KTH Matematik
Olle Stormark

Lösning till kontrollskrivning 1A

i SF1649 Vektoranalys och komplexa funktioner för CMIEL, ht 2010.

- Varje uppgift ger maximalt 3 poäng.
- För godkänt krävs minst 5 poäng sammanlagt.

1. Låt $\boldsymbol{r} = (x_1, x_2, x_3)$ vara ortsvektorn, låt $r = |\boldsymbol{r}|$, samt låt $\boldsymbol{a}$ vara en konstant vektor. Beräkna $\operatorname{div}(r\boldsymbol{a})$.

   Lösning:

$$\operatorname{div}(r\boldsymbol{a}) = \nabla \cdot (r\boldsymbol{a}) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}(r\, a_i) = \sum_{i=1}^{3} a_i \frac{\partial r}{\partial x_i},$$

   där

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left((x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}\right) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-1/2} \cdot 2x_i = \frac{x_i}{r}$$

   så att

$$\operatorname{div}(r\boldsymbol{a}) = \sum_{i=1}^{3} \frac{a_i\, x_i}{r} = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{r}}{r}.$$

2. Beräkna flödesintegralen $\iint_\Sigma \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, dS$ då

$$\boldsymbol{F} = (x^2, y^2, z^2),\ \Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon z = x^2 + y^2,\ 0 \le z \le 1\},$$

   och z-komponenten av $\hat{\boldsymbol{n}}$ är positiv.

   LEDNING: Utnyttja symmetrier!

Lösning:

$$\boldsymbol{r} = (x, y, x^2 + y^2) \Longrightarrow \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 2y \end{vmatrix} = (-2x, -2y, 1),$$

så på Σ är

$$\boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, dS = (-2x^3 - 2y^3 + (x^2 + y^2)^2)\, dxdy,$$

varför

$$\begin{aligned} \iint_\Sigma \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, dS &= \iint_{x^2+y^2 \le 1} (-2x^3 - 2y^3 + (x^2 + y^2)^2)\, dxdy = \{\text{symmetri}\} \\ &= \iint_{x^2+y^2 \le 1} (x^2 + y^2)^2\, dxdy = \int_{r=0}^{1} \int_{\phi=0}^{2\pi} r^4 \cdot r\, drd\phi \\ &= 2\pi \left[\frac{r^6}{6} \right]_0^1 = \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

3. Visa att $\operatorname{div}(\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{G}) = \operatorname{rot} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{G} - \operatorname{rot} \boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{F}$.

   Lösning:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{G}) &= \nabla \cdot (\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{G}) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\, F_j G_k \right) \\ &= \sum_{k=1}^{3} \left(\sum_{i,j=1} \epsilon_{ijk} \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \right) \cdot G_k + \sum_{j=1}^{3} \left(\sum_{i,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} \frac{\partial G_k}{\partial x_i} \right) \cdot F_j \\ &= \sum_{k=1}^{3} \left(\sum_{i,j=1}^{3} \epsilon_{kij} \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \right) \cdot G_k - \sum_{j=1}^{3} \left(\sum_{i,k=1}^{3} \epsilon_{jik} \frac{\partial G_k}{\partial x_i} \right) \cdot F_j \\ &= \operatorname{rot} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{G} - \operatorname{rot} \boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{F}. \end{aligned}$$

KTH Matematik
Olle Stormark

Lösning till kontrollskrivning 1B

i SF1649 Vektoranalys och komplexa funktioner för CMIEL, ht 2010.

- Varje uppgift ger maximalt 3 poäng.
- För godkänt krävs minst 5 poäng sammanlagt.

1. Låt $\boldsymbol{r} = (x_1, x_2, x_3)$ vara ortsvektorn och låt $r = |\boldsymbol{r}|$. Beräkna $\operatorname{div}(r\,\boldsymbol{r})$.

   Lösning:

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(r\,\boldsymbol{r}) = \nabla \cdot (r\,\boldsymbol{r}) &= \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}(r\,x_i) = \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial r}{\partial x_i}\, x_i + r \right) \\ &= \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial r}{\partial x_i}\, x_i + 3r,\end{aligned}$$

   där

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left((x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-1/2} \right) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-1/2} \cdot 2x_i = \frac{x_i}{r}.$$

   Så

$$\operatorname{div}(r\,\boldsymbol{r}) = \sum_{i=1}^{3} \frac{x_i \cdot x_i}{r} + 3r = \frac{r^2}{r} + 3r = 4r.$$

2. Beräkna flödesintegralen $\iint_\Sigma \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, dS$ då

$$\boldsymbol{F} = (z^3, x^2yz, y),\ \Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon z = 1 - y^2,\ -1 \le x \le 1,\ z \ge 0\},$$

   och z-komponenten av $\hat{\boldsymbol{n}}$ är positiv.

Lösning:

$$\boldsymbol{r} = (x, y, 1-y^2) \Longrightarrow \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2y \end{vmatrix} = (0, 2y, 1),$$

så på Σ är

$$\boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, dS = (2x^2y^2 \cdot (1-y^2) + y)\, dxdy,$$

varför

$$\begin{aligned} \iint_\Sigma \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, dS &= \int_{x=-1}^{1} \int_{y=-1}^{1} (2x^2y^2 - 2x^2y^4 + y)\, dxdy \\ &= \int_{x=-1}^{1} \left(2 \cdot \int_{y=0}^{1} (2x^2y^2 - 2x^2y^4)\, dy \right) dx \\ &= 4 \int_{x=-1}^{1} \left[\frac{x^2y^3}{3} - \frac{x^2y^5}{5} \right]_{y=0}^{1} dx = 4 \int_{x-1}^{1} \left(\frac{x^2}{3} - \frac{x^2}{5} \right) dx \\ &= 4 \cdot \frac{5-3}{15} \cdot 2 \cdot \int_0^1 x^2\, dx = \frac{16}{5} \cdot \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{16}{45}. \end{aligned}$$

3. Visa att

$$\operatorname{rot}(\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{G}) = (\boldsymbol{G} \cdot \operatorname{grad})\boldsymbol{F} - \boldsymbol{G} \operatorname{div} \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F} \operatorname{div} \boldsymbol{G} - (\boldsymbol{F} \cdot \operatorname{grad})\boldsymbol{G}.$$

LEDNING: $\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\, \epsilon_{klm} = \delta_{il}\, \delta_{jm} - \delta_{im}\, \delta_{jl}$.

Lösning:

$$
\begin{aligned}
[\nabla \times (\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{G})]_i &= \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_{l,m=1}^{3} \epsilon_{klm} F_l G_m \right) \\
&= \sum_{j,l,m=1}^{3} \left(\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk} \, \epsilon_{klm} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} (F_l G_m) \\
&= \sum_{j,l,m=1}^{3} (\delta_{il} \, \delta_{jm} - \delta_{im} \, \delta_{jl}) \left(\frac{\partial F_l}{\partial x_j} G_m + F_l \frac{\partial G_m}{\partial x_j} \right) \\
&= \sum_{j=1}^{3} \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j} G_j - \frac{\partial F_j}{\partial x_j} G_i + F_i \frac{\partial G_j}{\partial x_j} - F_j \frac{\partial G_i}{\partial x_j} \right) \\
&= \left(\sum_{j=1}^{3} G_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) F_i - \left(\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial F_j}{\partial x_j} \right) G_i \\
&\qquad + F_i \left(\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial G_j}{\partial x_j} \right) - \left(\sum_{j=1}^{3} F_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) G_i \\
&= (\boldsymbol{G} \cdot \nabla) F_i - G_i \, (\nabla \cdot \boldsymbol{F}) + F_i \, (\nabla \cdot \boldsymbol{G}) - (\boldsymbol{F} \cdot \nabla) \, G_i,
\end{aligned}
$$

för $i = 1, 2, 3$, så att

$$
\nabla \times (\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{G}) = (\boldsymbol{G} \cdot \nabla) \, \boldsymbol{F} - \boldsymbol{G} \, (\nabla \cdot \boldsymbol{F}) + \boldsymbol{F} \, (\nabla \cdot \boldsymbol{G}) - (\boldsymbol{F} \cdot \nabla) \, \boldsymbol{G}.
$$

KTH Matematik
Olle Stormark

Lösning till kontrollskrivning 2

i SF1649 Vektoranalys och komplexa funktioner för ME, ht 2010.

- Varje uppgift ger maximalt 3 poäng.
- För godkänt krävs minst 5 poäng sammanlagt.

1. Låt $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$, och låt $\hat{\boldsymbol{n}}$ vara den utåtriktade enhetsnormalen för randytan $\partial\Omega$. Beräkna flödesintegralen

$$\iint_{\partial\Omega} \boldsymbol{e}_\rho \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\ dS$$

(där ρ, ϕ och z är cylinderkoordinater), *utan att använda divergenssatsen.*

Lösning: På ovan- och undersidan av cylindern är $\hat{\boldsymbol{n}} = \pm\boldsymbol{e}_z$, så att $\boldsymbol{e}_\rho \cdot \hat{\boldsymbol{n}} = \pm\boldsymbol{e}_\rho \cdot \boldsymbol{e}_z = 0$ där. På mantelytan är $\hat{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{e}_\rho$, så att $\boldsymbol{e}_\rho \cdot \hat{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{e}_\rho \cdot \boldsymbol{e}_\rho = 1$, vilket ger att

$$\iint_{\text{mantelytan}} \boldsymbol{e}_\rho \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\ dS = \iint_{\text{mantelytan}} dS = \text{arean} = 2\pi \cdot 1 = 1.$$

2. Beräkna ovanstående flödesintegral *med hjälp av divergenssatsen.*

Lösning:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{e}_\rho = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho \cdot 1) = \frac{1}{\rho} \Longrightarrow$$

$$\iint_{\partial\Omega} \boldsymbol{e}_\rho \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\ dS = \iiint_\Omega \frac{1}{\rho}\, dV = \int_{\rho=0}^{1} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{z=0}^{1} \frac{1}{\rho}\, \rho\, d\rho d\phi dz$$

$$= \int_0^1 d\rho \cdot \int_0^{2\pi} d\phi \cdot \int_0^1 dz = 1 \cdot 2\pi \cdot 1 = 2\pi.$$

3. Låt r, θ och ϕ vara sfäriska koordinater. Beräkna

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{e}_\phi$$

i dessa koordinater.

Lösning:

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot} \boldsymbol{e}_\phi =& \frac{1}{r^2 \sin\theta} \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_r & r\,\boldsymbol{e}_\theta & r\sin\theta\,\boldsymbol{e}_\phi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ 0 & 0 & r\sin\theta \cdot 1 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{r^2 \sin\theta} \cdot (r\cos\theta\,\boldsymbol{e}_r - r \cdot \sin\theta\,\boldsymbol{e}_\theta) \\
&= \frac{\cot\theta}{r}\,\boldsymbol{e}_r - \frac{1}{r}\,\boldsymbol{e}_\theta.
\end{aligned}$$

KTH Matematik
Olle Stormark

Lösning till kontrollskrivning 3A

i SF1649 Vektoranalys och komplexa funktioner för CMIEL, ht 2010.

- Varje uppgift ger maximalt 3 poäng.
- För godkänt krävs minst 5 poäng sammanlagt.

1. Skriv det komplexa talet
$$\frac{4-6i}{(1+i)^6}$$
på formen $a+ib$, där $a, b \in \mathbb{R}$.

   Lösning:

$$1+i = 2^{1/2}\, e^{i\pi/4} \Longrightarrow (1+i)^{-6} = 2^{-3}\, e^{-i\,3\pi/2} = i/8 \Longrightarrow$$
$$\frac{4-6i}{(1+i)^6} = (4-6i)\cdot\frac{i}{8} = \frac{4i+6}{8} = \frac{3}{4}+\frac{i}{2}.$$

2. Bestäm alla värdena av $(1+i)^i$, och ange dem på formen $a+ib$, där $a, b \in \mathbb{R}$.

   Lösning:

$$(1+i)^i = e^{i\log(1+i)} = e^{i\,(\ln(2^{1/2})+i\,(\pi/4+n\cdot 2\pi))} = e^{\frac{i}{2}\ln 2}\cdot e^{-\pi/4-n\cdot 2\pi}$$
$$= e^{-\pi/4}\cdot e^{-2\pi n}\cdot\cos((\ln 2)/2) + i\, e^{-\pi/4}\cdot e^{-2\pi n}\cdot\sin((\ln 2)/2),$$
där $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

3. I BETA kan man hitta formeln

$$\arcsin z = -i\,\log(iz + \sqrt{1-z^2}).$$

Härled denna genom att lösa ut w ur ekvationen $z = \sin w$.

Lösning:

$$\sin w = \frac{1}{2i}\,(e^{iw} - e^{-iw}) = z \iff e^{iw} - e^{-iw} - 2iz = 0 \iff$$
$$\left(e^{iw}\right)^2 - 2iz\,e^{iw} - 1 = 0 \iff e^{iw} = iz + \sqrt{-z^2+1} \iff$$
$$iw = \log\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right) \iff w = -i\,\log(iz + \sqrt{1-z^2}).$$

KTH Matematik
Olle Stormark

Lösning till kontrollskrivning 3B

i SF1649 Vektoranalys och komplexa funktioner för CMIEL, ht 2010.

- Varje uppgift ger maximalt 3 poäng.
- För godkänt krävs minst 5 poäng sammanlagt.

1. Skriv det komplexa talet
$$\frac{(1+i)^{10}}{(1-i)^6}$$
på formen $a+ib$, där $a,b\in\mathbb{R}$.

Lösning:

$$\begin{aligned}
&(1+i)^{10} = 2^{10/2}\cdot e^{i\,10\pi/4} = 32\cdot e^{i(\pi/2+2\pi)} = 32\,i,\\
&(1-i)^6 = 2^{6/2}\cdot e^{-6i\pi/4} = 8\cdot e^{-3\pi i/2} = 8i\\
&\Longrightarrow \frac{(1+i)^{10}}{(1-i)^6} = \frac{32i}{8i} = 4.
\end{aligned}$$

2. Bestäm alla värdena av 3^{3-i}, och ange dem på formen $a+ib$, där $a,b\in\mathbb{R}$.

Lösning:

$$\begin{aligned}
3^{3-i} &= e^{(3-i)(\ln 3+i\cdot 2\pi n)} = e^{3\ln 3+i\cdot 6\pi n-i\ln 3+2\pi n} = 3^3\cdot e^{2\pi n}\cdot(\cos\ln 3 - i\sin\ln 3)\\
&= 27\cdot e^{2\pi n}\cdot\cos(\ln 3) - i\cdot 27\cdot e^{2\pi n}\sin(\ln 3), \quad \text{där } n=0,\pm1,\pm2,\ldots
\end{aligned}$$

3. I BETA kan man hitta formeln

$$\arctan z = -\frac{i}{2} \log\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right).$$

Härled denna genom att lösa ut w ur ekvationen $z = \tan w$.

Lösning:

$$\tan w = \frac{1}{i}\,\frac{e^{iw}-e^{-iw}}{e^{iw}+e^{-iw}} = z \iff e^{iw}-e^{-iw} = e^{iw}\cdot iz + e^{-iw}\cdot iz \iff$$
$$e^{iw}(1-iz) - e^{-iw}(1+iz) = 0 \iff \left(e^{iw}\right)^2(1-iz) = 1+iz \iff$$
$$\left(e^{iw}\right)^2 = \frac{1+iz}{1-iz} \iff e^{iw} = \left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^{1/2} \iff$$
$$iw = \frac{1}{2}\log\frac{1+iz}{1-iz} \iff w = -\frac{i}{2}\log\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right).$$