KTH Matematik
Olle Stormark

Lösningsförslag till kontrollskrivning 1B i SF1649 Vektoranalys och komplexa funktioner för CELTE, vt 2011.

- *Hjälpmedel*: BETA (och inget annat).
- Sammanlagt kan man få högst 9 poäng − *för godkänt krävs minst 5 poäng.*
- Lösningsförslag publiceras på hemsidan efter skrivningens slut.

1. (a) Låt $\boldsymbol{r} = (x_1, x_2, x_3)$ vara ortsvektorn, och låt $\boldsymbol{a}$ vara en konstant vektor. Visa formeln

$$\text{rot}\,(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r}) = 2\boldsymbol{a} \qquad (*)$$

direkt från definitionerna av rot och $\times$, utan att använda BETA eller indexräkning. (3p)

Lösning:

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = (a_2x_3 - a_3x_2, a_3x_1 - a_1x_3, a_1x_2 - a_2x_1)$$

och

$$\begin{aligned}\text{rot}(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r}) &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ \partial/\partial x_1 & \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_3 \\ a_2x_3 - a_3x_2 & a_3x_1 - a_1x_3 & a_1x_2 - a_2x_1 \end{vmatrix} \\ &= (a_1 + a_1, a_2 + a_2, a_3 + a_3) = 2\boldsymbol{a}.\end{aligned}$$

(b) Visa formeln (*) med hjälp av indexräkning. (3p)
LEDNING: $\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\,\epsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$.

Lösning:

$$[\mathrm{rot}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r})]_i =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\,\frac{\partial}{\partial x_j}\,(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r})_k = \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\,\frac{\partial}{\partial x_j}\,\sum_{l,m=1}^{3} \epsilon_{klm}\,a_l\,x_m \\
&= \sum_{j,k,l,m=1}^{3} \epsilon_{ijk}\,\epsilon_{klm}\,a_l\,\delta_{jm} = \{\text{summera över } m\} \\
&= \sum_{j,l=1}^{3} \left(\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\epsilon_{klj}\right) a_l = \sum_{j,l=1}^{3} (\delta_{il}\delta_{jj} - \delta_{ij}\delta_{jl})\,a_l \\
&= \{\text{summera över } l \text{ och observera att } \delta_{jj} = 1\} \\
&= \sum_{j=1}^{3} (a_i - \delta_{ij}\,a_j) = 3a_i - a_i = 2a_i \Longrightarrow \\
&\quad \mathrm{rot}\,(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r}) = 2\boldsymbol{a}.
\end{aligned}$$

2. Beräkna flödesintegralen $\iint_\Sigma \boldsymbol{F}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,dS$ då $\boldsymbol{F} = (6z, 2x+y, -x^2)$, $\Sigma = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+z^2 = 9,\ x\ge 0,\ z\ge 0,\ 0\le y\le 8\}$, och enhetsnormalen $\hat{\boldsymbol{n}}$ har en positiv x-komponent. (3p)

Lösning: $\boldsymbol{r} = (3\cos\phi, y, 3\sin\phi)$, där $0\le\phi\le\pi/2$ och $0\le y\le 8 \Longrightarrow$

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{n}}\,dS &= \pm\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ -3\sin\phi & 0 & 3\cos\phi \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} d\phi dy \\
&= \mp\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_z \\ -3\sin\phi & 3\cos\phi \end{vmatrix} d\phi dz = \mp 3\,(\cos\phi, 0, \sin\phi)\,d\phi dy.
\end{aligned}$$

$\hat{\boldsymbol{n}}_x > 0 \Longrightarrow +$ gäller. Så på Σ är

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,dS &= (18\sin\phi, 6\cos\phi + y, -\cos^2\phi)\cdot 3(\cos\phi, 0, \sin\phi)\,d\phi dy \\
&= 3\cdot(18\cos\phi\sin\phi - 9\cos^2\phi\sin\phi)\,d\phi dy \\
&= 27\cdot(\sin 2\phi - \cos^2\phi\sin\phi)\,d\phi dy
\end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned}
\iint_\Sigma \boldsymbol{F}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,ds &= 27\int_{\phi=0}^{\pi/2}\int_{y=0}^{8} (\sin 2\phi - \cos^2\phi\sin\phi)\,d\phi dy \\
&= 27\cdot 8\cdot\left[-\frac{1}{2}\cos 2\phi + \frac{1}{3}\cos^3\phi\right]_0^{\pi/2} \\
&= 27\cdot 8\cdot\left(\frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = 27\cdot\frac{2}{3}\cdot 8 = 18\cdot 8 = 144.
\end{aligned}$$