KTH Matematik
Olle Stormark

Lösningsförslag till kontrollskrivning 2B i SF1649 Vektoranalys och komplexa funktioner för CELTE, vt 2011.

- *Hjälpmedel*: BETA (och inget annat).
- Sammanlagt kan man få högst 9 poäng – *för godkänt krävs minst 5 poäng.*
- Lösningsförslag publiceras på hemsidan efter skrivningens slut.

1. Beräkna
$$\iint_\Sigma \operatorname{rot} \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, dS$$
då $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2+y^2+z^2 = 4,\ z \geq 0\}$, $\hat{\boldsymbol{n}}$ har en positiv z-komponent och $\boldsymbol{F} = (e^{z^2}, 4z-y, 8x\sin y)$.

   Lösning: Upplagt för Stokes: $\iint_\Sigma \operatorname{rot} \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, dS = \oint_{\partial\Sigma} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$. Här är $\partial\Sigma = \{x^2+y^2 = 4,\ z = 0\}$. Parametrisering med polära vinkeln ϕ i xy-planet ger att
$$\boldsymbol{r} = 2(\cos\phi, \sin\phi, 0) \text{ och } d\boldsymbol{r} = 2(-\sin\phi, \cos\phi, 0)\, d\phi.$$
På Σ är $\boldsymbol{F} = (1, -2\sin\phi, 16\cos\phi \cdot \sin(2\sin\phi))$, så att
$$\boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = 2(-\sin\phi - 2\sin\phi\cos\phi)\, d\phi = -2(\sin\phi + \sin 2\phi)\, d\phi.$$
Därmed fås
$$\iint_\Sigma \operatorname{rot} \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, dS = \oint_{\partial\Sigma} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = 2\left[\cos\phi + \frac{1}{2}\cos 2\phi\right]_0^{2\pi} = 0.$$

2. Bestäm en lösning $A_\phi(\rho, z)$ till ekvationen
$$\nabla \times (A_\phi\, \boldsymbol{e}_\phi) = \nabla(\ln\rho) \quad \text{då } \rho \neq 0.$$

   Lösning: Från BETA ser man att
$$\begin{aligned}\nabla \times (A_\phi\, \boldsymbol{e}_\phi) &= \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_\rho & \rho\, \boldsymbol{e}_\phi & \boldsymbol{e}_z \\ \partial/\partial\rho & \partial/\partial\phi & \partial/\partial z \\ 0 & \rho\, A_\phi(\rho,z) & 0 \end{vmatrix} \\ &= -\frac{1}{\rho} \cdot \rho \cdot \frac{\partial A_\phi}{\partial z}\, \boldsymbol{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial\rho}(\rho \cdot A_\phi)\, \boldsymbol{e}_z \\ &= -\frac{\partial A_\phi}{\partial z}\, \boldsymbol{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho \cdot A_\phi)\boldsymbol{e}_z\end{aligned}$$

och

$$\nabla(\ln\rho) = \frac{\partial}{\partial\rho}(\ln\rho)\,\boldsymbol{e}_\rho = \frac{1}{\rho}\,\boldsymbol{e}_\rho,$$

så

$$\begin{cases} \dfrac{\partial A_\phi}{\partial z} = -\dfrac{1}{\rho} \\ \dfrac{\partial}{\partial\rho}(\rho\cdot A_\phi) = 0. \end{cases}$$

Första ekvationen visar att $A_\phi = -z/\rho + f(\rho)$; insatt i den andra fås

$$0 = \frac{\partial}{\partial\rho}(-z + \rho\cdot f(\rho)) = \frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\cdot f(\rho)) \iff \rho\cdot f(\rho) = C \iff f(\rho) = \frac{C}{\rho},$$

med en godtycklig konstant C. Alltså blir

$$A_\phi = -\frac{z}{\rho} + \frac{C}{\rho} = \frac{C - z}{\rho}.$$

3. Beräkna

$$\mathcal{I} = \iint_{\partial\Omega} \boldsymbol{F}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,dS$$

då $\Omega = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \colon x^2+z^2\le 1,\ 0\le y\le 10\}$, $\hat{\boldsymbol{n}}$ är den utåtriktade enhetsnormalen för $\partial\Omega$ och $\boldsymbol{F} = (z^2, y^2, x^2)$.

Lösning: Divergenssatsen säger att $\mathcal{I} = \iiint_\Omega \operatorname{div}\boldsymbol{F}\,dV$, där $\operatorname{div}\boldsymbol{F} = 2y$. Därmed fås

$$\begin{aligned}\mathcal{I} &= \iiint_\Omega 2y\,dV = \{\text{ med } (x,z) = (\rho\cos\phi, \rho\sin\phi)\} \\ &= \int_{\rho=0}^{1}\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{y=0}^{10} 2y\,\rho\,d\rho d\phi dy = 2\pi\cdot\left[y^2\right]_0^{10}\cdot\left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^1 = 2\pi\cdot 100\cdot\frac{1}{2} = 100\pi.\end{aligned}$$