KTH Matematik
Olle Stormark

Lösningsförslag till kontrollskrivning 2A i SF1649 Vektoranalys och komplexa funktioner för CELTE, vt 2011.

- *Hjälpmedel*: BETA (och inget annat).
- Sammanlagt kan man få högst 9 poäng – *för godkänt krävs minst 5 poäng.*
- Lösningsförslag publiceras på hemsidan efter skrivningens slut.

1. Beräkna
$$\iint_\Sigma \operatorname{rot} \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, dS$$
då $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon z = 4 - x^2 - y^2,\ z \geq 0\}$, $\hat{\boldsymbol{n}}$ har en positiv z-komponent och $\boldsymbol{F} = (e^{z^2}, 4z - y, 8x \sin y)$.

   Lösning: Upplagt för Stokes: $\iint_\Sigma \operatorname{rot} \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, dS = \oint_{\partial\Sigma} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$. Här är $\partial\Sigma = \{x^2 + y^2 = 4,\ z = 0\}$. Parametrisering med polära vinkeln ϕ i xy-planet ger att
$$\boldsymbol{r} = 2(\cos\phi, \sin\phi, 0) \text{ och } d\boldsymbol{r} = 2(-\sin\phi, \cos\phi, 0)\, d\phi.$$
   På Σ är $\boldsymbol{F} = (1, -2\sin\phi, 16\cos\phi \cdot \sin(2\sin\phi))$, så att
$$\boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = 2(-\sin\phi - 2\sin\phi\cos\phi)\, d\phi = -2(\sin\phi + \sin 2\phi)\, d\phi.$$
   Därmed fås
$$\iint_\Sigma \operatorname{rot} \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, dS = \oint_{\partial\Sigma} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = 2\left[\cos\phi + \frac{1}{2}\cos 2\phi\right]_0^{2\pi} = 0.$$

2. Bestäm en potentialfunktion $U(r, \theta, \phi)$ till vektorfältet

$$\boldsymbol{F} = \frac{2r\cos\phi}{(1+r^2)^2}\,\boldsymbol{e}_r + \frac{\sin\phi}{r(1+r^2)\sin\theta}\,\boldsymbol{e}_\phi.$$

Lösning: Ska hitta U så att $\boldsymbol{F} = \operatorname{grad} U$. Med

$$\operatorname{grad} U = \frac{\partial U}{\partial r}\,\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\,\boldsymbol{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial \phi}\,\boldsymbol{e}_\phi$$

fås

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial r} &= \frac{2r}{(1+r^2)^2}\cos\phi \\ \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta} &= 0 \\ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial \phi} &= \frac{\sin\phi}{r(1+r^2)\sin\theta} \end{aligned}\right\} \iff \left\{\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial r} &= \frac{2r}{(1+r^2)^2}\cos\phi \\ U &= U(r,\phi) \\ \frac{\partial U}{\partial \phi} &= \frac{\sin\phi}{(1+r^2)} \end{aligned}\right.$$

Sista ekvationen $\Longrightarrow U = -\cos\phi \cdot (1+r^2)^{-1} + f(r)$; detta insatt i den första ger

$$\cos\phi\,\frac{2r}{(1+r^2)^2} + f'(r) = \frac{2r}{(1+r^2)^2}\cos\phi \Longrightarrow f = C = \text{konstant},$$

så att

$$U = -\frac{\cos\phi}{1+r^2} + C.$$

3. Beräkna

$$\mathcal{I} = \iint_{\partial\Omega} \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\,dS$$

då $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 \le 4,\ 0 \le z \le 3\}$, $\hat{\boldsymbol{n}}$ är den utåtriktade enhetsnormalen för $\partial\Omega$ och $\boldsymbol{F} = (x^3 + \tan(yz), y^3 - e^{xz}, 3z + x^3)$.

Lösning: Divergenssatsen säger att $\mathcal{I} = \iiint_\Omega \operatorname{div} \boldsymbol{F}\,dV$, där

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F} = 3x^2 + 3y^2 + 3 = 3\,(x^2 + y^2) + 3 = 3\,(\rho^2 + 1),$$

så att

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= 3\int_{\rho=0}^{2}\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{z=0}^{3} (\rho^2+1)\cdot\rho\,d\rho d\phi dz = 3\cdot 2\pi\cdot 3\cdot \int_0^2 (\rho^3+\rho)\,d\rho \\ &= 18\pi\cdot\left[\frac{\rho^4}{4} + \frac{\rho^2}{2}\right]_0^2 = 18\pi\cdot(4+2) = 108\pi. \end{aligned}$$