KTH Matematik
Olle Stormark

Lösningsförslag till kontrollskrivning 3B i SF1649 Vektoranalys och komplexa funktioner för CELTE, vt 2011.

- *Hjälpmdel:* BETA (och inget annat).
- Sammanlagt kan man få högst 9 poäng – *för godkänt krävs minst 5 poäng.*
- Lösningsförslag publiceras på hemsidan efter skrivningens slut.

1. Bestäm bilden av den räta linjen $\{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re} z = 1\}$ under avbildningen $w = 1/z$. (3p)

   Lösning: $w = 1/z \iff z = 1/w$. Så

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{Re} z = 1 \iff \operatorname{Re} \frac{1}{u+iv} = 1 \iff \\
&\operatorname{Re} \frac{1}{u+iv} \cdot \frac{u-iv}{u-iv} = \operatorname{Re} \frac{u-iv}{u^2+v^2} = 1 \iff \frac{u}{u^2+v^2} = 1 \iff \\
&u^2+v^2-u = 0 \iff (u-1/2)^2 + v^2 = (1/2)^2 \iff \\
&|w-1/2| = 1/2.
\end{aligned}
$$

   Variant: Eftersom $w = 1/z$ är en Möbius och ingen punkt på linjen skickas till ∞, så är bilden en cirkel – och denna är bestämd av *tre* punkter. Så låt oss titta på några punkter:

$$
\begin{aligned}
&w(1) = 1 \text{ och } w(\infty) = 0; \\
&w(1+i) = \frac{1}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{1-i}{2}, \\
&w(1-i) = \frac{1}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{1+i}{2}.
\end{aligned}
$$

   Den enda cirkel som går genom pukterna 0, 1, $1/2 \pm i \cdot 1/2$ är den med medelpunkt i $w = 1/2$ och radien $= 1/2$, det vill säga $\{w \in \mathbb{C} \colon |w - 1/2| = 1/2\}$.

2. (a) Låt $u(x,y) = \cos x\,(e^y + e^{-y})$. Använd CR-ekvationerna för att bestämma en funktion $v(x,y)$ som är sådan att $f = u + iv$ blir komplext deriverbar. (2p)

(b) Framställ f som en funktion av $z = x+iy$ (snarare än som en funktion av x och y). (1p)

Lösning: (a) $u = \cos x\,(e^y + e^{-y}) \Longrightarrow$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\cos x\,(e^y - e^{-y}), \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial x} = -\sin x\,(e^y - e^{-y}). \end{cases}$$

1:a ekvationen $\Longrightarrow v = -\sin x\,(e^y - e^{-y}) + g(y);$ insatt i den 2:a fås

$\dfrac{\partial v}{\partial y} = -\sin x\,(e^y - e^{-y}) + g'(y) = -\sin x\,(e^y - e^{-y}) \Longrightarrow$

$g(y) = C \Longrightarrow v = -\sin x\,(e^y - e^{-y}) + C.$

(b)

$$\begin{aligned} f = u + iv &= \cos x\,(e^y + e^{-y}) - i\,\sin x\,(e^y - e^{-y}) + iC \\ &= e^y(\cos x - i\sin x) + e^{-y}(\cos x + i\sin x) + iC \\ &= e^{y-ix} + e^{-y+ix} + iC \\ &= e^{-i(x+iy)} + e^{i(x+iy)} + iC = e^{-iz} + e^{iz} + iC \\ &= 2\cos z + iC. \end{aligned}$$

3. Om $w = f(z)$ så definieras inversen $z = f^{-1}(w)$ genom att man löser ut z som funktion av w. Visa:

$$w = f(z) = \tanh z = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} \Longrightarrow z = f^{-1}(w) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+w}{1-w}\right). \quad (3p)$$

Lösning:

$$\begin{aligned} &w = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} \iff e^z \cdot w + e^{-z} \cdot w = e^z - e^{-z} \iff \\ &e^z(w-1) + e^{-z}(w+1) = 0 \iff e^{2z}(w-1) = -(w+1) \iff \\ &e^{2z} = \frac{1+w}{1-w} \iff 2z = \log\left(\frac{1+w}{1-w}\right) \iff \\ &z = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+w}{1-w}\right). \end{aligned}$$