Institutionen för matematik, KTH,
Björn Gustafsson

Lösningar till tentamensskrivning, 2010-05-31, Partiella differentialekvationer för ME och K.

Anm: Vissa detaljer inom ramen för standardresonemang, samt rutinräkningar, har här utelämnats. Fullständiga detaljer ska dock redovisas på tentamensskrivningar.

1. a)

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi 4x \sin nx dx = \cdots = \frac{8(-1)^{n-1}}{n}.$$

b) Variabelseparation efter vanligt mönster (detaljerna utelämnas) ger den allmänna lösningen till PDE + RV:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^\infty B_n e^{-n^2 t} \sin nx,$$

varefter anpassning till BV ger, med hjälp av a), svaret på uppgiften:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^\infty \frac{8(-1)^{n-1}}{n} e^{-n^2 t} \sin nx.$$

2. Ansatsen $y = \sum_{n=0}^\infty a_n x^{n+r}$ ger, om vi sätter $a_n = 0$ för $n < 0$,

$$x^2 y'' + xy' + (9x^2 - 4)y = \cdots = \sum_n [(n+r+2)(n+r-2)a_n + 9a_{n-2}]x^{n+r},$$

där summationen sker över alla heltal n. Denna serie ska vara lika med noll, vilket endast inträffar om alla koefficienter är noll. Då $n < 0$ försvinner automatiskt koefficienterna. Då $n = 0$ blir, med tanke på att $a_{-2} = 0$ och $a_0 = 1$, koefficienten noll om och endast om

$$(r+2)(r-2) = 0.$$

Detta är indexekvationen, med rötter $r = \pm 2$. Den största roten, $r = 2$, leder med säkerhet till en lösning på den sökta formen.

Med denna rot, $r = 2$, får vi rekursionsformeln

$$a_n = -\frac{9}{n(n+4)} a_{n-2}$$

för $n > 0$, med startvärden $a_{-1} = 0$, $a_0 = 0$. Detta leder till svaret

$$y = x^2 - \frac{3}{4}x^4 + \frac{27}{128}x^6 - \dots .$$

3. Fouriertransformera i x-led. Med

$$\hat{u}(\omega,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t) e^{-i\omega x} dx$$

(Asmars definition av Fouriertransformen) blir differentialekvationen

$$(i\omega)^2 \hat{u}(\omega,t) = \frac{\partial \hat{u}(\omega,t)}{\partial t}.$$

Denna ordinära differentialekvation i t har den allmänna lösningen

$$\hat{u}(\omega,t) = A(\omega) e^{-\omega^2 t}.$$

För $t = 0$ fås $A(\omega) = \hat{u}(\omega,0)$, varvid Fouriertransformering av $u(x,0)$ med hjälp av t.ex., formel 19 på sid A67 i Asmar, att

$$A(\omega) = \hat{u}(\omega,0) = \frac{-i\omega}{4^{3/2}} e^{-\frac{\omega^2}{8}},$$

och därmed

$$\hat{u}(\omega,t) = \frac{-i\omega}{8} e^{-\omega^2 (t+\frac{1}{8})}.$$

Återstår inverstransformering, som kan göras genom att köra samma formel (i Asmar) baklänges. Efter lite räkningar fås svaret

$$u(x,t) = \frac{x e^{-\frac{2x^2}{8t+1}}}{(8t+1)^{3/2}}.$$

Man kan notera att lösningen existerar en liten bit bakåt i tiden, närmare bestämt för $-\frac{1}{8} < t < \infty$.

4. a) Randvärdena beror inte på φ (och inga andra data heller) och Laplace-operatorn är invariant under rotation runt z-axeln. Alltså kan inte heller lösningen bero på φ eftersom den är entydigt bestämd.

En något mer precis motivering är följande: Koefficienterna i differentialekvationen beror inte på φ. Om vi därför applicerar $\frac{\partial}{\partial \varphi}$ på differentialekvationen, $\Delta V = 0$, så följer det att $\Delta \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0$. Vidare har vi $\frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0$ på hela randen. Därmed löser $\frac{\partial V}{\partial \varphi}$ ett Dirichletproblem vars enda lösning är $\frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0$. Vilket skulle bevisas.

b) På grund av a) kan vi skriva $V = V(\rho, z)$ i fortsättningen. Vi ansätter först variableseparerade lösninger $V(\rho,z) = R(\rho)Z(z)$ till differentialekavationen och randvillkoren på mantelytan (inklusive uppförandet vid z-axeln). Efter insättning i

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

och division med RZ fås

$$\frac{R''}{R} + \frac{R'}{\rho R} + \frac{Z''}{Z} = 0.$$

Här beror sista termen i vänsterledet enbart på z, medan övriga termer inte beror på z. Det följer att den nämnda termen är konstant, säg $= k$. Resten av vänsterledet är då $= -k$, vilket ger ekvationen för R,

$$\rho R'' + R' + k\rho R = 0.$$

Detta är Bessels differentialekvation, på parametrisk form och av ordning noll, vilket tydligast inses om man förlänger med ρ och skriver $k = a^2$; det får anses känt att endast $k > 0$ ger icke-triviala lösningar.

Ekvationen är nu

$$\rho^2 R'' + \rho R' + a^2 \rho^2 R = 0 \quad (0 < \rho < 2),$$

med allmän lösning

$$R(\rho) = AJ_0(a\rho) + BY_0(a\rho).$$

Här måste $B = 0$ för att villkoret då $\rho \to 0$ ska bli uppfyllt. Randvillkoret att $R = 0$ då $\rho = 2$ ger sedan att $J_0(2a) = 0$, dvs att

$$a = \frac{\alpha_n}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

där α_n betecknar nollställena till J_0 $(0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots)$.

Vi har nu kommit fram till att de enda möjligheterna för k och R är

$$k = \frac{\alpha_n^2}{4}, \quad R(\rho) = AJ_0(\frac{\alpha_n \rho}{2}).$$

För Z får vi ekvationen

$$Z'' - \frac{\alpha_n^2}{4} Z = 0,$$

med allmän lösning

$$Z = A_n e^{\frac{\alpha_n z}{2}} + B_n e^{-\frac{\alpha_n z}{2}} = a_n \cosh \frac{\alpha_n z}{2} + b_n \sinh \frac{\alpha_n z}{2}.$$

Vi föredrar den senare formen eftersom den bäst passar de randvillkor vi har i z-led. Sammanställning av ovanstående ger, efter bortsortering av överflödiga konstanter, den allmänna lösningen till PDE + RV mantel:

$$V(\rho, z) = \sum_{n=1}^{\infty} J_0(\frac{\alpha_n \rho}{2})(a_n \cosh \frac{\alpha_n z}{2} + b_n \sinh \frac{\alpha_n z}{2}).$$

Insättning av randvillkoren för bottenytan ger att $a_n = 0$ för alla n, varefter randvillkoret för toppytan ger

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sinh \frac{3\alpha_n}{2} J_0(\frac{\alpha_n \rho}{2}) = 100 \quad (0 < \rho < 2).$$

Detta är en Besselserie på intervallet $0 < \rho < 2$. De förekommande Besselfunktionerna är ortogonala med avseende på måttet $\rho d\rho$, så

$$b_n \sinh \frac{3\alpha_n}{2} = \frac{\int_0^2 100 \cdot J_0(\frac{\alpha_n \rho}{2}) \rho d\rho}{\int_0^2 J_0(\frac{\alpha_n \rho}{2})^2 \rho d\rho}.$$

Från BETA, avsnitt 12.4 (t.ex. under “Recurrence formulas”, alternativt “Orthogonal series of Bessel functions”), kan man utläsa att

$$\int_0^2 J_0(\frac{\alpha_n \rho}{2})^2 \rho d\rho = \frac{2^2}{2} J_0'(\alpha_n)^2 = 2J_1(\alpha_n)^2.$$

Vi har också, enligt BETA eller gult blad (Asmar), $\frac{d}{dx}(xJ_1(x)) = xJ_0(x)$, varför

$$\int_0^2 J_0(\frac{\alpha_n \rho}{2})\rho d\rho = \cdots = \frac{4}{\alpha_n} J_1(\alpha_n).$$

Allt detta ger

$$b_n = \frac{200}{\alpha_n \sinh \frac{3\alpha_n}{2} J_1(\alpha_n)},$$

och därmed svaret

$$V(\rho, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{200}{\alpha_n \sinh \frac{3\alpha_n}{2} J_1(\alpha_n)} J_0(\frac{\alpha_n \rho}{2}) \sinh \frac{\alpha_n z}{2}.$$

5. a) Produktansatsen ger

$$\frac{rR'}{R} + \frac{i\Phi'}{\Phi} = 0,$$

där var och en av termerna måste vara konstant, säg $= +k$ resp. $-k$. För Φ fås då

$$\Phi' = ik\Phi$$

med allmän lösning

$$\Phi(\varphi) = Ae^{ik\varphi}.$$

För att denna funktion ska vara 2π-periodisk måste k vara ett heltal (ej nödvändigtvis positivt).

För R fås nu

$$R' - \frac{k}{r}R = 0 \quad (0 < r < a).$$

Multiplikation med den integrerande faktorn r^{-k} ger

$$r^{-k}R' - kr^{-k-1}R = 0,$$

dvs $(r^{-k}R)' = 0$, med lösning

$$R(r) = Br^k.$$

Eftersom R måste vara regulär i origo så bortfaller alla negativa värden på k. Kvarstår alltså: $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Sammanfattningsvis har vi funnit att varje produktlösning måste vara på formen $C_k r^k e^{ik\varphi}$ (C_k konstant) med $k = 0, 1, 2, \ldots$. Superposition av alla dessa ger den allmänna lösningen

$$U(r, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k r^k e^{ik\varphi}.$$

b) Genom identifiering av ovanstående med det givna randvillkoret fås omedelbart lösningen

$$U(r, \varphi) = 2 + 3r^4 e^{4i\varphi}.$$

c) Här har vi att identifiera Fourierserien $\sum_{k=0}^{\infty} C_k e^{ik\varphi}$ med $e^{5i\varphi} - e^{-5i\varphi}$, vilket inte är möjligt eftersom det förekommer en term med negativt k i den senare. Lösning saknas alltså.