KTH Matematik
Olle Stormark

Lösningsförslag till kontrollskrivning 3A i SF1649 Vektoranalys och komplexa funktioner för CELTE, vt 2011.

- *Hjälpmedel:* BETA (och inget annat).
- Sammanlagt kan man få högst 9 poäng – *för godkänt krävs minst 5 poäng.*
- Lösningsförslag publiceras på hemsidan efter skrivningens slut.

1. Bestäm bilden av cirkeln $\{z \in \mathbb{C} \colon |z - 1/2| = 1/2\}$ under avbildningen $w = 1/z$. (3p)

   Lösning: $w = 1/z \iff z = 1/w$. Så

$$\left|z - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} \iff \left|\frac{1}{w} - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} \iff \frac{|2-w|}{|2w|} = \frac{1}{2} \iff$$
$$|w-2|^2 = |w|^2 \iff (u-2)^2 + v^2 = u^2 + v^2 \iff$$
$$u^2 - 4u + 4 + v^2 = u^2 + v^2 \iff 4u = 4 \iff u = 1 \iff$$
$$\operatorname{Re} w = 1.$$

   Variant: Eftersom $w = 1/z$ är en Möbiusfunktion och $z = 0$ skickas till $w = \infty$ så blir bilden en rät linje. Vidare är $w(1) = 1$ och

$$z = \frac{1+i}{2} \mapsto w = \frac{2}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{2(1-i)}{2} = 1 - i,$$

   så bildlinjen går genom $w = 1$ och $w = 1 - i$, och ges alltså av $\{w \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re} w = 1\}$.

2. (a) Låt $u(x, y) = \cos x\,(e^{-y} - e^{y})$. Använd CR-ekvationerna för att bestämma en funktion $v(x, y)$ som är sådan att $f = u + iv$ blir komplext deriverbar. (2p)

(b) Framställ f som en funktion av $z = x + iy$ (snarare än som en funktion av x och y). (1p)

Lösning: (a) $u = \cos x\,(e^{-y} - e^{y}) \Longrightarrow$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y} = \cos x\,(e^{-y} + e^{y}), \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial x} = -\sin x\,(e^{-y} - e^{y}). \end{cases}$$

1:a ekvationen $\Longrightarrow v = \sin x\,(e^{-y} + e^{y}) + g(y);$ insatt i den 2:a fås

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \sin x\,(-e^{-y} + e^{y}) + g'(y) = -\sin x\,(e^{-y} - e^{y}) \Longrightarrow$$

$g(y) = C \Longrightarrow v = \sin x\,(e^{-y} + e^{y}) + C.$

(b)

$$\begin{aligned} f = u + iv &= \cos x\,(e^{-y} - e^{y}) + i \sin x\,(e^{-y} + e^{y}) + iC \\ &= e^{-y}\,(\cos x + i \sin x) - e^{y}\,(\cos x - i \sin x) + iC \\ &= e^{-y+ix} - e^{y-ix} + iC \\ &= e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)} + iC = e^{iz} - e^{-iz} + iC \\ &= 2i\,\sin z + iC. \end{aligned}$$

3. Om $w = f(z)$ så definieras inversen $z = f^{-1}(w)$ genom att man löser ut z som funktion av w. Visa:

$$w = f(z) = \cosh z = \frac{1}{2}(e^{z} + e^{-z}) \Longrightarrow z = f^{-1}(w) = \log(w + \sqrt{w^2 - 1}).$$

(3p)

Lösning:

$$w = \frac{1}{2}(e^{z} + e^{-z}) \iff e^{z} - 2w + e^{-z} = 0 \iff$$
$$(e^{z})^2 - 2w\,e^{z} + 1 = 0 \iff e^{z} = w + \sqrt{w^2 - 1} \iff$$
$$z = \log(w + \sqrt{w^2 - 1}.$$