac{5}{4}$

${}_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Reella med skilda tecken.
Sadelpunkt och därmed instabil.

Insättning av $(1,\ 1)$ ger

$\mathbf{J}(1,1) = \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix}$

Egenvärden bestämmes.

$\begin{vmatrix} & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = {}^2 + \quad + 1 = 0$

$0 = ( \ + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$

${}_{1,2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

Komplexa egenvärdena med negativ realdel.
Stabil spiral.

Det linjariserade systemet uppvisar en sadelpunkt i $(0,1)$ och en stabil spiral i $(1,\ 1)$.
Detsamma gäller även för det icke-linjära systemet.

SVAR: De kritiska punkterna är $(0,1)$ och $(1,\ 1)$.
$(0,1)$ är sadelpunkt och därmed instabil. $(1,\ 1)$ är en stabil spiral.