Exempelsamling Vektoranalys

Teoretisk Fysik, KTH

Kapitel 14&15 i

VEKTORANALYS

Anders Ramgard

3:e upplagan (2002)

(med justeringar gjorda den 19 augusti 2008)

Exempelsamling

Vektorfunktioner, parameterframställning av rymdkurvor och rymdytor

1. 1 Rita pilar med lämpligt vald storlek och riktning för att illustrera följande vektorfunktioner i xy-planet:

   a) (y, x)
   b) $(x, y)\sqrt{2}$
   c) $(y, 0)$
   d) $(0, x)$
   e) $(y, x)/\sqrt{x^2 + y^2}$
   f) $(1, y)$

2. 2 Kurvan $y = y(x)$ kallas en fältlinje till vektorfunktionen $\mathbf{F}(x, y)$, om $\mathbf{F}(x, y)$ är tangent till kurvan för alla x.

   a) Visa att fältlinjerna $y = y(x)$ till en vektorfunktion $\mathbf{F}(x, y) = (F_x(x, y), F_y(x, y))$ är lösningar till differentialekvationen
   $$\frac{dy}{dx} = \frac{F_y}{F_x}.$$
   b) Bestäm fältlinjerna till alla funktionerna i problem 1. Rita några fältlinjer och jämför med figurerna i problem 1.

3. 3 Skriv ner en formel för och skissa vektorfältet som:

   a) pekar radiellt utåt fran origo och har längd 1
   b) pekar radiellt utåt fran origo och har längd $|x|$
   c) pekar radiellt inåt mot origo och har längd lika med avståndet från origo
   d) pekar mot punkten $(1, 2, 3x)$ och har längd $|3xy|$.

4. 4 En partikel rör sig i xy-planet så att läget $\mathbf{r}(t)$ vid tiden t ges av
   $$\mathbf{r}(t) = (a \cos \omega t, b \sin \omega t),$$
   där a, b, ω är konstanter.

   a) Hur långt från origo är partikeln vid tiden t?
   b) Bestäm hastigheten och accelerationen som funktioner av tiden.
   c) Visa att partikeln rör sig i en elliptisk bana
   $$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

5. 5 Bestäm en enhetsnormal $\hat{\mathbf{n}}$ till följande ytor, genom att uttrycka ytorna på parameterform:

   a) $z = 2 - x - y$
   b) $z = x^2 + y^2$
   c) $z = (1 - x^2)^{1/2}, \ 1 \leq x \leq 1$
   d) $z = (x^2 + y^2)^{1/2}, \ 1 \leq x, y \leq 1$
   e) $(x/a)^2 + (y/b)^2 + (z/c)^2 = 1$
   f) $\mathbf{r}(u, v) = (u + v, u - v, uv)$

6. 6

   a) Visa att enhetsnormalen till planet $ax + by + cz = d$ ges av

   $$\hat{\mathbf{n}} = \pm \frac{a\mathbf{e}_x + b\mathbf{e}_y + c\mathbf{e}_z}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

   b) Förklara geometriskt varför detta uttryck inte innehåller d.

7. 7 Bestäm normalriktningen i punkten u_0=3, v_0=4 till ytan
   $\mathbf{r}(u, v) = (u^2 - v^2)\mathbf{e}_x + \sqrt{u^2 + v^2}\mathbf{e}_y + \frac{1}{2}(u^2 + v^2)\mathbf{e}_z$
   samt ekvationen för tangentplanet i denna punkt.

8. 8 Vilken typ av yta representerar ekvationen $x^2 + y^2 - z^2$=0? Bestäm normalvektorn $\mathbf{n}$ i punkterna (0,-1,1) och (0,0,0).

9. 9 Vektorn $\mathbf{R}(u)$ satisfierar differentialekvationen

   $$\frac{d\mathbf{R}(u)}{du} = \mathbf{A}(u) \times \mathbf{R}(u),$$

   där $\mathbf{A}(u)$ är en given vektorvärd funktion. Visa att $\mathbf{R}$:s absolutbelopp är konstant.

   Ledning: Derivera $\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}$.

10. 10 Ange en enkel parameterframställning $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u)$ för kurvan

    $$\begin{cases} 4x - y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 - z = 0 \end{cases}$$

    från punkten $(0, 0, 0)$ till $(1, 2, 5)$.

    Bestäm tangentriktningen i punkten $(1/4, 1, 17/16)$.

11. 11 Skissera utseendet av och ange parameterframställningar $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ för ytorna

    a) $x^2 - 2y^2 = 6$.
    b) $x^2 - 2y^2 - 2z = 0$.

12. 12 Bestäm ekvationerna för normallinjen och tangentplanet till ytan i exempel 11b i punkten $(2, 1, 1)$. Använd att $\mathbf{n}$ är proportionell mot

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}.$$

Gradienten

13. 13 Bestäm gradienten av följande skalära funktioner:

    a) $f(x, y, z) = x + y + z$
    b) $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$
    c) $f(x, y, z) = 1/(x + y + z)$
    d) $f(x, y, z) = (x + y + z)^3$
    e) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$
    f) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
    g) $f(x, y, z) = 1/(x^2 + y^2 + z^2)$
    h) $f(x, y, z) = xyz$

14. 14 Bestäm riktningsderivatan i riktningen $(1, 2, -1)/\sqrt{6}$ av $\phi = xyz^2$ i punkten $(1, 2, 3)$

    a) direkt ur definitionen av riktningsderivatan som ett gränsvärde,
    b) med hjälp av gradienten.

15. 15

    a) Bestäm nivåytorna och gradienten till fältet $\phi = \sqrt{xyz}; \quad x, y, z \geq 0$.

    b) Demonstrera att dessa är ortogonala.

16. 16 Bestäm gradienten av skalärfältet $f(x, y, z) = e^{xy} \ln z$.

17. 17 Bestäm riktningsderivatan i punkten $P_0 : \mathbf{r}_0 = (1, 1, 1)$ och riktningen $(-1, -1, -1)$ av fälten

a) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$
b) $f(x,y,z) = e^{-(x^2+y^2-z^2)}$

18. 18 Skalärfältet
$\phi(x,y) = -x^3 - yx - 6y + 15$
beskriver höjden hos ett berg i punkten (x,y). I vilken riktning utgående från punkten $(-1,2)$ är det brantast nedåt?

19. 19 Temperaturen i ett rum beskrivs av skalärfältet
$$T = x^2 + 2yz - z \quad [^\circ\text{C}].$$
En frusen mygga befinner sig i punkten $(1,1,2)$.
a) I vilken riktning skall myggan flyga om den vill bli varm så fort som möjligt?
b) Hur snabbt (uttryckt i °C/s) ökar temperaturen om myggan flyger med hastigheten 3 längdenheter/s i riktningen $(-2,2,1)$?

20. 20 Bestäm ekvationerna för normallinjen och tangentplanet till ytan
$$x^2 - 2y^2 - 2z = 0$$
i punkten $(2,1,1)$ med hjälp av gradienten.

21. 21 Andragradsytan
$$x^2 + 2xy + 2zx - 2x + 2y + 2z - 2 = 0$$
skärs av planet
$$x - y + z + 1 = 0.$$
Vilken vinkel bildar de båda ytorna med varandra i punkten $(0,1,0)$?

22. 22 Skalärfältet
$$\phi(x,y,z) = xyz + x^2 + y^2 + 2z^2 - 2y$$
är givet. Använd gradientens egenskaper för att approximativt beräkna det vinkelräta avståndet från punkten $(1,2,-1)$ på nivåytan $\phi = 1{,}000000$ till nivåytan $\phi = 1{,}000003$.

23. 23 Temperaturen i en kropp anges av skalärfältet
$$T(\mathbf{r}) = x^2 + y^2 + z^2 + xy + 2yz \quad [^\circ\text{C}].$$
Betrakta temperaturvariationerna i olika riktningar från punkten P_0: $\mathbf{r}_0 = (1,2,-3)$ och visa att alla riktningar i vilka temperaturen minskar 2 °C/längdenhet bildar samma vinkel α med den riktning $\mathbf{e}_0$ i vilken temperaturen växer snabbast.

Bestäm α och $\mathbf{e}_0$.

Linjeintegraler

24. 24 Beräkna

$$\oint_C \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$$

för följande vektorfält $\mathbf{A}$ och kurvor C

a) $\mathbf{A}(x, y) = y\mathbf{e}_x + x\mathbf{e}_y$ och C: enhetscirkeln i moturs riktning.

b) $\mathbf{A}(x, y) = -y\mathbf{e}_x + x\mathbf{e}_y$ och C: enhetscirkeln i moturs riktning.

c) $\mathbf{A}(x, y) = x^2y\mathbf{e}_x + (x^3 + y^3)\mathbf{e}_y$ och C: enhetscirkeln i moturs riktning.

d) $\mathbf{A}(x, y) = 3xy\mathbf{e}_x - y\mathbf{e}_y$ och C: triangeln med hörn i $(0, 0), (1, 1), (0, 1)$ i moturs riktning.

e) $\mathbf{A}(x, y) = 3(x - y)\mathbf{e}_x + x^5\mathbf{e}_y$ och C: triangeln i (d).

25. 25 Utnyttja att vektorfältet $\mathbf{A}$ har en potential för att beräkna

$$\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}.$$

a) $\mathbf{A}(x, y) = (3x^2y^2, 2x^3y), \quad \mathbf{a} = (1, 2), \mathbf{b} = (3, -1).$

b) $\mathbf{A}(x, y) = e^{xy}(1 + xy, x^2), \quad \mathbf{a} = (-1, 0), \mathbf{b} = (0, 999).$

26. 26 Beräkna linjeintegralen

$$\int_C \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r},$$

där

a) $\mathbf{A}(x, y, z) = (x, y, z), \quad C : \mathbf{r}(t) = (t^3, t^2, t)$ från $t = 0$ till $t = 1$.

b) $\mathbf{A}(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2), \quad C : \mathbf{r}(t) = (\sin t, \cos t, 2t)$ från $t = 0$ till $t = \pi$.

27. 27 Visa att $\mathbf{A}(x, y, z) = (y/z, x/z, -xy/z^2)$ har en potential och använd denna för att beräkna

$$\int_C \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r},$$

där C är en styckvis slät kurva från $\mathbf{r}_1 = (1, 1, 1)$ till $\mathbf{r}_2 = (2, -1, 3)$, som inte passerar ytan $z = 0$.

28. 28 Undersök om följande vektorfält har en potential:

a) $\mathbf{A} = (2xyz, x^2z + 1, x^2y)$.

b) $\mathbf{B} = (x^2z - 2, yz, x + z)$.

29. 29 Beräkna linjeintegralen av vektorfältet

$$\mathbf{A} = (2 - y, -xy, 1)$$

längs vägen

a) i ex. 10.
b) räta linjen från $(0, 0, 0)$ till $(1, 2, 0)$ samt därifrån raka vägen till $(1, 2, 5)$.

30. 30 Beräkna linjeintegralen av vektorfältet

$$\mathbf{A} = (2xyz, x^2z + 1, x^2y)$$

från punkten $(0, 1, 0)$ till punkten $(-1, 10, -2)$. CORRECT: Path not given (true that it does not depend on path, but strange formulation)

31. 31 **a**, **b** och **c** är konstanta linjärt oberoende vektorer och **r** är ortsvektorn. Bestäm integralen

$$\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$$

med

$$\mathbf{A} = \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{r}) + \mathbf{b}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}) + \mathbf{r}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$$

och C som kurvan

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = \mathbf{a}\cos t + \mathbf{b}\sin t + \mathbf{c}\sin 2t$$

genomlöpt från $t = 0$ till $t = \pi/2$.

32. 32 Beräkna integralen

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

där

$$\mathbf{F} = (yz, xz, xy)$$

och C är kurvan

$$\begin{cases} x = a\cos\varphi \\ y = b\sin\varphi \\ z = c\sinh\dfrac{\varphi}{\pi} \end{cases}$$

från $(a, 0, 0)$ till punkten $(-a/\sqrt{2}, -b/\sqrt{2}, c\sinh(5/4))$.

Flödesintegraler

33. 33 Beräkna flödesintegralen

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$$

för följande vektorfält och ytor (valfri normalriktning):

a) $\mathbf{A} = (xy^2, -2z, 0), \quad S : z = 2x + y, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 4.$

b) $\mathbf{A} = (1, 2, 3), \quad S : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0.$

c) $\mathbf{A} = (x, -xz, z), \quad S : y = \sqrt{x^2 + z^2}, 0 \leq x^2 + z^2 \leq 4$

d) $\mathbf{A} = (x^2, y^2, z^2), \quad S :$ enhetssfären.

e) $\mathbf{A} = (x^3, y^3, z^3), \quad S :$ enhetssfären.

34. 34 Beräkna flödet av vektorfältet

$$\mathbf{A} = (x^2, 2y, z)$$

ut genom en sfäryta med radien R och medelpunkten i origo

a) med hjälp av parametriseringen

$$\mathbf{r} = R(\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u).$$

b) genom att sätta $\mathbf{n} = (x, y, z)/R$ samt använda symmetribetraktelser.

35. 35 Beräkna flödet av vektorfältet

$$\mathbf{A} = (x^2 - y^2, (x + y)^2, (x - y)^2)$$

genom ytan

$$\mathbf{r} = (u + v, u - v, uv), \qquad -1 \leq u, v \leq 1, \qquad \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_z > 0.$$

36. 36 Beräkna flödet av vektorfältet

$$\mathbf{A} = (2x, -z, y)$$

genom skruvytan

$$\mathbf{r} = (u, v \cos u, v \sin u), \qquad 0 \leq u \leq \pi, \qquad 0 \leq v \leq 1, \qquad \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_x > 0.$$

Beräkning av divergens och rotation

37. 37 Beräkna divergensen och rotationen av följande vektorfält:

 a) $\mathbf{A}(x, y, z) = (x, y, z)$.
 b) $\mathbf{A}(x, y, z) = (x - y, y - z, z - x)$.
 c) $\mathbf{A}(x, y, z) = (yz, xz, xy)$.
 d) $\mathbf{A}(x, y, z) = (\ln x, \ln y, \ln z)$.
 e) $\mathbf{A}(x, y, z) = (e^{yz}, e^{zx}, e^{xy})$.
 f) $\mathbf{A}(x, y, z) = (\cos y, \cos x, \cos z)$.

38. 38 Beräkna rotationen av vektorfältet
 $\mathbf{A}(x, y, z) = (2xyz, x^2z, x^2y)$.

39. 39 Beräkna divergensen av vektorfältet
 $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = (x \ln z + e^{yz}, x^{z \ln x} e^{x-z}, z - z \ln z)$.

40. 40 Beräkna rotationen av vektorfältet
 $\mathbf{A}(x, y, z) = e^{-(x^2+y^2+z^2)}(1, 1, 1)$.

41. 41 Beräkna $\mathbf{A} \times \operatorname{rot} \mathbf{A}$ där $\mathbf{A} = (y, z, x)$.

42. 42 Beräkna a) $\operatorname{grad} f$, b) $\operatorname{rot} \mathbf{A}$, c) $\operatorname{div} \operatorname{grad} f$, d) $\operatorname{div} \mathbf{B}$, e) $\operatorname{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ samt f) $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A}$, för

 i) $\mathbf{A} = x^2\mathbf{e}_y, \;\; \mathbf{B} = z\mathbf{e}_z, \;\; f = y^2$
 ii) $\mathbf{A} = (x^2y, z^3, -xy), \;\; \mathbf{B} = ((x + y), y + z, z + x), \;\; f = xy^2z^3$.

43. 43 Visa att vektorfältet
 $\mathbf{A}(x, y) = 2x\sqrt{y}(4, x/y)$
 är konservativt och bestäm dess potential.

Gauss' sats

44. 44 Beräkna

$$\oiint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$$

 för följande vektorfält och ytor:

a) $\mathbf{A}(x,y,z) = \mathrm{rot}(e^{xy}, \arctan z, (x+y+z)^{7/2}z^2)$ och S : enhetssfären.

b) $\mathbf{A}(x,y,z) = (x, 2y, 3z)$ och S : enhetssfären

c) $\mathbf{A}(x,y,z) = (4x, -2y, z)$ och S : cylindern $x^2+y^2=9,\;\; 0 \le z \le 6$

d) $\mathbf{A}(x,y,z) = (x(y+z^2), 0, 0)$ och S : randen av kuben $|x|, |y|, |z| \le 1$

e) $\mathbf{A}(x,y,z) = (xz^2, x^2y, xyz)$ och S : sfären $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=4$

45. 45 Verifiera att Gauss sats gäller för vektorfältet $\mathbf{A} = (xz, 2yz, 3xy)$ och volymen V: cylindern $x^2+y^2 \le 4,\ 0 \le z \le 3$.

46. 46 Använd Gauss' sats för att beräkna flödet i ex. 34.

47. 47 Beräkna
$$\iint_S \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S},$$
där fältet $\mathbf{A}$ är
$$\mathbf{A} = (x^3, y^3, z^3)$$
och S är ytan som omslutar halvsklotet
$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 \le R^2 \\ x+y \ge 0 \end{cases}.$$

48. 48 Använd Gauss' sats för att beräkna flödet av vektorfältet
$$\mathbf{A} = (xz^2, 2xy, z^2+2)$$
ut ur den cylindriska burk som avgränsas av ytorna
$$x^2+y^2=1, \qquad z=1, \qquad z=-1.$$
Kontrollera resultatet genom att beräkna flödet direkt.

49. 49 Beräkna med hjälp av Gauss' sats flödet av vektorfältet
$$\mathbf{A} = (2xy, y^3-xy, z^2)$$
ut ur den ändliga volym som begränsas av ytorna
$$y^2+2y = x^2+z^2 \quad \text{och} \quad y=4.$$

50. 50 Använd Gauss' sats för att beräkna flödet av vektorfältet

$$\mathbf{A} = (2xy + x^2, 2 + yz, 2z^4)$$

genom den del av ytan

$$x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 4 \quad \text{för vilken } y \geq 0.$$

Normalriktningen är vald så att $\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{e}_y$ i punkten $(0, 3, 0)$.

51. 51 Beräkna

$$\oiint_S (2x + x^3 z)\hat{\mathbf{n}}\, dS,$$

där S är en sfär med medelpunkten $(0, 1, 0)$ och radien 1. Normalen $\hat{\mathbf{n}}$ pekar utåt.

52. 52 Vektorfältet $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ är källfritt i området V. På V:s randyta S är

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = (0, 0, 0).$$

Visa att

$$\iiint_V \mathbf{A}\, dV = (0, 0, 0).$$

Ledning: Tillämpa Gauss' sats på vektorfälten $x\mathbf{A}(\mathbf{r})$, $y\mathbf{A}(\mathbf{r})$ och $z\mathbf{A}(\mathbf{r})$.

53. 53 Använd Gauss' sats för att beräkna flödet av vektorfältet

$$\mathbf{A} = (x^3 + 2y, y^3, z^3 - 3z^2 + 3z)$$

ut genom ytan

$$x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1.$$

54. 54 Ett vektorfält har potentialen

$$\phi = x^2 + y^2 + z^2 - (x^2 + y^2 + z^2)^2.$$

Genom vilken sluten yta S är flödet av vektorfältet maximalt? Beräkna det maximala flödet.

Stokes' sats

55. 55 Beräkna

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$$

för följande vektorfält och kurvor C:

a) $\mathbf{A}(x,y,z) = (x+2y, y-3z, z-x)$ och C : enhetscirkeln i xy-planet, orienterad moturs.

b) $\mathbf{A}(x,y,z) = xy\mathbf{e}_y$ och C : triangeln med hörn i punkterna $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$, orienterad moturs sett mot origo.

c) $\mathbf{A}(x,y,z) = (0, x^2, z^2)$ och C : gränskurvan till delen av ytan $x^2+y^3+z^4 = 1$ som ligger i första oktanten, orienterad moturs sett mot origo.

56. 56 Verifiera att Stokes sats gäller för vektorfältet $\mathbf{A} = (z, x^2, y^3)$ och ytan S: de tre trianglarna i koordinatplanen med hörn i $(0,0,0), (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$, orienterad moturs sett mot origo.

57. 57 Beräkna linjeintegralen av vektorfältet

$$\mathbf{A} = (y+2x, x^2+z, y)$$

längs den slutna kurvan

$$\mathbf{r} = (\cos u, \sin u, f(u)), \qquad u : 0 \to 2\pi$$

som går ett varv runt cylindern $x^2+y^2 = 1$ men för övrigt är godtycklig, $f(0) = f(2\pi)$.

a) direkt.

b) med hjälp av Stokes' sats.

58. 58 Beräkna medelst Stokes' sats cirkulationen av vektorfältet

$$\mathbf{A} = (yz+y-z, xz+5x, xy+2y)$$

längs skärningslinjen C mellan ytorna

$$x^2+y^2+z^2 = 1 \qquad \text{och} \qquad x+y = 1.$$

C är orienterad så att dess positiva riktning i punkten $(1,0,0)$ ges av vektorn $(0,0,1)$.

59. 59 Beräkna med hjälp av Stokes' sats linjeintegralen av vektorfältet

$$\mathbf{A} = (xz, xy^2+2z, xy+z)$$

längs kurvan C som sammansätts av delarna

$$C_1 : x = 0, \quad y^2+z^2 = 1, \quad z > 0, \quad y : -1 \to 1$$
$$C_2 : z = 0, \quad x+y = 1, \quad y : 1 \to 0$$
$$C_3 : z = 0, \quad x-y = 1, \quad y : 0 \to -1$$

60. 60 Beräkna integralen

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r},$$

där

$$\mathbf{A} = \mathbf{e}_x(x^2 - a(y+z)) + \mathbf{e}_y(y^2 - az) + \mathbf{e}_z(z^2 - a(x+y))$$

och C är den kurva som utgör skärningslinjen mellan cylindern

$$\begin{cases} (x-a)^2 + y^2 = a^2 \\ z \geq 0 \end{cases}$$

och sfären

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \qquad (R^2 > 4a^2).$$

Omloppsriktningen är sådan att vid $x = 0$ är kurvans tangentvektor parallell med $-\mathbf{e}_y$.

61. 61 Vektorfältet $\mathbf{A}$ ges av

$$\mathbf{A} = (x^2 - y, y^2 - z, z^2 - x)$$

och kurvan C är skärningen mellan ellipsoiden

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

och koordinatplanen

$$\begin{array}{lll} x = 0 & x \geq 0 & x \geq 0 \\ y \geq 0 & y = 0 & y \geq 0 \\ z \geq 0 & z \geq 0 & z = 0 \end{array}$$

Beräkna integralen

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$$

om omloppsriktningen är sådan att i xy-planet $(\mathbf{r} \times d\mathbf{r}) \parallel \mathbf{e}_z$.

62. 62 Använd Stokes' sats för att beräkna linjeintegralen av vektorfältet

$$\mathbf{A} = (yz + 2z, xy - x + z, xy + 5y)$$

längs skärningslinjen C mellan cylindern $x^2 + z^2 = 4$ och planet $x + y = 2$.

Kurvan C är orienterad så att dess tangentvektor i punkten $(2, 0, 0)$ är $(0, 0, 1)$.

Indexräkning

63. 63 Låt $f = r^3,\ g = 1/r^2,\ \mathbf{A} = (x^2, y^2, z^2)$ och $\mathbf{B} = (z, y, x)$. Förenkla följande uttryck, dels genom att använda direkt beräkning, dels genom indexräkning:

   a) $\mathrm{grad}(fg)$
   b) $\mathrm{div}(f\mathbf{A})$
   c) $\mathrm{rot}(f\mathbf{A})$
   d) $\mathrm{grad}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$
   e) $\mathrm{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$
   f) $\mathrm{rot}(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$
   g) $(\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B}$
   h) $(\mathbf{A} \times \nabla) \times \mathbf{B}$

64. 64 Använd indexräkning för att ställa upp formlerna:

   a) $\mathrm{rot}(\phi\mathbf{A}) = \ldots$
   b) $\mathrm{rot}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \ldots$
   c) $\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{A} = \ldots$
   d) $(\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \cdot \mathrm{rot}\,\mathbf{A} = \ldots$
   e) $(\mathbf{B} \cdot \nabla)(\phi\mathbf{A}) = \ldots$
   f) $(\mathbf{B} \cdot \nabla)(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \ldots$
   g) $\mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \ldots$
   h) $(\mathbf{A} \times \nabla) \times \mathbf{A} = \ldots$

65. 65 Visa att

   a) $\mathrm{grad}\,\phi(r) = \dfrac{d\phi}{dr}\dfrac{\mathbf{r}}{r}$
   b) $\mathrm{grad}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{a}$
   c) $\mathrm{div}\,\mathbf{r} = 3$
   d) $\mathrm{div}(\phi(r)\mathbf{r}) = 3\phi(r) + r\dfrac{d\phi}{dr}$
   e) $\mathrm{div}(\mathbf{a} \times \mathbf{r}) = 0$
   f) $\mathrm{div}((\mathbf{r} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{r}) = -2\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}$
   g) $\mathrm{rot}(\phi(r)\mathbf{r}) = \mathbf{0}$
   h) $\mathrm{rot}((\mathbf{a} \times \mathbf{r}) \times \mathbf{b}) = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$

   $\mathbf{r} = (x, y, z)$ är ortsvektorn, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ är ortsvektorns belopp, $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$ är konstanta vektorer.

66. 66 Låt ϕ vara ett skalärfält som satisfierar Laplaces ekvation, dvs.

$$\nabla^2\phi = 0$$

och $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ en konstant vektor. Förenkla så långt som möjligt uttrycken

a) $\mathbf{A} = \text{grad}(\mathbf{a} \cdot \text{grad}\,\phi)$.
b) $\mathbf{B} = \text{rot}(\mathbf{a} \times \text{grad}\,\phi)$.
c) Beräkna $\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$ för specialfallet $\phi = xyz$.

67. 67 Bestäm konstanten k så att värdet av vektorfältet

$$\mathbf{A} = \text{rot}(r^k(\mathbf{r} \times \mathbf{a}))$$

i varje punkt P blir en vektor, som är parallell med ortsvektorn $\mathbf{r}$ från origo till P. $\mathbf{a}$ är en konstant vektor.

68. 68 Vektorn $\mathbf{a}$ är en konstant vektor och $\mathbf{r} = (x, y, z)$ är ortsvektorn. Beräkna

$$\text{grad}\left(\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}}{r^3}\right) + \text{rot}\left(\frac{\mathbf{a} \times \mathbf{r}}{r^3}\right).$$

De utnyttjade operatorformlerna skall motiveras utförligt med indexräkning.

69. 69 Låt $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ och $\mathbf{c}$ vara konstanta vektorer och $\mathbf{r} = (x, y, z)$ vara ortsvektorn. Härled ett nödvändigt och tillräckligt villkor på $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ och $\mathbf{c}$ för att cirkulationen av vektorfältet

$$\mathbf{A} = (\mathbf{a} \times \mathbf{r}) \times (\mathbf{b} \times \mathbf{r})$$

skall vara noll längs varje sluten kurva, som ligger på en nivåyta till skalärfältet

$$\phi(\mathbf{r}) = \mathbf{c} \cdot \mathbf{r}.$$

70. 70 Det magnetiska fältet $\mathbf{B}$ är källfritt och har följaktligen en vektorpotential $\mathbf{A}$. Visa att

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = k\,\mathbf{r} \times \mathbf{B}_0 + \text{grad}\,\psi$$

är en vektorpotential för det homogena magnetfältet

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}_0 \qquad (\mathbf{B}_0 \text{ konstant vektor})$$

förutsatt att konstanten k ges ett lämpligt värde. Beräkna k samt ange villkor på skalärfältet ψ.

71. 71 En stel kropp roterar med vinkelhastigheten ω rad/s kring en axel, vars riktning anges av enhetsvektorn $\hat{\mathbf{n}}$. Visa att rotationen för hastighetsfältet

$$\mathbf{v} = \omega\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{r}$$

ges av

$$\text{rot}\,\mathbf{v} = 2\omega\hat{\mathbf{n}}.$$

Integralsatser

72. 72 En kropp med den glatta begränsningsytan S har volymen V. Beräkna integralen

$$\frac{1}{2}\oiint_S d\mathbf{S} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{r}),$$

där $\mathbf{r}$ är ortsvektorn och $\mathbf{a}$ en konstant vektor.

73. 73 Omforma linjeintegralen

$$\oint_C \mathbf{r} \times d\mathbf{r}$$

till en ytintegral över en yta S, vilken har C som sin randkurva.

Hur skall S:s och C:s orienteringar vara relaterade?

74. 74 Visa att

$$\iiint_V \mathbf{r} \times \operatorname{rot} \mathbf{A}\, dV = 2 \iiint_V \mathbf{A}\, dV$$

om $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ på randytan S till integrationsområdet V.

75. 75 Beräkna integralen

$$\iiint_V \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}\, dV.$$

Vektorfältet $\mathbf{A}$ har en skalär potential i området V och V:s begränsningsyta är en ekvipotentialyta för denna potential. Vektorfältet $\mathbf{B}$ är källfritt i V.

Ledning: Integrera formeln $\operatorname{div}(\phi\mathbf{B}) = \ldots$ över V.

76. 76 Beräkna ytintegralen

$$\oiint_S (\mathbf{a} \times \mathbf{r}) \times d\mathbf{S},$$

där $\mathbf{a}$ är en konstant vektor, $\mathbf{r}$ är ortsvektorn och S är ytan av en enhetssfär med centrum i punkten $\mathbf{b}$.

77. 77 Beräkna integralen

$$\oint_C (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{r},$$

där C är en cirkel med radien 1, vilken ligger i planet $\mathbf{r} \cdot \mathbf{b} = 0$. $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$ är konstanta vektorer och $\mathbf{r}$ är ortsvektorn.

78. 78 Beräkna integralen

$$\oint\!\!\!\!\oint_S \phi \hat{\mathbf{n}}\, dS,$$

där S är sfärytan

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \qquad (\hat{\mathbf{n}} \text{ pekar utåt}),$$

och skalärfältet ges av

$$\phi = x^2 + 2y - 5z.$$

79. 79 Beräkna integralen

$$\iint_S \mathbf{A} \times \hat{\mathbf{n}}\, dS,$$

där

$$\mathbf{A} = (0, -z, y)$$

och S är cylinderytan

$$x^2 + y^2 = 1, \qquad 0 \leq z \leq 1$$

med normalen riktad ut från z-axeln.

80. 80 Visa med utgångspunkt från Gauss' sats att ytintegralen

$$\oint\!\!\!\!\oint_S (\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}})\mathbf{B}\, dS$$

kan omformas till en volymsintegral över den av ytan S omslutna volymen V. $\hat{\mathbf{n}}$ är S:s utåtriktade normal.

Vilka förutsättningar rörande vektorfälten $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ och $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ måste man göra?

81. 81 Bestäm alla vektorfält $\mathbf{A}$, för vilka gäller att

$$\oint\!\!\!\!\oint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS = \text{sju gånger den av } S \text{ omslutna volymen},$$

oberoende av S:s läge och form.

82. 82 Skalärfälten $\phi(\mathbf{r})$ och $\psi(\mathbf{r})$ är kontinuerligt deriverbara två gånger och ψ antar värdet ψ_0 (konst.) på randkurvan C till ytan S.

Visa med hjälp av Stokes' sats att ytintegralen

$$\iint_S (\operatorname{grad} \phi \times \operatorname{grad} \psi) \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS = 0.$$

83. 83 Bestäm integralen

$$\oint_C \mathbf{r} \times d\mathbf{r},$$

där C är ellipsen

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ z = a + x \end{cases}$$

med sådan omloppsriktning att projektionen i xy-planet genomlöps moturs,

a) genom direkt beräkning.
b) genom att använda Stokes' universalsats.

84. 84 Den slutna ytan S är en nivåyta till skalärfältet $\psi(x, y, z)$. Beräkna integralen

$$\iiint_V \operatorname{grad} \phi \times \operatorname{grad} \psi \, dV$$

över det av S inneslutna området V. Vilka förutsättningar rörande skalärfälten ϕ och ψ måste man göra?

Ledning: Utveckla $\operatorname{rot}(\psi \operatorname{grad} \phi)$.

85. 85 Omforma linjeintegralen

$$\oint_C \mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times d\mathbf{r})$$

till en ytintegral över en yta S, som är inspänd i kurvan C. $\mathbf{r} = (x, y, z)$ är ortsvektorn.

86. 86 En sluten ledare C, som genomflyts av en elektrisk ström med styrkan I, befinner sig i det homogena magnetfältet $\mathbf{B}$ ($\mathbf{B}$ = konstant vektor). Kraftmomentet på ledaren är

$$\mathbf{M} = -I \oint_C \mathbf{r} \times (\mathbf{B} \times d\mathbf{r}),$$

där $\mathbf{r}$ betecknar ortsvektorn.

Omforma $\mathbf{M}$ till en ytintegral, som skall förenklas så mycket som möjligt. Studera särskilt specialfallet att C är en cirkel med radien R som ligger i planet $\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{n}} = p$.

Stokes' sats skall användas.

Ledning: Skalärmultiplicera $\mathbf{M}$ med $\mathbf{e}_i$ ($i = x, y, z$).

87. 87 Bestäm skalärfälten $\psi(\mathbf{r})$ och $\phi(\mathbf{r})$ så att ytintegralen

$$\iint_S ((\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \operatorname{grad} \psi + \phi \hat{\mathbf{n}}) dS$$

blir lika med linjeintegralen

$$\oint_C \operatorname{grad} \frac{1}{r} \times d\mathbf{r}$$

längs S:s slutna randkurva C. $\hat{\mathbf{n}}$ är S:s normalvektor. Varken S eller C går genom origo.

Stokes' sats men ingen annan integralsats får förutsättas bekant.

88. 88 Använd en integralsats för att beräkna integralen

$$\iint_S (2xz^2 + xy + z^3)\hat{\mathbf{n}}\, dS,$$

där S är den del av ytan $z^2 = x^2 + y^2$ för vilken $0 \leq z \leq 1$. Ytans orientering är sådan att normalen $\hat{\mathbf{n}}$ har negativ z-komponent.

Cylinderkoordinater

89. 89 Beräkna vinkeln mellan ytorna

$$\rho = \cos\varphi \qquad \text{och} \qquad z = \rho \sin\varphi$$

i punkten

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \varphi = \frac{\pi}{4}, \qquad z = \frac{1}{2}.$$

Räkningarna skall genomföras i cylinderkoordinater.

90. 90 Temperaturfördelningen i en cylinder beskrivs av skalärfältet

$$T = \rho^2 + z^2 \cos^2\varphi.$$

Punkten P har koordinaterna

$$\rho = 2, \qquad \varphi = \frac{\pi}{4}, \qquad z = 1.$$

Hur snabbt ökar temperaturen då man utgår från P i riktningen $\mathbf{e}_\rho - 2\mathbf{e}_\varphi$?

I vilken riktning utgående från P ökar temperaturen snabbast och hur stor är den maximala temperaturökningen per längdenhet?

91. 91 Ett vektorfält har potentialen

$$\left(\frac{a}{\rho} + b\rho\right) \sin\varphi,$$

där a och b är konstanter. Beräkna vektorfältets flöde ut genom en sluten yta, som ej skärs av z-axeln.

92. 92 Visa att vektorfältet

$$\mathbf{A} = z^2 \sin^2\varphi \,\mathbf{e}_\rho + (z^2 \sin 2\varphi - \frac{z}{\rho} \sin\varphi)\mathbf{e}_\varphi + (\cos\varphi + 2\rho z \sin^2\varphi)\mathbf{e}_z$$

har en skalär potential $\phi(\rho, \varphi, z)$.

Beräkna sedan linjeintegralen

$$\int_P^Q \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r},$$

där P och Q har koordinaterna:

$$\begin{cases} \rho_P = 1, \quad \varphi_P = \dfrac{\pi}{6}, \quad z_P = 1 \\[2ex] \rho_Q = 5, \quad \varphi_Q = \dfrac{\pi}{2}, \quad z_Q = -1 \end{cases}$$

93. 93 Vektorfältet

$$\mathbf{A}(\rho, \varphi, z) = f(\rho)\mathbf{e}_\varphi$$

satisfierar ekvationen

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \mathbf{0}.$$

Bestäm $f(\rho)$. Använd vektorformeln $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \ldots$, vilken skall uppställas med indexräkning.

94. 94 Visa att cirkulationen av vektorfältet

$$\frac{\cos\varphi}{\rho^2}\mathbf{e}_\rho + \frac{\sin\varphi}{\rho^2}\mathbf{e}_\varphi$$

runt varje sluten kurva, som ej omkretsar z-axeln, är noll.

95. 95 En stel kropp roterar med vinkelhastigheten ω.

   a) Uttryck kroppens hastighetsfält $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r})$ i ett cylindriskt koordinatsystem, vars z-axel sammanfaller med rotationsaxeln.
   b) Visa att vektorfältet har en vektorpotential $\mathbf{A}$.
   c) Beräkna den vektorpotential för $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ som har formen

   $$\mathbf{A} = A_\rho(\rho, \varphi, z)\mathbf{e}_\rho$$

   och som är så allmän som möjligt.

Räkningarna skall utföras i cylinderkoordinater.

96. 96 En elektrisk ström I flyter i en oändlig, rak cylindrisk tråd med radien R. Magnetfältet $\mathbf{B}$ utanför tråden är

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{I\mu_0}{2\pi}\frac{\mathbf{e}_\varphi}{\rho}, \quad \rho > R.$$

   a) Visa att $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ så att $\mathbf{B}$ har en vektorpotential. Bestäm en vektorpotential av formen

   $$\mathbf{A} = A_z(\rho)\mathbf{e}_z.$$

   (Funktionen $A_z(\rho)$ skall beräknas.)
   b) Visa att $\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mathbf{0}$ för $\rho > R$, men att det inte finns någon skalär potential ϕ sådan att $\mathbf{B} = \operatorname{grad} \phi$ i området $\rho > R$.

97. 97 Beräkna $\nabla^2 \mathbf{e}_\varphi$, där $\mathbf{e}_\varphi$ är den basvektor i cylindriska koordinater som är associerad med vinkeln φ.

Ledning: Använd vektorformeln $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \ldots$, vilken inte behöver bevisas.

Sfäriska koordinater

98. 98 Låt $\psi = -\frac{\cos\theta}{r^2}$, $\quad \mathbf{A} = \frac{\sin\theta}{r^2}\mathbf{e}_\varphi$,
där (r, θ, φ) är sfäriska koordinater, definierade genom

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

Beräkna

a) $\nabla\psi$.

b) $\nabla \times \mathbf{A}$.

c) $\nabla^2\psi$ och $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})$.

99. 99 Genom att tillämpa indexräkning på rot rot $\mathbf{A}$ kan man få ett uttryck på $\nabla^2\mathbf{A}$.

a) Genomför detta.
Använd det erhållna uttrycket för att bestämma

b) $\nabla^2\mathbf{e}_r$.

c) $\nabla^2\mathbf{e}_\varphi$.

Beräkningarna skall utföras i sfäriska koordinater.

100. 100 Punkten P ligger på rotationsellipsoiden

$$r = \frac{3}{3 + \cos\theta}.$$

Beräkna vinkeln mellan ellipsoidens normal $\mathbf{n}_P$ i P och ortsvektorn $\mathbf{r}_P$ från origo till P som funktion av vinkeln mellan $\mathbf{r}_P$ och z-axeln.

101. 101 Tryckfördelningen i en sfär beskrivs av skalärfältet

$$p = r^2 \sin\theta\cos\varphi.$$

Punkten P har koordinaterna

$$r = 2, \qquad \theta = \frac{\pi}{2}, \qquad \varphi = \frac{\pi}{4}.$$

Hur snabbt ökar trycket då man utgår från P i riktningen $\mathbf{e}_r + \mathbf{e}_\varphi$?

I vilken riktning utgående från P ökar trycket snabbast och hur stor är den maximala tryckökningen per längdenhet?

Räkningarna skall genomföras i sfäriska koordinater.

102. 102 Temperaturfördelningen i en kropp beskrivs av skalärfältet

$$T = \frac{2 + \cos\theta}{r^2}.$$

Punkten P har de sfäriska koordinaterna

$$r = 2, \qquad \theta = \frac{\pi}{2}, \qquad \varphi = \frac{\pi}{4}.$$

Hur snabbt ökar temperaturen då man utgår från P i riktningen $\mathbf{e}_r + \mathbf{e}_\varphi$?

I vilken riktning utgående från P ökar temperaturen snabbast och hur stor är den maximala temperaturökningen per längdenhet?

Räkningarna skall genomföras i sfäriska koordinater.

103. 103 Visa att vektorfältet

$$\mathbf{A} = \frac{3\cos^2\theta - 1}{r^4}\mathbf{e}_r + \frac{\sin 2\theta}{r^4}\mathbf{e}_\theta$$

har en skalär potential ϕ.

Använd potentialen för att beräkna linjeintegralen

$$\int_P^Q \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r},$$

där P:s koordinater är

$$r = 1, \qquad \theta = \frac{\pi}{4}, \qquad \varphi = 0$$

och Q:s koordinater är

$$r = 3, \qquad \theta = \frac{\pi}{2}, \qquad \varphi = \pi.$$

Ledning: Lös ekvationssystemet $\operatorname{grad}\phi = \mathbf{A}$ i sfäriska koordinater enligt samma princip som tillämpas i kartesiska koordinater.

104. 104 Ett vektorfält $\mathbf{A}$ ges av

$$\mathbf{A} = \frac{1}{r^3}(\cos 2\theta\,\mathbf{e}_\theta - \sin 2\theta\,\mathbf{e}_r)$$

a) Beräkna $\operatorname{rot}\mathbf{A}$.

b) Beräkna $\operatorname{div}\mathbf{A}$.

c) Existerar ett skalärfält $\psi(r, \theta, \varphi)$ så att $\mathbf{A} = \operatorname{grad}\psi$? Motivera svaret och bestäm – om svaret är jakande – funktionen ψ.

105. 105 Vektorfältet

$$\frac{\mathbf{e}_r}{r^2}$$

är källfritt för $r \neq 0$ och har följaktligen en vektorpotential $\mathbf{A}$. Beräkna den allmännast möjliga vektorpotential $\mathbf{A}$ som dels kan skrivas på formen

$$\mathbf{A} = A_\varphi(r, \theta, \varphi)\mathbf{e}_\varphi$$

och dels är källfri. Den erhållna vektorpotentialen är ej definierad i vissa punkter im rummet. Ange dessa punkter.

106. 106 Visa att linjeintegralen

$$\int_P^Q \left(\frac{1}{r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r \sin\theta}\mathbf{e}_\varphi \right) \cdot d\mathbf{r}$$

från punkten P:

$$r = 1, \qquad \theta = \varphi = \frac{\pi}{2}$$

till punkten Q:

$$r = 3, \qquad \theta = \frac{\pi}{4}, \qquad \varphi = \frac{3\pi}{2}$$

är oberoende av vägen, förutsatt att vägen ej skär planet $\varphi = \pi$ eller z-axeln. Beräkna även integralens värde.

107. 107 Använd Stokes' sats för att beräkna linjeintegralen

$$\oint_C (\sin\theta\, \mathbf{e}_\theta + \sin\theta\, \mathbf{e}_\varphi) \cdot d\mathbf{r},$$

där C är skärningen mellan en sfär med medelpunkten i origo och radien 1 samt de delar av planen

$$x = 0, \qquad y = 0, \qquad z = 0$$

för vilka $x, y, z \geq 0$. Kurvans orientering, som du får välja själv, skall tydligt anges. Kontrollera resultatet genom direkt integration.

108. 108 Beräkna integralen

$$\iint_S \mathbf{e}_\theta\, dS,$$

där S har ekvationen

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \qquad x, y, z \geq 0.$$

109. 109 Beräkna cirkulationen av vektorfältet

$$\frac{\cos\varphi}{r^2 \sin\theta}\mathbf{e}_r + \frac{\cos\theta\cos\varphi}{r^2 \sin^2\theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{\sin\varphi}{r^2 \sin^2\theta}\mathbf{e}_\varphi$$

längs en sluten kurva, som ej omkretsar z-axeln, men för övrigt är godtycklig.

110. 110 Låt **a** vara en konstant vektor och **r** ortsvektorn. Beräkna

a) $\operatorname{grad}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})$
b) $\operatorname{div}(\mathbf{a}\times\mathbf{r})$
c) $\operatorname{rot}(\mathbf{a}\times\mathbf{r})$

genom att först transformera fälten $\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}$ resp. $\mathbf{a}\times\mathbf{r}$ till ett lämpligt valt sfäriskt koordinatsystem, samt därefter tillämpa uttrycken på grad, div och rot i ett sfäriskt koordinatsystem.

111. 111 Beräkna

$$\nabla^2\left(\frac{\sin\theta}{r^2}\mathbf{e}_\theta\right).$$

Räkningarna skall genomföras i sfäriska koordinater med hjälp av formeln

$$\nabla^2\mathbf{A} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{A} - \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A}.$$

112. 112 Beräkna

$$\nabla^2\mathbf{e}_\theta.$$

Räkningarna skall genomföras i sfäriska koordinater.

Några viktiga vektorfält

113. 113

a) Visa med direkt beräkning att Gauss sats inte gäller för

$$\mathbf{A}(x,y,z) = \frac{(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},$$

där S är färytan med radie R centrerad i origo som omsluter volymen V. Varför gäller inte satsen?

b) Bekräfta med direkt integration att Gauss sats gäller för vektorfältet **A** i (a) när S är ytan S_1 med radie R_1 plus ytan S_2 med radie R_2, och V är volymen mellan S_1 och S_2.

c) Vilket villkor måste ytan S uppfylla för att Gauss sats skall vara uppfylld för **A** i (a)?

114. 114 Beräkna flödet av vektorfältet

$$\operatorname{grad}\left(\frac{q}{|\mathbf{r}-\mathbf{c}|} + pz^4\right)$$

ut ur området

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4c^2 \\ |z| \leq 2c \end{cases}.$$

115. 115 Beräkna flödet av vektorfältet

$$\operatorname{grad}\left(\frac{1}{\sqrt{(x-3)^2 + (y+1)^2 + z^2}} + xy^3\right)$$

ut ur en sfär med radien 3 och medelpunkten $(2, 1, 1)$.

116. 116 En kvadrupol i origo ger upphov till vektorfältet

$$\frac{3\cos^2\theta - 1}{r^4}\mathbf{e}_r + \frac{\sin 2\theta}{r^4}\mathbf{e}_\theta.$$

Använd Gauss' sats för att beräkna flödet av detta fält ut ur cylindern

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 9 \\ -1 \leq z \leq 2 \end{cases}.$$

117. 117 Beräkna flödet av vektorfältet

$$\operatorname{grad}\left(\ln\rho + \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}\right)$$

ut ur området

$$\rho^2 + z^2 \leq 1$$

a) med hjälp av Gauss' sats.

b) genom direkt integration.

118. 118 Beräkna flödet av vektorfältet

$$\frac{1}{r}\mathbf{e}_r$$

ut genom rotationsellipsoiden

$$r = \frac{1}{2 - \cos\theta}$$

a) med hjälp av Gauss' sats.

b) genom direkt integration.

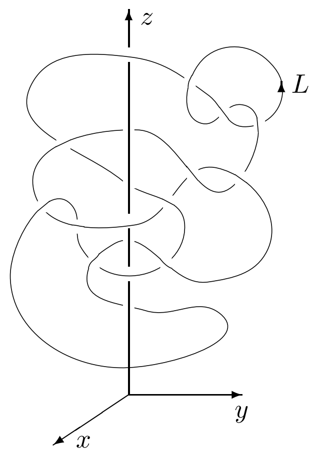
Vilket svar hade man fått om fältet istället hade varit

$$\frac{1}{r^2}\mathbf{e}_r?$$

119. 119 Beräkna linjeintegralen

$$\oint_L \frac{2}{\rho}\mathbf{e}_\varphi \cdot d\mathbf{r}$$

längs den slutna kurvan L enligt figuren.



120. 120 Använd Gauss' sats för att beräkna flödet av vektorfältet

$$z\frac{\rho^2 - 1}{\rho}\mathbf{e}_\rho$$

ut ur området

$$x^2 + y^2 + (z-2)^2 \leq 4.$$

121. 121 Visa att påståendet i exempel 94 gäller även om kurvan omsluter z-axeln.

122. 122 Polerna i en dipol har styrkorna $\pm q$ och sammanbinds av vektorn $\mathbf{a}$ (spetsen i pluspolen).

Bestäm flödet av dipolfältet ut ur en sluten yta S som

a) omsluter bägge polerna.
b) omsluter endast pluspolen.
c) inte omsluter någon pol.

123. 123 Beräkna flödet av vektorfältet

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{(\mathbf{e} \times \mathbf{r}) \cdot (\mathbf{e} \times \mathbf{r})}{r^5}\mathbf{r}$$

ut genom en godtycklig sluten yta S som begränsar ett område V som innehåller origo.

$\mathbf{e}$ är en konstant enhetsvektor.

Ledning: Använd sfäriska koordinater.

Fältlinjer

124. 124 Bestäm ekvationen för fältlinjerna till vektorfältet

$$\mathbf{A} = (2xz, 2yz, -x^2 - y^2).$$

Ange speciellt ekvationen för fältlinjen genom punkten $(1, 1, 1)$ och finn den fältlinjens skärningspunkt med planet

$$x + y = 1.$$

125. 125 Ange ekvationen för fältlinjerna till vektorfältet

$$\rho \cos\varphi \, \mathbf{e}_\rho + \rho^2 \mathbf{e}_\varphi + \rho \sin\varphi \, \mathbf{e}_z.$$

I vilka punkter går fältlinjen genom punkten

$$\rho = 3, \qquad \varphi = \frac{\pi}{2}, \qquad z = 2$$

genom planet $y = 0$?

126. 126 Ange ekvationen för fältlinjen till dipolfältet

$$\mathbf{A} = \operatorname{grad} \frac{\cos\theta}{r^2}.$$

Bestäm speciellt fältlinjen genom punkten

$$r = a, \qquad \theta = \frac{\pi}{6}, \qquad \varphi = 0.$$

Beräkna det största värde som avståndet mellan en punkt på denna fältlinje och origo kan anta.

Kontinuitetsekvationen, Greens satser, Lapla- ces och Poissons ekvationer

127. 127 Beräkna potentialen ϕ som löser Laplaces ekvation för ett system av två parallella plattor på avstånd d. Den ena platttan har potential $\phi = 0$ och den andra $\phi = \phi_0$=konstant.

128. 128 Beräkna potentialen ϕ som löser Laplaces ekvation för ett system av två koncentriska sfäriska skal med radie R_1 och $R_2 > R_1$. Sfären med radie R_1 har potential $\phi = 0$, och sfären med radie R_2 har $\phi = \phi_0$=konstant.

129. 129 På ett sfäriskt skal med centrum i origo och radie R är potentialen

$$\phi = \frac{\sin\varphi}{7 + 3\cos^5\theta}.$$

Vad är potentialen i origo?

130. 130 Det regnar på en cirkulär, horisontell platta, vars radie är ρ_0 m. Regntätheten är $\kappa(\rho, \varphi, t)$ m/s, och vattnet strömmar mot plattans kanter med hastigheten:

$$\mathbf{v} = v_\rho(\rho, \varphi, t)\mathbf{e}_\rho + v_\varphi(\rho, \varphi, t)\mathbf{e}_\varphi \quad [\mathrm{m/s}]$$

som är ett medelvärde bildat över olika djup. Vattenlagrets tjocklek är $d(\rho, \varphi, t)$ m.

Hur lyder kontinuitetsekvationen för strömningen i polära koordinater ρ och φ?

Beräkna speciellt d om förloppet är stationärt och om

$$\kappa = k\left(1 - \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^2\right) \quad \text{och} \quad \mathbf{v} = v_0\frac{\rho}{\rho_0}\mathbf{e}_\rho \qquad (k,\ v_0 \text{ konst.}).$$

131. 131 En platta av stor utsträckning begränsas av planen $x = 0$ och $x = d$. Dessa begränsningsytor hålls vid konstanta temperaturer T_0 resp. T_d. Bestäm temperaturfördelningen i plattans inre, där Laplaces ekvation $\nabla^2 T = 0$ gäller.

132. 132 En kondensator består av två koaxiala cirkulära metallcylindrar. Den inre har radien R_1 och potentialen V_1, medan den yttre, vars radie är R_2, har potentialen V_2. Potentialen V satisfierar Laplaces ekvation i området mellan cylindrarna och är kontinuerlig vid cylinderytorna. Bestäm potentialen V och den elektriska fältstyrkan $\mathbf{e} = -\operatorname{grad} V$ i detta område. (Randeffekter försummas, dvs. V får antas konstant i axelriktningen.)

133. 133 En ensam, elektriskt laddad metallkula med radien R har den konstanta potentialen V_0. Potentialen $V(r)$ är kontinuerlig vid kulans yta samt lyder Laplaces ekvation i den omgivande rymden.

Bestäm $V(r)$ samt $\mathbf{e} = -\operatorname{grad} V$.

134. 134 Tyngdkraftsaccelerationen $\mathbf{G}$ kan skrivas $\mathbf{G} = -\operatorname{grad}\phi$, där potentialfunktionen ϕ satisfierar ekvationen:

$$\nabla^2\phi = \gamma\rho,$$

där γ är en konstant och ρ är masstätheten.

Beräkna tyngdkraftfältet för jorden om denna approximeras med en ensam sfär (radie R) med konstant masstäthet ρ_0.

135. 135 Skalärfältet ϕ satisfierar Laplaces ekvation i V, och på V:s begränsningsyta S gäller

$$\phi = f,$$

där f är en given funktion. Visa att för varje funktion ψ sådan att

$$\psi = f \text{ på } S$$

gäller att

$$\iiint_V (\operatorname{grad}\psi)^2 dV \geq \iiint_V (\operatorname{grad}\phi)^2 dV.$$

ϕ och ψ antas vara kontinuerligt deriverbara två gånger.

136. 136 Skalärfältet $\phi(\rho, \varphi)$ beror ej av z och satisfierar Laplaces ekvation i hela rummet. Visa att ϕ:s värde på z-axeln kan skrivas

$$\phi(0, -) = \gamma \iint_S \phi\, dS,$$

där S är cylinderytan

$$\rho = R, \qquad -h \leq z \leq h.$$

Bestäm konstanten γ.

Ledning: Tillämpa Greens andra teorem på skalärfälten ϕ och $\ln\rho$ över det område som begränsas av ytorna

$$\rho = R, \qquad \rho = \varepsilon, \qquad z = h, \qquad z = -h.$$

137. 137 Den stationära temperaturfördelningen $T(\mathbf{r})$ inuti en kropp V satisfierar Poissons ekvation

$$\nabla^2 T = -\frac{1}{k}\kappa(\mathbf{r}).$$

Den specifika värmeledningsförmågan k är en konstant och den givna funktionen $\kappa(\mathbf{r})$ anger värmeproduktionen per volymsenhet och tidsenhet i kroppen.

Kroppens begränsningsyta hålls vid den givna temperaturen $\theta(\mathbf{r})$. Genom mätningar av värmeflödet genom S har man bestämt funktionen

$$\gamma(\mathbf{r}) = -k \operatorname{grad} T \cdot \hat{\mathbf{n}}$$

på S. $\hat{\mathbf{n}}$ är S:s utåtriktade normal.

Visa att temperaturen i en godtycklig punkt $\mathbf{r}_P$ kan uttryckas i de kända funktionerna $\kappa(\mathbf{r})$, $\theta(\mathbf{r})$ och $\gamma(\mathbf{r})$ enligt formeln:

$$\begin{aligned} T(\mathbf{r}_P) &= a \iiint_V \frac{\kappa(\mathbf{r})}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_P|} dV + b \oiint_S \frac{\theta(\mathbf{r})(\mathbf{r}-\mathbf{r}_P)\cdot\hat{\mathbf{n}}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_P|^3} dS + \\ &+ c \oiint_S \frac{\gamma(\mathbf{r})}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_P|} dS. \end{aligned}$$

Bestäm konstanterna a, b och c.

Ledning: Använd Greens andra teorem på skalärfälten

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_P|} \quad \text{och} \quad T(\mathbf{r}).$$

Betrakta området mellan sfären $|\mathbf{r}-\mathbf{r}_P| = \varepsilon$ och randytan S.

138. 138 Potentialen i punkten $\mathbf{r}_P$ från en dipol med dipolmomentet $\mathbf{a}$, vilken befinner sig i punkten $\mathbf{r}$, ges som bekant av

$$\phi(\mathbf{r}_P) = \frac{\mathbf{a}\cdot(\mathbf{r}_P-\mathbf{r})}{|\mathbf{r}_P-\mathbf{r}|^3}.$$

Låt S vara en yta med randkurvan L. Ytan är likformigt belagd med infinitesimala dipoler så att summan av alla dipolmomenten i ytelementet $\hat{\mathbf{n}}\,dS$ ges av vektorn

$$\sigma\hat{\mathbf{n}}\,dS,$$

där σ är en konstant. Potentialen i punkten $\mathbf{r}_P$ från dipolytan blir i så fall

$$\phi(\mathbf{r}_P) = \iint_S \frac{\sigma\hat{\mathbf{n}}\cdot(\mathbf{r}_P-\mathbf{r})}{|\mathbf{r}_P-\mathbf{r}|^3} dS.$$

a) Visa att $\phi(\mathbf{r})$ är proportionell mot den rymdvinkel Ω som L upptar då den betraktas från punkten $\mathbf{r}_P$.

b) Hur ändras potentialen då man passerar genom dipolytan? Studera speciellt fallet att S är en sluten yta.

139. 139 De slutna kurvorna C_1 och C_2 omsluter ytorna S_1 resp. S_2. Visa att

$$\int_{C_1}\int_{C_2} (\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)^2 d\mathbf{r}_1\cdot d\mathbf{r}_2 = -4\left(\iint_{S_1} d\mathbf{S}_1\right)\cdot\left(\iint_{S_2} d\mathbf{S}_2\right).$$

$\mathbf{r}_1$ ($\mathbf{r}_2$) är ortsvektorn för en punkt på C_1 (C_2). $d\mathbf{r}_1$ ($d\mathbf{r}_2$) är linjeelement på C_1 (C_2).

Kroklinjiga koordinater

140. 140 Beräkna skalfaktorer och enhetsvektorer för följande koordinattransformation, och kontrollera att basvektorerna är ortogonala:

   $x = u_1 + u_2 + 7u_3,\ y = u_1 - 3u_2 + u_3,\ z = 2u_1 + u_2 - 4u_3.$

141. 141 Beräkna volymsintegralen

   $$\iiint_V \phi(x, y, z) dV$$

   genom att göra det föreskrivna variabelbytet:

   a) $\phi(x, y, z) = x^2 + yz$ och V : ellipsoiden $(x/a)^2 + (y/b)^2 + (z/c)^2 \leq 1$. Variabelbyte: $x = au_1,\ y = bu_2,\ z = cu_3$.

   b) $\phi(x, y, z) = (x + yz)$ och V : tetraedern som begränsas av koordinatplanen och planet $x+y+z = 6$. Variabelbyte: $x = 6-2u_2,\ y = 2u_2-2u_1,\ z = 2u_3$.

142. 142

   a) Bestäm de normerade basvektorerna i det kroklinjiga koordinatsystemet

   $$\begin{cases} u_1 = x^2 - y^2 \\ u_2 = xy \\ u_3 = z \end{cases}.$$

   och visa att de är ortogonala.

   b) Uttryck divergensen av ett vektorfält $\mathbf{A} = \mathbf{A}(u_1, u_2, u_3)$ i derivator av fältets komponenter längs dessa basvektorer. (Svaret skall endast innehålla koordinaterna u_1, u_2 och u_3.)

143. 143 Paraboliska koordinater u, v, φ, definieras av ekvationerna:

   $$\begin{cases} x = uv \cos \varphi \\ y = uv \sin \varphi \\ z = \dfrac{1}{2}(u^2 - v^2) \end{cases}$$

   a) Bestäm u, v, φ som funktioner av de kartesiska koordinaterna x, y, z. Ange variationsområdena för u, v, φ.

   b) Ange ekvationerna för koordinatytor och koordinatlinjer samt skissera deras utseende.

   c) Visa att de paraboliska koordinaterna är ortogonala.

d) Ställ upp gradienten i paraboliska koordinater.

e) Bestäm sambandet mellan basvektorsystemen

$$\mathbf{e}_u,\ \mathbf{e}_v,\ \mathbf{e}_\varphi \quad \text{och} \quad \mathbf{e}_x,\ \mathbf{e}_y,\ \mathbf{e}_z.$$

f) Referera ortsvektorn $\mathbf{r}$ samt punktkällans vektorfält

$$\frac{\mathbf{e}_r}{r^2}$$

till paraboliska koordinater.

144. 144 Betrakta de kroklinjiga koordinaterna u, v och w definierade genom

$$\begin{cases} u = r\sin^2\dfrac{\theta}{2} \\ v = r\cos^2\dfrac{\theta}{2} \\ w = 2\varphi \end{cases},$$

där r, θ, φ är de sfäriska koordinaterna.

a) Visa att u, v, w är ortogonala koordinater och bestäm skalfaktorerna h_u, h_v och h_w.
Ledning: Bestäm först ∇u, ∇v och ∇w.

b) Bestäm divergensen av vektorn

$$\mathbf{A} = \mathbf{e}_u\sqrt{u^2+uv} + \mathbf{e}_v\sqrt{v^2+uv}.$$

145. 145 För godtyckliga kroklinjiga koordinater kan man skriva

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial u_1}\nabla u_1 + \frac{\partial\phi}{\partial u_2}\nabla u_2 + \frac{\partial\phi}{\partial u_3}\nabla u_3. \tag{1}$$

a) Visa detta och använd (1) för att bestämma det villkor u_1, u_2 och u_3 måste uppfylla för att $\nabla^2\phi$ ska få den enkla formen

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{h_1^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial u_1^2} + \frac{1}{h_2^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial u_2^2} + \frac{1}{h_3^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial u_3^2},$$

där

$$h_i = \frac{1}{|\nabla u_i|}.$$

b) Bestäm $u_1(r)$, $u_2(\theta)$, $u_3(\varphi)$ så att $\nabla^2\phi$ får denna form och ge slutligen uttrycket för $\nabla^2\phi$ uttryckt i dessa koordinater.

146. 146 De kroklinjiga koordinaterna u, v och w är definierade genom

$$\begin{cases} x = a\cosh u \cos v \\ y = a \sinh u \sin v \\ z = w \end{cases} .$$

Bestäm basvektorer och skalfaktorer samt sök den lösning till ekvationen

$$\nabla^2 \phi = 0$$

som enbart beror av u, och på ellipserna

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = \frac{a^2}{16} \qquad \text{och} \qquad \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = \frac{a^2}{9}$$

antar värdena 0 och 2 respektive. ($u > 0$, $0 \le v < 2\pi$.)

147. 147 Ett kroklinjigt koordinatsystem (ξ, η, ζ) är givet genom

$$\begin{cases} \xi^2 = \rho - y & -\infty < \xi < \infty \\ \eta^2 = \rho + y & 0 \le \eta < \infty \\ \zeta = z \end{cases} .$$

Här är $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ och tecknet på ξ definieras genom $x = \xi\eta$.

a) Bestäm de normerade basvektorerna $\mathbf{e}_\xi$, $\mathbf{e}_\eta$ och $\mathbf{e}_\zeta$ samt transformationskoefficienterna

$$a_{ik} = \mathbf{e}_{i'} \cdot \mathbf{e}_k \qquad i' = \xi, \eta, \zeta.$$

Är (ξ, η, ζ) ett ortogonalt system?

b) Bestäm skalfaktorerna och div $\mathbf{A}$, där

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \left(\frac{\xi}{2}(3\eta^2 + \xi^2)\mathbf{e}_\xi + \frac{\eta}{2}(3\xi^2 + \eta^2)\mathbf{e}_\eta \right).$$

148. 148 Betrakta de ortogonala kroklinjiga koordinaterna

$$\begin{cases} u = r(1 - \cos\theta) \\ v = r(1 + \cos\theta) \\ w = \varphi \end{cases} .$$

Hur ser gradienten av ett fält ϕ och ortsvektorn $\mathbf{r}$ ut i det nya basvektorsystemet $\mathbf{e}_u$, $\mathbf{e}_v$, $\mathbf{e}_w$?

149. 149

a) Transformera Laplaces ekvation till paraboliska koordinater u, v, φ.

b) Bestäm den allmänna lösningen på formen $\phi = \phi(u)$.

c) Referera denna lösning till sfäriska koordinater samt verifiera att den satisfierar Laplaces ekvation i sfäriska koordinater.

150. 150 Ett skalärfält ϕ, som enbart beror av

$$u^2 = r + z = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + z$$

satisfierar Laplaces ekvation $\nabla^2 \phi = 0$ jämte randvillkoren

$$\phi = 0 \quad \text{för} \quad \begin{cases} x = 3a \\ y = 0 \\ z = 4a \end{cases} \qquad \text{och} \qquad \phi = \phi_0 \quad \text{för} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = a \end{cases}$$

För att bestämma ϕ används lämpligen koordinaterna u, v, φ definierade ur

$$\begin{cases} x = uv \cos\varphi \\ y = uv \sin\varphi \\ z = \frac{1}{2}(u^2 - v^2) \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 \leq u < \infty \\ 0 \leq v < \infty \\ 0 \leq \varphi < 2\pi \end{cases} .$$

Visa att dessa är ortogonala, bestäm skalfaktorerna och uppställ sedan ekvationen för ϕ samt bestäm ϕ.

Tensorräkning

151. 151

a) Visa att transformationen $x'_i = L_{ik} x_k$ med

$$(L_{ik}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

är en rotation.

b) Bestäm komponenterna T'_{ik} om

$$(T_{ik}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

152. 152 En tensor har komponenterna $A_{11} = 1$, $A_{ik} = 0$ om $i \neq 1$ eller $k \neq 1$, relativt det kartesiska koordinatsystemet K. Ange tensorns komponenter relativt koordinatsystemet K', som är vridet vinkeln α relativt K kring den med K gemensamma x_3-axeln.

153. 153 Tensorn $\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$ har följande komponenter relativt det kartesiska koordinatsystemet K:

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & i + j = 4 \\ 0 & i + j \neq 4 \end{cases}$$

Bestäm A'_{ij} i ett koordinatsystem K' som är vridet vinkeln α relativt K kring den med K gemensamma x_1-axeln.

154. 154 En andragradsyta har ekvationen

$$A_{ij}x_i x_j + B_i x_i = 0$$

i det kartesiska systemet K. I ett annat kartesiskt system K' blir ekvationen

$$A'_{ij}x'_i x'_j + B'_i x'_i = 0.$$

Visa att A_{ij} (som förutsätts symmetrisk) och B_i utgör komponenter av tensorer.

155. 155 Beräkna

a) δ_{ii}.
b) $\delta_{ij}\varepsilon_{ijk}$.
c) $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{\ell jk}$.
d) $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk}$.

156. 156 Visa att tensorer med följande komponenter är isotropa.

a) $A_{ijk\ell} = \delta_{ij}\delta_{k\ell}$
b) $B_{ijk\ell} = \delta_{ik}\delta_{j\ell} + \delta_{i\ell}\delta_{jk}$
c) $C_{ijk\ell} = \varepsilon_{nij}\varepsilon_{nk\ell}$

157. 157 A_{ij} och B_{ij} är kartesiska komponenter av tensorfält. Visa att följande storheter är kartesiska komponenter av tensorfält och ange deras ordning.

a) $A_{ij}B_{k\ell}$
b) $A_{ij}B_{ji}$
c) $\dfrac{\partial A_{ij}}{\partial x_k}$

d) $\dfrac{\partial^2 A_{ij}}{\partial x_i \partial x_k}$

e) $\iiint_V A_{ij} A_{jk}\, dx_1\, dx_2\, dx_3$

158. 158 Använd tensormetoder för att omforma följande uttryck. Resultaten skall översättas till gängse vektorbeteckningar.

a) $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{A}$

b) $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \operatorname{rot} \mathbf{C}$

c) $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A}$

d) $\operatorname{rot}(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$

e) $\operatorname{div}(\mathbf{r} \times \operatorname{grad} \phi)$

f) $\operatorname{rot}(\mathbf{r} \times \operatorname{grad} \phi)$

g) $\operatorname{rot}(\mathbf{r} \times \operatorname{rot} \mathbf{A})$

h) $\operatorname{div}(\operatorname{grad} \phi \times \operatorname{grad} \psi)$

i) $\nabla \times ((\mathbf{r} \cdot \nabla)\mathbf{B})$

j) $\nabla \cdot ((\mathbf{r} \times \nabla) \times \mathbf{B})$

k) $(\mathbf{A} \cdot \nabla)(\mathbf{B} \times \mathbf{C})$

159. 159 Visa att

$$((\mathbf{r} \times \nabla) \times (\mathbf{r} \times \nabla))\phi = -(\mathbf{r} \times \nabla)\phi.$$

160. 160 Använd tensormetoder för att omvandla följande linjeintegraler till ytintegraler:

a) $\oint_C \mathbf{A} \times d\mathbf{r}$

b) $\oint_C \mathbf{A}\mathbf{B} \cdot d\mathbf{r}$

c) $\oint_C \varepsilon_{ijk} A_{ij} ds_k$ där A_{ij} är ett kartesiskt tensorfält.

161. 161 Låt $\mathbf{A}$ vara ett virvelfritt vektorfält. Omforma

$$\iint_S \mathbf{A} \times \nabla\phi \cdot d\mathbf{S}$$

till en linjeintegral.

162. 162 Omforma

$$\iint_S (\operatorname{grad}\phi \times \operatorname{Grad}\mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S}$$

till en lineintegral. Med $\operatorname{grad}\phi \times \operatorname{Grad}\mathbf{A}$ avses

$$(\operatorname{grad}\phi \times \operatorname{Grad}\mathbf{A})_{i\ell} = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial\phi}{\partial x_j}\frac{\partial A_\ell}{\partial x_k}.$$

163. 163 Omforma med tensormetoder följande integraler till ytintegraler:

a) $\iiint_V \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})dV$

b) $\iiint_V (\operatorname{grad}\phi \times \nabla) \cdot \mathbf{A}\,dV$

164. 164 Skriv

$$\iiint_V (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A}\,dV$$

som en ytintegral om $\mathbf{B}$ är ett källfritt fält.

165. 165 I Kirchhoffs behandling av diffraktionsfenomen uppträder uttrycket

$$\oint\!\!\!\oint_S (d\mathbf{S} \cdot \nabla)\mathbf{E} + \oint\!\!\!\oint_S d\mathbf{S} \times (\nabla \times \mathbf{E}) - \oint\!\!\!\oint_S d\mathbf{S}(\nabla \cdot \mathbf{E}),$$

där $\mathbf{E}$ är ett vektorfält och S en glatt yta. Visa att uttrycket blir noll.

166. 166 I en kropp flyter en elektrisk ström med strömtätheten $\mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{r})$. Kraften på volymselementet dV är då

$$d\mathbf{F} = \mathbf{j} \times \mathbf{B}\,dV,$$

där $\mathbf{B}$ är den magnetiska fältstyrkan. För det magnetiska fältet gäller

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\mathbf{B} &= 0, \\ \operatorname{rot}\mathbf{H} &= \mathbf{j}, \\ \mathbf{B} &= \mu_0\mathbf{H}. \end{aligned}$$

Skriv kraften på en delvolym V som en ytintegral av formen

$$\mathbf{e}_i \oint\!\!\!\oint_S T_{ij}\,dS_j$$

och bestäm härigenom de kartesiska tensorkomponenterna T_{ij}.

167. 167 En tensor har i det kartesiska koordinatsystemet K komponenterna

$$(T_{ik}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Existerar ett kartesiskt koordinatsystem K' så att

a)

$$(T'_{ik}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}?$$

b)

$$(T'_{ik}) = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & d \\ e & f & 0 \end{pmatrix}?$$

c)

$$(T'_{ik}) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}?$$

168. 168 Den s.k. centifugalkraften

$$\mathbf{F} = -m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$$

definierar en vektorvärd funktion av $\mathbf{r}$.

a) Visa att man kan associera denna med en tensor och bestäm tensorns komponenter.

b) Bestäm tensorns egenvärden och egenvektorer.

169. 169 Potentiella energin hos ett system bestående av två små stavmagneter med magnetiska momenten $\mathbf{m}_1$ och $\mathbf{m}_2$ placerade på avståndet r från varandra kan skrivas

$$\phi = (\mathbf{m}_1 \cdot \nabla)(\mathbf{m}_2 \cdot \nabla)\frac{1}{r}.$$

a) Visa att man kan definiera en tensor vars kartesiska komponenter M_{ij} uppfyller ekvationen

$$\phi = M_{ij} m_{1i} m_{2j}.$$

b) Bestäm tensorns egenvärden och egenvektorer.

170. 170 Kraften

$$\mathbf{F} = e\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

som verkar på en laddad partikel i ett magnetfält $\mathbf{B}$ utgör en vektorvärd funktion av partikelns hastighet $\mathbf{v}$.

a) Visa att man kan associera en tensor av andra ordningen med denna funktion.

b) Visa att denna tensor har två imaginära egenvärden och ett egenvärde $= 0$. Bestäm egenvektorn, som svarar mot det senare.

171. 171 I ett område finns elektriska laddningar med laddningstätheten $\rho(\mathbf{r})$. Den elektriska kraften på volymselementet dV är

$$\rho(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r})dV,$$

där $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ är den elektriska fältstyrkan. Det gäller att

$$\begin{cases} \operatorname{div}\mathbf{E} = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\rho \\ \mathbf{E} = -\operatorname{grad}\phi \end{cases}$$

där ϕ är den elektriska potentialen.

Visa att totala kraften på en delvolym V kan skrivas

$$\mathbf{F} = \mathbf{e}_i \oiint_S T_{ik} n_k \, dS,$$

där

$$T_{ik} = D_i E_k - \frac{1}{2} D_j E_j \delta_{ik}.$$

172. 172 Använd tensormetoder för att skriva

$$\iiint_V (\mathbf{A} \operatorname{div}\mathbf{A} - \mathbf{A} \times \operatorname{rot}\mathbf{A}) dV$$

som en ytintegral över den yta S som omsluter V. Resultatet skall sedan användas dels på

a) ett stationärt elektriskt fält genom att sätta $\mathbf{A} = \mathbf{E}$ där $\mathbf{E}$ lyder

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\mathbf{E} = \mathbf{0} \\ \operatorname{div}\mathbf{E} = \dfrac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0} \end{cases}$$

b) och sedan på ett stationärt magnetiskt fält genom att sätta $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ där $\mathbf{B}$ lyder

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{i}(\mathbf{r}) \end{cases},$$

med ρ som laddningstätheten och $\mathbf{i}$ som strömtätheten.

Blandade vektortal

173. 173 Den potentiella energin mellan två dipoler med dipolmomenten $\mathbf{m}_1$ och $\mathbf{m}_2$ på avståndet r kan skrivas:

$$\phi = (\mathbf{m}_1 \cdot \nabla)(\mathbf{m}_2 \cdot \nabla)\frac{1}{r}.$$

Utveckla uttrycket så att beroendet av vinklarna mellan vektorerna $\mathbf{m}_1$, $\mathbf{m}_2$ och $\mathbf{r}$ framgår. Bestäm värdet på ϕ för det fall att

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{e}_r &= \frac{1}{2}|\mathbf{m}_1|, \\ \mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{e}_r &= \frac{1}{2}|\mathbf{m}_2|, \\ \mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{m}_2 &= -\frac{1}{2}|\mathbf{m}_1||\mathbf{m}_2|. \end{aligned}$$

174. 174 Vektorpotentialen från en magnetisk dipol ges av

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3},$$

där dipolmomentet $\mathbf{m}$ är en konstant vektor och $\mathbf{r}$ är ortsvektorn. μ_0 är en konstant. Ur vektorpotentialen beräknas den magnetiska induktionen $\mathbf{B}$ enligt

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}.$$

Bestäm $\mathbf{B}$ för $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$.

175. 175 En elektrisk dipol i origo omger sig med potentialfältet

$$V = -\frac{2\sin\theta\cos\varphi}{r^2}.$$

a) Hur snabbt ökar potentialen V om man utgående från punkten

$$P : r = 1,\ \theta = \pi/4,\ \varphi = 0$$

rör sig i riktningen $\mathbf{e}_r - \mathbf{e}_\varphi$?

b) I vilken riktning utgående från P ökar potentialen snabbast, och hur stor är den maximala potentialökningen per längdenhet?

176. 176 Sambandet mellan laddningstätheten $\rho(\mathbf{r})$ och den elektriska fältstyrkan $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ i ett statiskt elektriskt fält ges av

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\mathbf{r}),$$

där ε_0 är en konstant.

Antag att man på ytan S av en sfär med radien a och centrum i origo mätt upp fältstyrkan och funnit

$$\mathbf{E}_S = \frac{\rho_0 a^2}{\varepsilon_0}\left(\frac{x_s}{a^2}, \frac{y_s}{b^2}, \frac{z_s}{c^2}\right) \tag{1}$$

I (1) är (x_s, y_s, z_s) koordinater för punkter på S. Observera att fältstyrkan i punkter (x, y, z) inuti sfären ej nödvändigtvis ges av (1). Bestäm laddningen inom sfären.

177. 177 I en stel kropp, som roterar kring en fix punkt kan hastighetsfältet skrivas

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

och accelerationsfältet

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}).$$

Bestäm $\operatorname{div}\mathbf{v}$, $\operatorname{rot}\mathbf{v}$, $\operatorname{div}\mathbf{a}$ och $\operatorname{rot}\mathbf{a}$. ($\boldsymbol{\omega}$ och $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ är funktioner endast av tiden.)

178. 178 I ett plasma av hög täthet gäller att krafttätheten $\mathbf{f}$ kan skrivas

$$\mathbf{f} = \mathbf{i} \times \mathbf{B} - \operatorname{grad} p,$$

där $\mathbf{i}$ är strömtätheten, $\mathbf{B}$ magnetfältet och p trycket.

Mellan $\mathbf{i}$ och $\mathbf{B}$ råder relationen $\operatorname{rot}\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{i}$. Vidare gäller $\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$. Visa att

$$\mathbf{f} = \frac{1}{\mu_0}(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{B} - \operatorname{grad}\left(p + \frac{B^2}{2\mu_0}\right).$$

179. 179 Kraften på en enhetsladdning från en dipol med dipolstyrkan p ges av

$$\mathbf{F} = p\left(\mathbf{e}_r\frac{2\cos\theta}{r^3} + \mathbf{e}_\theta\frac{\sin\theta}{r^3}\right)$$

förutsatt att origo valts i dipolen och z-axeln i dipolmomentets riktning. Bestäm $\operatorname{div}\mathbf{F}$ och $\operatorname{rot}\mathbf{F}$ för $r \neq 0$.

Arbetet skall utföras i sfäriska koordinater.

180. 180 Vektorfälten

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= (2x^2 - y^2, yz + z^2, xy^2),\\ \mathbf{B} &= (-y, x, 0)\end{aligned}$$

är givna. Beräkna

a) $\operatorname{rot}\mathbf{A}$.
b) $(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A}$.
c) $(\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B}$.
d) $\nabla^2\mathbf{A}$.

181. 181 Beräkna integralen
$$\iiint_V \mathbf{A}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{B}\,dV,$$
där vektorfältet $\mathbf{A}$ har en potential i området V, vars begränsningsyta är en ekvipotentialyta för denna potential.

182. 182 Beräkna flödet av vektorfältet
$$\mathbf{A} = \operatorname{grad}\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}}{r^3}$$
ut ur en kub med kantlängden 1, medelpunkten i origo och en rymddiagonal parallell med den konstanta vektorn $\mathbf{a}$.

183. 183 Vektorfälten $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ och $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ är kontinuerligt deriverbara i det enkelt sammanhängande området V. De båda fälten har samma divergens och rotation i V. Vidare är deras normalkomponenter på V:s begränsningsyta S identiska. Visa att
$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{B}(\mathbf{r})$$
i V.

184. 184 Ytan S begränsas av en kurva C, som är ekvipotentialkurva till ett skalärfält ϕ, dvs.
$$\phi(\mathbf{r}) = \text{konstant för } \mathbf{r}\in C.$$
Visa att
$$\iint_S (\nabla\phi\times\nabla\psi)\cdot d\mathbf{S} = 0,$$
där $\psi = \psi(\mathbf{r})$ är ett godtyckligt skalärfält. ϕ och ψ förutsätts kontinuerligt deriverbara.

185. 185 För vilka värden på n uppfyller vektorfältet
$$\mathbf{A} = \rho^n\mathbf{e}_\rho$$
ekvationen
$$\nabla^2\mathbf{A} - \frac{m}{\rho^2}\mathbf{A} = \mathbf{0}$$
för $\rho \neq 0$. Använd relationen $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A} = \ldots$

Räkningarna skall genomföras i cylinderkoordinater.

186. 186 Ett vektorfält av formen

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = f(r)\mathbf{e}_r$$

är källfritt för $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$. Vidare gäller att

$$\oiint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = Q,$$

där S är ytan av sfären $|\mathbf{r}| = R$.

a) Bestäm $f(r)$ och $\operatorname{rot} \mathbf{F}$.

b) Beräkna

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

där C är kurvan

$$\mathbf{r} = a(\mathbf{e}_x \sin\varphi + \mathbf{e}_y 4\cos\varphi + \mathbf{e}_z \frac{3}{2\pi}\varphi)$$

genomlöpt från $\varphi = 0$ till $\varphi = 2\pi$.

187. 187 En partikels rörelse beskrivs i cylinderkoordinater av ekvationerna:

$$\begin{cases} \rho = 1 \\ \varphi = \dfrac{\pi}{2} + \sin\omega t \\ z = \cos\omega t \end{cases}.$$

ω är en konstant och t är tiden. Beräkna beloppet av accelerationsvektorn.

De totala differentialerna av de cylindriska basvektorerna är

$$\begin{aligned} d\mathbf{e}_\rho &= \mathbf{e}_\varphi d\varphi, \\ d\mathbf{e}_\varphi &= -\mathbf{e}_\rho d\varphi, \\ d\mathbf{e}_z &= 0. \end{aligned}$$

188. 188 Vektorfälten

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{1}{r^2 + a^2}\mathbf{r}, \\ \mathbf{B} &= (a^2 - r^2)\mathbf{a} \times \mathbf{r} + r^2\mathbf{r} \end{aligned}$$

är givna. Bestäm

$$\iiint_V \mathbf{A} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{B} \, dV$$

där V är sfären $|\mathbf{r}| \leq a$.

Ledning: Genomför partiell integration först.

189. 189 Använd Stokes' sats för att beräkna integralen

$$\oint_C (\mathbf{a} \times \mathbf{r}) \times d\mathbf{r},$$

där C är en enhetscirkel som ligger i planet $\mathbf{b} \cdot \mathbf{r} = p$. $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$ är konstanta vektorer och p är en konstant.

Utnyttjade operatorformler skall uppställas med indexräkning.

190. 190 Visa att om

$$\mathbf{F} = -\frac{1}{r} \cot\theta \, \mathbf{e}_\varphi$$

och $\phi = \phi(\varphi)$ så gäller för varje yta S som omsluter volymen V att

$$\oiint_S \phi \mathbf{F} \times d\mathbf{S} = \oiint_S \frac{1}{r} \phi \, d\mathbf{S} - \iiint_V \frac{1}{r} \nabla\phi \, dV.$$

191. 191 Vektorfältet $\mathbf{A}$ är homogent av graden n, dvs.

$$\mathbf{A}(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^n \mathbf{A}(x, y, z) \tag{1}$$

a) Visa att $(\mathbf{r} \cdot \nabla)\mathbf{A} = n\mathbf{A}$.
Ledning: Derivera (1) m.a.p. λ.

b) Beräkna $\operatorname{div}(\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{A}))$.

192. 192 Visa att ytintegralen

$$\oiint_S \frac{\mathbf{e}_r \cdot \hat{\mathbf{n}}}{r^3} \mathbf{e}_r \, dS$$

kan omformas till en volymsintegral av typen

$$\iiint_V \operatorname{grad} \phi \, dV$$

över det av S omslutna området V, samt beräkna ϕ. Origo är en yttre punkt till V.

Ledning: Använd på lämpliga ställen att $\mathbf{e}_r = \mathbf{r}/r$.

193. 193 Vektorerna $\mathbf{E}$och $\mathbf{B}$ uppfyller

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \operatorname{grad} \phi, \\ \mathbf{B} &= \operatorname{rot} \mathbf{A}. \end{aligned}$$

Visa att

$$\iiint_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \, dV = 0$$

om begränsningsytan till V är en ekvipotentialyta till ϕ.

Ledning: Studera

$$\iiint_V \mathrm{div}(\phi\mathbf{B})dV$$

omsorgsfullt.

194. 194 Bestäm den allmänna lösning $\mathbf{A}$ till ekvationen

$$\nabla^2\mathbf{A} = \mathbf{0}$$

som har rotationssymmetri kring z-axeln samt translationssymmetri m.a.p. förflyttning i z-riktningen.

Ledning: Varje vektorfält $\mathbf{A}$ som har de ovannämnda symmetriegenskaperna kan skrivas

$$\mathbf{A} = A_\rho(\rho)\mathbf{e}_\rho + A_\varphi(\rho)\mathbf{e}_\varphi + A_z(\rho)\mathbf{e}_z.$$

195. 195 Beräkna integralen

$$\iint_S \mathbf{e}_\varphi \times \hat{\mathbf{n}}\, dS,$$

där S är ytan

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \qquad x, y, z \geq 0, \qquad \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{e}_z \leq 0$$

a) direkt.

b) med hjälp av en integralsats. Låt V vara området

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \qquad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0.$$

196. 196 Vektorfältet $\mathbf{A}$ är virvelfritt på ytan S samt antar värdet noll på S:s randkurva C. Visa att

$$\iint_S \mathbf{A} \times \hat{\mathbf{n}}\, dS = \mathbf{0}.$$

Ledning: Tillämpa Stokes' sats på vektorfältet

$$(\mathbf{e} \cdot \mathbf{r})\mathbf{A},$$

där $\mathbf{e}$ i tur och ordning sätts lika med $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ och $\mathbf{e}_z$.

197. 197 Det två gånger kontinuerligt deriverbara, källfria vektorfältet $\mathbf{A}$ satisfierar Laplaces ekvation i V och på V:s begränsningsyta S gäller att $\mathbf{A} \times \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{C}$, där $\mathbf{C}$ är ett givet vektorfält som är definierat på S.

Visa att för varje källfritt vektorfält $\mathbf{B}$ som är kontinuerligt deriverbart två gånger i V samt satisfierar randvillkoret $\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{C}$ på S gäller att

$$\iiint_V (\mathrm{rot}\,\mathbf{B})^2 dV \geq \iiint_V (\mathrm{rot}\,\mathbf{A})^2 dV.$$

Ledning: Sätt $\mathbf{B} = \mathbf{A} + \mathbf{D}$ och använd formeln $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \ldots$

198. 198 Vektorfältet $\mathbf{A}$ har kontinuerliga andraderivator. Visa att om $\mathbf{A}$ satisfierar ekvationen

$$\operatorname{rot}\mathbf{A} = \alpha\mathbf{A} \quad (\alpha \neq 0),$$

där α är en konstant, så följer därav att $\mathbf{A}$ satisfierar ekvationen

$$(\nabla^2 + \alpha^2)\mathbf{A} = \mathbf{0}.$$

Utnyttjade operatorformler skall ställas upp med indexräkning.

199. 199 Beräkna den allmänna lösning $u(x, y, z)$ till den biharmoniska ekvationen

$$\nabla^2(\nabla^2 u) = 0$$

som har

a) cylindersymmetri, dvs. $u = u(\sqrt{x^2 + y^2})$.

b) sfärisk symmetri, dvs. $u = u(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$.

200. 200 Beräkna integralen

$$\iiint_V \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}\, dV.$$

Vektorfältet $\mathbf{A}$ är virvelfritt i området V och vektorfältet $\mathbf{B}$ har en vektorpotential som är ortogonal mot V:s begränsningsyta S.

Ledning: Använd formeln $\operatorname{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \ldots$, som skall uppställas med hjälp av indexräkning.

201. 201 Beräkna

a) med användning av Gauss' sats

b) genom direkt integration

integralen

$$I(R) = \oiint_S \nabla\phi \cdot d\mathbf{S},$$

där

$$\phi = \frac{e^{-\lambda r}}{r}$$

och S är ytan av en sfär med radien R och centrum i origo. Vilka blir värdena av

$$\lim_{\substack{R\to\infty \\ \lambda\neq 0}} I(R) \quad \text{och} \quad \lim_{\substack{\lambda\to 0 \\ R<\infty}} I(R)$$

202. 202 En partikel rör sig i en spiralliknande bana på enhetssfärens yta så att dess läge vid tiden t $(0 \leq t \leq \pi)$ ges av

$$\begin{cases} r = 1 \\ \theta = \frac{1}{2}(\pi - t) \\ \varphi = 2t \end{cases}$$

Bestäm partikelns hastighetsvektor och accelerationsvektor refererad till det lokala basvektorsystemet $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e}_\varphi$.

De totala differentialerna av de sfäriska basvektorerna är:

$$\begin{aligned} d\mathbf{e}_r &= \mathbf{e}_\theta d\theta + \sin\theta\,\mathbf{e}_\varphi d\varphi, \\ d\mathbf{e}_\theta &= -\mathbf{e}_r d\theta + \cos\theta\,\mathbf{e}_\varphi d\varphi, \\ d\mathbf{e}_\varphi &= -\sin\theta\,\mathbf{e}_r d\varphi - \cos\theta\,\mathbf{e}_\theta d\varphi. \end{aligned}$$

Svar och lösningsanvisningar

1. 1 -

2. 2 -

3. 3

   a) $(x, y, z)/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

   b) $|x|(x, y, z)/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

   c) $-(x, y, z)$

   d) $3|xy|(1, 2, 3x)/\sqrt{5 + 9x^2}$

4. 4

   a) Avståndet $= \sqrt{a^2 \cos^2 \omega t + b^2 \sin^2 \omega t}$

   b) $\mathbf{v} = (-a\omega \sin \omega t, b\omega \cos \omega t)$ $\mathbf{a} = -(a\omega^2 \cos \omega t, b\omega^2 \sin \omega t) = -\omega^2 \mathbf{r}$

5. 5

   a) $(1, 1, 1)/\sqrt{3}$

   b) $(-2x, -2y, 1)/\sqrt{1 + 4z}$

   c) $(x, 0, z)$

   d) $(-x/z, -y/z, 1)/\sqrt{2}$

   e) $(x/a, y/b, z/c)$

   f) $(u + v, v - u, -2)/\sqrt{(u + v)^2 + (v - u)^2 + 4}$

6. 6 b) Två plan som har olika värden på d är parallella, och har därför samma enhetsnormal.

7. 7 Normalriktningen: $(0, -1, 1/5)$; Tangentplanets ekvation: $-10y + 2z + 25 = 0$

8. 8 En konyta; $\mathbf{n} = (0, 1, 1)/\sqrt{2}$; ej definierad (konens spets).

9. 9 $\dfrac{d(R^2)}{du} = 2\mathbf{R} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{R}) = 0$, dvs. $R^2 =$ konstant.

10. 10 $\mathbf{r} = (u^2/4, u, u^2 + u^4/16), \quad u : 0 \to 2, \quad \mathbf{t} = (1/2, 1, 9/4).$

11. 11

    a) $\mathbf{r} = (\sqrt{6}\cosh u, \sqrt{3}\sinh u, v)$ eller $\mathbf{r} = (\pm\sqrt{6 + 2u^2}, u, v)$.
    b) $\mathbf{r} = (u, v, (u^2 - 2v^2)/2)$.

12. 12 $\mathbf{r} = (2, 1, 1) + u(-2, 2, 1), \quad -2x + 2y + z = -1.$

13. 13

    a) $(1, 1, 1)$
    b) $(1, 2, 3)$
    c) $-(1, 1, 1)/(x + y + z)^2$
    d) $3(x + y + z)^2(1, 1, 1)$
    e) $2(x, y, z) = 2\mathbf{r}$
    f) $(x, y, z)/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
    g) $-2(x, y, z)/(x^2 + y^2 + z^2)^2$
    h) (yz, xz, zy)

14. 14
    $24/\sqrt{6}$

15. 15

    a) Nivåytor: $\phi = c$, gradient: $(yz, xz, xy)/2\phi$
    b) *Ledning:* Visa att $\operatorname{grad}\phi$ är ortogonal mot tangentvektorerna $\partial(x, y, c^2/xy)/\partial x$ och samma för y.

16. 16 $\operatorname{grad} f = (ye^{xy} \ln\ z, xe^{xy} \ln\ z, e^{xy}/z)$

17. 17 a) -1; b) $2/(\mathrm{e}\sqrt{3})$

18. 18 $(1, 1)$

19. 19

    a) $(2, 4, 1)$
    b) $5°\mathrm{C/s}$

20. 20 Betrakta nivåytan $\phi = x^2 - 2y^2 - 2z = 0$.
$\mathbf{n}_P = (\operatorname{grad}\phi)_P = (4, -4, -2)$. Tangentplanets ekvation blir $-2x + 2y + z = -1$.

21. 21 $\pi/2$

22. 22 $s \approx \dfrac{\Delta\phi}{|\operatorname{grad}\phi|} = \dfrac{3}{\sqrt{5}}10^{-6}$

23. 23

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{dT}{ds}\right)_{P_0} &= (\operatorname{grad} T)_{P_0} \cdot \mathbf{e} = |\operatorname{grad} T|_{P_0} \mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e} = |\operatorname{grad} T|_{P_0} \cos\alpha \\
(\operatorname{grad} T)_{P_0} &= (4, -1, -2) \\
\mathbf{e}_0 &= \left(\frac{\operatorname{grad} T}{|\operatorname{grad} T|}\right)_{P_0} = \frac{(4, -1, -2)}{\sqrt{21}} \\
\left(\frac{dT}{ds}\right)_{P_0} &= -2 = |\operatorname{grad} T|_{P_0} \cos\alpha = \sqrt{21}\cos\alpha \\
\alpha &= \arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{21}}\right)
\end{aligned}
$$

24. 24

   a) 0
   b) 2π
   c) $\pi/2$
   d) $-1/2$
   e) $5/3$

25. 25 (a) 23
(b) 1

26. 26

   a) $3/2$
   b) $(8\pi^3 - 2)/3$

27. 27 $\mathbf{A} = \operatorname{grad} xy/z$, integralen $= -5/3$

28. 28

   a) $\phi = x^2yz + y + C$
   b) potential saknas

29. 29

   a) 14/3
   b) 14/3

30. 30 $\phi(-1, 10, -2) - \phi(0, 1, 0) = -11$

31. 31

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} &= \int_C \{(\mathbf{b} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{a} \cdot d\mathbf{r}) + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{b} \cdot d\mathbf{r}) + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r})\} = \\
&= \int_C d\{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{r}) + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\frac{r^2}{2}\} = \\
&= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}) + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\frac{b^2}{2} - [(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}) + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\frac{a^2}{2}] = \\
&= \frac{3}{2}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(b^2 - a^2)
\end{aligned}$$

ty $\mathbf{r}(0) = \mathbf{a}$ och $\mathbf{r}(\pi/2) = \mathbf{b}$.

32. 32 Man inser att $\mathbf{F} = \text{grad}(xyz)$ dvs.

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

är oberoende av vägen och

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= (xyz)_P - (xyz)_0 = \left(-\frac{a}{\sqrt{2}}\right)\left(-\frac{b}{\sqrt{2}}\right) c \sinh\frac{5}{4} = \\
&= \frac{abc}{2} \sinh\frac{5}{4}
\end{aligned}$$

33. 33

   a) $-8/3$
   b) 3π
   c) $16\pi/3$
   d) 0

e) $12\pi/5$

34. 34 $4\pi R^3$

35. 35 $\dfrac{32}{3}$

36. 36 $\dfrac{\pi}{2}(\pi - 1)$

37. 37

    a) div $\mathbf{A} = 3$, rot $\mathbf{A} = 0$
    b) div $\mathbf{A} = 3$, rot $\mathbf{A} = (1, 1, 1)$
    c) div $\mathbf{A} = 0$, rot $\mathbf{A} = 0$
    d) div $\mathbf{A} = 1/x + 1/y + 1/z$, rot $\mathbf{A} = 0$
    e) div $\mathbf{A} = 0$, rot $\mathbf{A} = e^{yz}(0, y, -z) + e^{zx}(-x, 0, z) + e^{xy}(x, -y, 0)$
    f) div $\mathbf{A} = -\sin z$, rot $\mathbf{A} = (0, 0, \sin y - \sin x)$

38. 38 $(0, 0, 0)$

39. 39 0

40. 40 $-2e^{-(x^2+y^2+z^2)}(y - z, z - x, x - y)$

41. 41 $-x + z, -y + x, -z + y)$

42. 42 (a) i) a) $2y\mathbf{e}_y$, b) $2x\mathbf{e}_z$, c) 2, d) 1, e) $2xz$, f) -2$\mathbf{e}_y$
    ii) a) $y^2z^3\mathbf{e}_x+2xyz^3\mathbf{e}_y+3xy^2z^2\mathbf{e}_z$, b) $-(x+3z^2)\mathbf{e}_x+y\mathbf{e}_y-x^2\mathbf{e}_z$, c) $2xz^3+6xy^2z$, d) 3, e) $-x^2 - 2xy + y^2 + yz - x^3 + x^2y - x^2z - 3xz^2 - 3yz^2 + z^3$, f) $2(x - 3z)\mathbf{e}_y$

43. 43 Därför att $\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} = 4x/\sqrt{y}$; b) $\phi = 4x^2\sqrt{y}$

44. 44

    a) 0
    b) 8π
    c) 162π
    d) $8/3$

e) $2176\pi/15$

45. 45 54π

46. 46 $4\pi R^3$

47. 47

$$\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} &= \iiint_V \operatorname{div}\mathbf{F}\, dV = \iiint_V 3(x^2+y^2+z^2)dV = \\
&= \frac{3}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} r^2 r^2 dr \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = \frac{3}{2}4\pi\frac{R^5}{5} = \frac{6\pi}{5}R^5
\end{aligned}$$

Av symmetriskäl kan nämligen

$$\iiint_V 3r^2\, dV$$

över halvsfären sättas $= 1/2$ gånger motsvarande integral över hela sfären.

48. 48 $\dfrac{2}{3}\pi$

49. 49 S sluten, $\mathbf{A}$ kontinuerligt deriverbar, dvs. Gauss' sats kan användas.

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\mathbf{A} &= 3y^2+2y-x+2z \\
\oint\!\!\oint_S \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} &= \iiint_V (3y^2+2y-x+2z)dV
\end{aligned}$$

$x = 0$ symmetriplan till V, $-x$ antisym. m.a.p. planet $x = 0$

$z = 0$ symmetriplan till V, $2z$ antisym. m.a.p. planet $z = 0$

$$\Rightarrow \quad \iiint_V (-x+2z)dV = 0$$

V har y-axeln till rotationsaxel

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad dV &= \pi r^2(y)dy = \pi(y^2+2y)dy \\
\Rightarrow \quad \oint\!\!\oint_S \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} &= \int_0^4 (3y^2+2y)(y^2+2y)\pi\, dy = \\
&= 4^4\frac{71\pi}{15}
\end{aligned}$$

50. 50 Låt S^* vara en cirkel i xz-planet med radie $\sqrt{3}$ och centrum i origo.

$$\oint\!\!\!\oint_{S+S^*} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} = \iiint_V (2y+2x+z+8z^3)dV$$

där endast den första termen i integranden ger ett bidrag $\neq 0$. De övriga termerna är antisymmetriska antingen m.a.p. planet $x=0$ eller m.a.p planet $z=0$, och V är symmetrisk med avseende på båda dessa plan.

Som integrationselement väljs en tunn cirkulär skiva med tjockleken dy på avståndet y från xz-planet, dvs.

$$dV = \pi(4-(y-1)^2)dy$$

$$\iint_{S^*}(x^2,2,2z^4)\cdot(0,-1,0)dS = -2\pi(\sqrt{3})^2 = -6\pi$$

$$\iint_S = \iiint_V - \iint_{S^*} = \frac{45}{2}\pi - (-6\pi) = \frac{57}{2}\pi$$

51. 51

$$\begin{aligned}\oint\!\!\!\oint_S (2x+x^3z)\hat{\mathbf{n}}\,dS &= \{\text{"Gauss' sats"}\} = \iiint_V (2+3x^2z,0,x^3)dV = \\ &= \{\text{symmetri i } x,\ z\} = \iiint_V (2,0,0)dV = \\ &= \left(\frac{8\pi}{3},0,0\right)\end{aligned}$$

52. 52

$$\begin{aligned}0 &= \oint\!\!\!\oint_S x\mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} = \{\text{Gauss' sats}\} = \iiint_V \nabla\cdot(x\mathbf{A})dV = \\ &= \iiint_V [\underbrace{(\nabla x)}_{\mathbf{e}_x}\cdot\mathbf{A} + x\underbrace{\nabla\cdot\mathbf{A}}_{=0}]dV = \mathbf{e}_x\cdot\iiint_V \mathbf{A}\,dV\end{aligned}$$

Således är x-komponenten av den sökta integralen $= 0$. På analogt sätt visas att även y- och z-komponenterna är $= 0$.

53. 53

$$\oint\!\!\!\oint_S \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \operatorname{div}\mathbf{A}\,dV = \iiint_V 3(x^2+y^2+(z-1)^2)dV$$

Byt variabler $x'=x$, $y'=y$, $z'=z-1$, samt inför $r'=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}$:

$$3\iiint_{r'\leq 1} r'^2 dV = \{dV = 4\pi r'^2 dr'\} = \frac{12\pi}{5}$$

54. 54 S omsluter det område i vilket $\operatorname{div}\operatorname{grad}\phi > 0$, dvs. sfären

$$x^2 + y^2 + z^2 < \frac{3}{10}$$

Maximala flödet $= 12\pi\sqrt{30}/125$.

55. 55

    a) -2π
    b) $1/6$
    c) $3/4$

56. 56 13/12

57. 57 $-\pi$

58. 58 $-\dfrac{\pi\sqrt{2}}{4}$

59. 59 C är randkurva till ytan $S_1 + S_2$ där

$$\begin{array}{llll} S_1: & x = 0, & 0 \le z \le \sqrt{1-y^2}, & \hat{\mathbf{n}}_1 = (-1, 0, 0) \\ S_2: & z = 0, & 0 \le x \le \min\{1+y, 1-y\}, & \hat{\mathbf{n}}_2 = (0, 0, -1) \end{array}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\mathbf{A} &= (x-2, x-y, y^2) \\ \iint_{S_1} \operatorname{rot}\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 dS_1 &= 2\frac{\pi}{2} \\ \iint_{S_2} \operatorname{rot}\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 d\mathbf{S}_2 &= \iint_{S_2} -y^2 dx\, dy = -2\int_0^1 (1-y)y^2 dy = -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

Alltså:

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \pi - \frac{1}{6}$$

60. 60

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} &= \iint_S \operatorname{rot}\mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \\ \operatorname{rot}\mathbf{A} &= a\mathbf{e}_z \end{aligned}$$

Som S kan vi välja cylinderns mantelyta plus botten. På mantelytan är $\operatorname{rot}\mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = 0$. Vi får alltså:

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{\text{botten}} a\mathbf{e}_z \cdot d\mathbf{S} = a\iint_{\text{botten}} dx\, dy = \pi a^3$$

61. 61 Eftersom rot $\mathbf{A} = (1, 1, 1)$, ger Stokes' sats tillämpad på den yta som utgörs av koordinatplanen och begränsas av ellipsoiden:

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} &= \iint_{S_1} dx\,dy + \iint_{S_2} dy\,dz + \iint_{S_3} dz\,dx = \\ &= \frac{\pi}{4}(ab + bc + ca)\end{aligned}$$

62. 62

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\mathbf{A} &= (x + 4, 2, y - 1 - z) \\ \hat{\mathbf{n}} &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0) \\ \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \iint_S (x + 6) dS = -\frac{6}{\sqrt{2}} \pi \cdot 2 \cdot 2\sqrt{2} = -24\pi\end{aligned}$$

63. 63

a) $\mathbf{r}/r = \mathbf{e}_r$

b) $2r^3(x + y + z) + 3r(x^3 + y^3 + z^3)$

c) $3r(yz^2 - zy^2, zx^2 - xz^2, xy^2 - yx^2)$

d) $(2xz + z^2, 3y^2, x^2 + 2xz)$

e) 0

f) $(x^2 - 2zy - 3z^2, -2yz - 2xy, -3x^2 - 2xy + z^2)$

g) (z^2, y^2, x^2) (här finns ingen indexräkning att göra!)

h) $(x^2 - z^2)(-1, 0, 1)$

64. 64

a)

$$\begin{aligned}[\nabla \times (\phi\mathbf{A})]_i &= \epsilon_{ijk}\partial_j(\phi A_k) = \\ &= \epsilon_{ijk}(\partial_j\phi)A_k + \phi\epsilon_{ijk}(\partial_j A_k) = \\ &= [\operatorname{grad}\phi \times \mathbf{A} + \phi \operatorname{rot}\mathbf{A}]_i\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}[\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B})]_i &= \epsilon_{ijk}\partial_j(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_k = \\ &= \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm}\partial_j(A_l B_m) = \\ &= (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})((\partial_j A_l)B_m + A_l(\partial_j B_m)) = \\ &= (\partial_m A_i)B_m + A_i(\partial_m B_m) - (\partial_l A_l)B_i - A_j(\partial_j B_i) = \\ &= [(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + \mathbf{A}\operatorname{div}\mathbf{B} - \mathbf{B}\operatorname{div}\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B}]_i\end{aligned}$$

c) $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = \partial_i \epsilon_{ijk} \partial_j A_k = 0$

d)

$$\begin{aligned}
[(\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \cdot (\nabla \times \mathbf{A})]_i &= (\epsilon_{ijk} B_j C_k)(\epsilon_{ilm} \partial_l A_m) = \\
&= (\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}) B_j C_k (\partial_l A_m) = \\
&= B_l C_k (\partial_l A_k) - B_m C_l (\partial_l A_m) = \\
&= [\mathbf{C} \cdot (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \cdot \nabla)\mathbf{A}]_i
\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}
[(\mathbf{B} \cdot \nabla)(\phi \mathbf{A})]_i &= B_j \partial_j (\phi A_i) = \\
&= B_j (\partial_j \phi) A_i + \phi B_j (\partial_j A_i) = \\
&= [\mathbf{A}(\mathbf{B} \cdot \nabla \phi) + \phi (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A}]_i
\end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned}
[(\mathbf{B} \cdot \nabla)(\mathbf{A} \times \mathbf{B})]_i &= B_j \partial_j (\epsilon_{ikl} A_k B_l) = \\
&= \epsilon_{ikl} B_j \{(\partial_j A_k) B_l + A_k (\partial_j B_l)\} = \\
&= -\epsilon_{ilk} B_l B_j \partial_j A_k + \epsilon_{ikl} A_k B_j \partial_j B_l = \\
&= [-\mathbf{B} \times (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B}]_i
\end{aligned}$$

g)

$$\begin{aligned}
[\mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{A})]_i &= \epsilon_{ijk} A_j (\nabla \times A)_k = \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} A_j \partial_l A_m = \\
&= (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}) A_j \partial_l A_m = \\
&= A_m \partial_i A_m - A_j \partial_j A_i = \frac{1}{2}\partial_i (A_m A_m) - A_j \partial_j A_i = \\
&= [\frac{1}{2}\,\mathrm{grad}\, A^2 - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{A}]_i
\end{aligned}$$

h)

$$\begin{aligned}
[(\mathbf{A} \times \nabla) \times \mathbf{A}]_i &= = \epsilon_{ijk} (\nabla \times A)_j A_k \\
&= \epsilon_{ijk}\epsilon_{jlm} A_l \partial_m A_k = (\delta_{kl}\delta_{im} - \delta_{km}\delta_{il}) A_l \partial_m A_k = \\
&= A_k \partial_i A_k - A_i \partial_k A_k = \\
&= [\frac{1}{2}\,\mathrm{grad}\, A^2 - \mathbf{A}\,\mathrm{div}\,\mathbf{A}]_i \quad \text{(jfr g)}
\end{aligned}$$

65. 65 a-g saknas

h) alt. I:

$$\begin{aligned}
[\mathrm{rot}((\mathbf{a} \times \mathbf{r}) \times \mathbf{b})]_i &= \epsilon_{ijk} \partial_j ((\mathbf{a} \times \mathbf{r}) \times \mathbf{b})_k = \\
&= \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} \partial_j (\mathbf{a} \times \mathbf{r})_l b_m = \\
&= \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm}\epsilon_{lpq} a_p b_m \partial_j r_q = \\
&= (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}) \epsilon_{lpq} a_p b_m \partial_j r_q = \\
&= \epsilon_{ipq} a_p b_m \partial_m r_q - \epsilon_{jpq} a_p b_i \partial_j r_q = \\
&= \epsilon_{ipq} a_p b_m \delta_{mq} - \epsilon_{jpq} a_p b_i \delta_{jq} = [\mathbf{a} \times \mathbf{b}]_i
\end{aligned}$$

h) alt. II:

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}((\mathbf{a}\times\mathbf{r})\times\mathbf{b}) &= \{(8.24)\} = (\mathbf{b}\cdot\nabla)(\mathbf{a}\times\mathbf{r}) - \mathbf{b}(\nabla\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{r})) = \\
&= \{\text{ex. 64 f) och (8.23)}\} = \\
&= \mathbf{a}\times(\mathbf{b}\cdot\nabla)\mathbf{r} + \mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot(\nabla\times\mathbf{r})) = \mathbf{a}\times\mathbf{b}
\end{aligned}$$

ty

$$(\mathbf{b}\cdot\nabla)\mathbf{r} = \left(b_x\frac{\partial}{\partial x} + b_y\frac{\partial}{\partial y} + b_z\frac{\partial}{\partial z}\right)(x,y,z) = (b_x,b_y,b_z) = \mathbf{b}$$

och

$$\nabla\times\mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

h) alt. III:

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}((\mathbf{a}\times\mathbf{r})\times\mathbf{b}) &= \operatorname{rot}(\mathbf{b}\times(\mathbf{r}\times\mathbf{a})) = \operatorname{rot}((\mathbf{b}\cdot\mathbf{a})\mathbf{r} - (\mathbf{b}\cdot\mathbf{r})\mathbf{a}) = \\
&= \{(8.22)\} = (\mathbf{b}\cdot\mathbf{a})\underbrace{(\nabla\times\mathbf{r})}_{=\mathbf{0}} - (\nabla(\mathbf{b}\cdot\mathbf{r}))\times\mathbf{a} = \\
&= -\mathbf{b}\times\mathbf{a}
\end{aligned}$$

ty

$$\nabla(\mathbf{b}\cdot\mathbf{r}) = \left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)(b_x x + b_y y + b_z z) = (b_x,b_y,b_z) = \mathbf{b}$$

eller

$$\nabla(\mathbf{b}\cdot\mathbf{r}) = \{(8.25)\} = \underbrace{(\mathbf{b}\cdot\nabla)\mathbf{r}}_{=\mathbf{b}} + \mathbf{b}\times\underbrace{(\nabla\times\mathbf{r})}_{=\mathbf{0}}$$

66. 66

a)

$$[\operatorname{grad}(\mathbf{a}\cdot\operatorname{grad}\phi)]_i = \partial_i(a_j\partial_j\phi) = a_j\partial_i\partial_j\phi = [(\mathbf{a}\cdot\nabla)\nabla\phi]_i$$

b)

$$\begin{aligned}
[\operatorname{rot}(\mathbf{a}\times\operatorname{grad}\phi)]_i &= \epsilon_{ijk}\partial_j(\mathbf{a}\times\nabla\phi)_k = \\
&= \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm}\partial_j(a_l\partial_m\phi) = \\
&= (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})a_l\partial_j\partial_m\phi = \\
&= a_i\partial_m\partial_m\phi - a_l\partial_l\partial_i\phi = [\mathbf{a}\underbrace{\nabla^2\phi}_{=0} - (\mathbf{a}\cdot\nabla)\nabla\phi]_i
\end{aligned}$$

Alltså: $\mathbf{A} = -\mathbf{B} = (\mathbf{a}\cdot\nabla)\nabla\phi$

c) Med

$$\nabla\phi = \mathbf{e}_x yz + \mathbf{e}_y xz + \mathbf{e}_z xy$$

blir

$$\mathbf{A} = \mathbf{e}_x(a_y z + a_z y) + \mathbf{e}_y(a_x z + a_z x) + \mathbf{e}_z(a_x y + a_y x)$$

67. 67
$$\mathbf{A} = (\nabla r^k) \times (\mathbf{r} \times \mathbf{a}) + r^k \nabla \times (\mathbf{r} \times \mathbf{a})$$
där
$$\begin{aligned}
\nabla r^k &= k r^{k-1} \mathbf{e}_r = k r^{k-2} \mathbf{r} \\
\nabla \times (\mathbf{r} \times \mathbf{a}) &= \underbrace{(\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{r}}_{\mathbf{a}} - \mathbf{a} \underbrace{(\nabla \cdot \mathbf{r})}_{3} = -2\mathbf{a} \\
\Rightarrow \quad \mathbf{A} &= k r^{k-2} \underbrace{\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{a})}_{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r} - r^2 \mathbf{a}} - r^k 2\mathbf{a} = \\
&= k r^{k-2} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} - (k+2) r^k \mathbf{a}
\end{aligned}$$
$$\mathbf{A} \parallel \mathbf{r} \quad \Rightarrow k = -2$$

68. 68 0

69. 69 Enligt Stokes' sats är
$$\oint_C \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times (\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{r})) \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS$$
där vi kan välja S så att $\hat{\mathbf{n}} \parallel \mathbf{c}$ om C ligger på en nivåyta till ϕ.
$$\begin{aligned}
\nabla \times (\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{r})) &= \nabla \times ((\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{r}) = \\
&= \underbrace{\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})}_{=\mathbf{a}} \times \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \underbrace{\nabla \times \mathbf{r}}_{=\mathbf{0}} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}
\end{aligned}$$
Linjeintegralen är noll om och endast om $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = 0$, dvs. om och endast om $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ och $\mathbf{c}$ ligger i samma plan.

70. 70
$$\nabla \times \mathbf{A} = k \underbrace{(\mathbf{B}_0 \cdot \nabla)\mathbf{r}}_{=\mathbf{B}_0} - k\mathbf{B}_0 \underbrace{(\nabla \cdot \mathbf{r})}_{=3} + \underbrace{\nabla \times \nabla \psi}_{=\mathbf{0}} = -2k\mathbf{B}_0$$
Alltså: $\mathbf{B}_0 = \operatorname{rot} \mathbf{A}$ om vi väljer $k = -1/2$.

71. 71 $\mathbf{v}(\mathbf{r}) \perp \hat{\mathbf{n}}$ och $\mathbf{r}$.
$$|\mathbf{v}(\mathbf{r})| = \omega r \sin\theta$$
$\boldsymbol{\omega}$, $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ bildar ett högersystem, dvs.
$$\begin{aligned}
\mathbf{v}(\mathbf{r}) &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \\
\operatorname{rot} \mathbf{v} &= \operatorname{rot}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \underset{\cdot}{\mathbf{r}}) = \\
&= -(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{r} + \boldsymbol{\omega}(\nabla \cdot \mathbf{r}) = -\boldsymbol{\omega} + 3\boldsymbol{\omega} = 2\boldsymbol{\omega}
\end{aligned}$$

72. 72

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\oiint_S d\mathbf{S}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{r}) &= \{\text{Gauss' universalsats}\} = \\
&= \frac{1}{2}\iiint_V \nabla\times(\mathbf{a}\times\mathbf{r})dV = \\
&= \frac{1}{2}\iiint_V (\mathbf{a}(\nabla\cdot\mathbf{r})-(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{r})dV = \\
&= \frac{1}{2}\iiint_V 2\mathbf{a}\,dV = \mathbf{a}V
\end{aligned}$$

73. 73 Linjeintegralens i:e komponent =

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{e}_i\cdot\oint_C \mathbf{r}\times d\mathbf{r} = \oint_C (\mathbf{e}_i\times\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} = \\
&= \iint_S \underbrace{\mathrm{rot}(\mathbf{e}_i\times\mathbf{r})}_{2\mathbf{e}_i}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS = \mathbf{e}_i\cdot\iint_S 2\hat{\mathbf{n}}\,dS
\end{aligned}$$

74. 74 Den i:e komponenten av V.L. är =

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{e}_i\cdot\iiint_V \mathbf{r}\times\mathrm{rot}\,\mathbf{A}\,dV = \iiint_V \mathrm{rot}\,\mathbf{A}\cdot(\mathbf{e}_i\times\mathbf{r})dV = \\
&= \iiint_V [\mathrm{div}(\mathbf{A}\times(\mathbf{e}_i\times\mathbf{r}))+\mathbf{A}\cdot\mathrm{rot}(\mathbf{e}_i\times\mathbf{r})]dV = \\
&= \oiint_S \cdots + \iiint_V \mathbf{A}\cdot 2\mathbf{e}_i\,dV = 0+\mathbf{e}_i\cdot 2\iiint_V \mathbf{A}\,dV =
\end{aligned}$$

= i:e komponenten av H.L.

75. 75

$$\begin{aligned}
\iiint_V (\nabla\phi)\cdot\mathbf{B}\,dV &= \iiint_V (\nabla\cdot(\phi\mathbf{B})-\phi\underbrace{\nabla\cdot\mathbf{B}}_{=0})dV = \oiint_S \phi\mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} = \\
&= \phi_0\oiint_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} = \phi_0\iiint_V \nabla\cdot\mathbf{B}\,dV = 0
\end{aligned}$$

76. 76 Med hjälp av Gauss' universalsats erhålls

$$\begin{aligned}
\oiint_S (\mathbf{a}\times\mathbf{r})\times d\mathbf{S} &= -\iiint_V \underbrace{\mathrm{rot}(\mathbf{a}\times\mathbf{r})}_{2\mathbf{a}}\,dV = \\
&= -2\mathbf{a}\iiint_V dV = -\frac{8}{3}\pi\mathbf{a}
\end{aligned}$$

77. 77
$$\oint_C (\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})d\mathbf{r} = \iint_S d\mathbf{S}\times\underbrace{\mathrm{grad}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})}_{=\mathbf{a}} = -\mathbf{a}\times\underbrace{\iint_S d\mathbf{S}}_{\pm(\mathbf{b}/b)\pi} = \pm\pi\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{a}}{b}$$

78. 78 $\frac{4\pi}{3}(0,2,-5)$

79. 79 $(-\pi,0,0)$. Observera att S ej är sluten, varför man måste dra bort bidragen från de plana ändytorna då man använder en integralsats.

80. 80 i:e komponenten =
$$\begin{aligned} &= \mathbf{e}_i\cdot\oiint_S (\mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}})\mathbf{B}\,dS = \oiint_S (\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{B})\mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS = \\ &= \iiint_V \mathrm{div}(B_i\mathbf{A})dV = \ldots = \mathbf{e}_i\cdot\iiint_V [(\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} + \mathbf{B}\,\mathrm{div}\,\mathbf{A}]dV \end{aligned}$$
$\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$ ska vara kontinuerliga i $V\cup S$ samt kontinuerligt deriverbara i V.

81. 81
$$\mathrm{div}\,\mathbf{A} = 7$$
Denna ekvation har partikulärlösningen
$$\mathbf{A}_p = 7x\mathbf{e}_x$$
Ansätt den allmänna lösningen
$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_p + \mathbf{R}$$
där $\mathbf{R}$ satisfierar
$$\mathrm{div}\,\mathbf{R} = 0$$
Alltså: $\mathbf{R} = \mathrm{rot}\,\mathbf{B}$ där $\mathbf{B}$ är ett godtyckligt vektorfält.

82. 82 Integrera $\mathrm{rot}(\phi\mathbf{A}) = \ldots$ där $\phi\to\phi$, $\mathbf{A}\to\mathrm{grad}\,\psi$ eller $\phi\to\psi$, $\mathbf{A}\to\mathrm{grad}\,\phi$. I det första fallet erhålls
$$\oint_C \phi\,\mathrm{grad}\,\psi\cdot d\mathbf{r}$$
som är = 0, eftersom
$$\mathrm{grad}\,\psi\cdot d\mathbf{r} = 0$$
I det andra fallet erhålls
$$\begin{aligned} -\oint_C \psi\,\mathrm{grad}\,\phi\cdot d\mathbf{r} &= -\psi_0\oint_C \mathrm{grad}\,\phi\cdot d\mathbf{r} = \\ &= -\psi_0\iint_S \mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,\phi\cdot d\mathbf{S} = 0 \end{aligned}$$

83. 83

a) På C är

$$\begin{aligned}
\mathbf{r} &= a(\cos\varphi, \sin\varphi, 1+\cos\varphi) \\
d\mathbf{r} &= a(-\sin\varphi, \cos\varphi, -\sin\varphi)d\varphi \\
\oint_C \mathbf{r} \times d\mathbf{r} &= \\
&= a^2\left(-\int_0^{2\pi}(1+\cos\varphi)d\varphi, -\int_0^{2\pi}\sin\varphi\, d\varphi, \int_0^{2\pi} d\varphi\right) = \\
&= a^2(-2\pi, 0, 2\pi)
\end{aligned}$$

b)

$$\oint_C d\mathbf{r} \times \mathbf{r} = \iint_S (d\mathbf{S} \times \nabla) \times \mathbf{r}$$

ger

$$\oint_C \mathbf{r} \times d\mathbf{r} = \iint_S [(\nabla \cdot \mathbf{r})d\mathbf{S} - \nabla(\mathbf{r} \cdot d\mathbf{S})] = 2\iint_S d\mathbf{S}$$

Projektionen av S i xy-planet är en cirkel med radie a. Så även i yz-planet, medan projektionen i xz-planet är en rät linje.

$$\Rightarrow \quad 2\iint_S d\mathbf{S} = (-2\pi a^2, 0, 2\pi a^2)$$

84. 84

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}(\psi \operatorname{grad}\phi) &= \operatorname{grad}\psi \times \operatorname{grad}\phi + \psi \operatorname{rot}\operatorname{grad}\phi = \\
&= -\operatorname{grad}\phi \times \operatorname{grad}\psi
\end{aligned}$$

Integrera båda leden över V:

$$\begin{aligned}
\iiint_V \operatorname{grad}\phi \times \operatorname{grad}\psi\, dV &= -\iiint_V \operatorname{rot}(\psi \operatorname{grad}\phi) dV = \\
&= -\oiint_S \hat{\mathbf{n}} \times (\psi \operatorname{grad}\phi) dS = \\
&= -\psi_0 \oiint_S \hat{\mathbf{n}} \times \operatorname{grad}\phi\, dS = \\
&= -\psi_0 \iiint_V \operatorname{rot}\operatorname{grad}\phi\, dV = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

Ovanstående operationer är tillåtna om ψ har kontinuerliga förstaderivator och ϕ har kontinuerliga andraderivator i V. ψ och ϕ ska vara kontinuerliga i $V \cup S$.

85. 85 i:e komponenten av integralen är

$$
\begin{aligned}
\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{I} &= \mathbf{e}_i \cdot \oint_C \mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times d\mathbf{r}) = \oint_C \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times d\mathbf{r})) = \\
&= \oint_C ((\mathbf{r} \times d\mathbf{r}) \cdot (\mathbf{e}_i \times \mathbf{r})) = \oint_C ((\mathbf{e}_i \times \mathbf{r}) \times \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \\
&= \iint_S \underbrace{[\nabla \times ((\mathbf{e}_i \times \mathbf{r}) \times \mathbf{r})]}_{\mathbf{R}} \cdot d\mathbf{S}
\end{aligned}
$$

där

$$
\begin{aligned}
\mathbf{R} &= \nabla \times [(\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_i)\mathbf{r} - r^2 \mathbf{e}_i] = \\
&= \underbrace{\nabla(\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_i)}_{=\mathbf{e}_i} \times \mathbf{r} + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_i) \underbrace{\nabla \times \mathbf{r}}_{=\mathbf{0}} - \underbrace{\nabla r^2}_{=2\mathbf{r}} \times \mathbf{e}_i = \\
&= 3\mathbf{e}_i \times \mathbf{r}
\end{aligned}
$$

Alltså:

$$
\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{I} = \iint_S 3(\mathbf{e}_i \times \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{e}_i \cdot \iint_S 3\mathbf{r} \times d\mathbf{S}
$$

dvs.

$$
\mathbf{I} = \iint_S 3\mathbf{r} \times d\mathbf{S}
$$

86. 86

$$
\begin{aligned}
\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{M} &= -I \oint_C \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{r} \times (\mathbf{B} \times d\mathbf{r})) = \\
&= -I \oint_C (\mathbf{B} \times d\mathbf{r}) \cdot (\mathbf{e}_i \times \mathbf{r}) = -I \oint_C ((\mathbf{e}_i \times \mathbf{r}) \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{r} = \\
&= \{\text{enl. Stokes' sats}\} = -I \iint_S \underbrace{\mathrm{rot}((\mathbf{e}_i \times \mathbf{r}) \times \mathbf{B})}_{=\mathbf{A}} \cdot d\mathbf{S}
\end{aligned}
$$

Här är

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \mathrm{rot}[(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{B})\mathbf{r} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{r})\mathbf{e}_i] = \\
&= (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{B}) \underbrace{\mathrm{rot}\,\mathbf{r}}_{=\mathbf{0}} - \underbrace{\mathrm{grad}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{r})}_{=\mathbf{B}} \times \mathbf{e}_i = -\mathbf{B} \times \mathbf{e}_i
\end{aligned}
$$

vilket ger

$$
\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{M} = I \iint_S (\mathbf{B} \times \mathbf{e}_i) \cdot d\mathbf{S} = I\mathbf{e}_i \cdot \iint_S d\mathbf{S} \times \mathbf{B}
$$

Alltså:

$$
\mathbf{M} = -I\mathbf{B} \times \iint_S d\mathbf{S}
$$

I specialfallet är

$$
\mathbf{M} = \pi R^2 I \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{B}
$$

87. 87 Linjeintegralens i:e komponent =

$$= \mathbf{e}_i \cdot \oint_C \nabla \frac{1}{r} \times d\mathbf{r} = \oint_C (\mathbf{e}_i \times \nabla \frac{1}{r}) \cdot d\mathbf{r} =$$
$$= \iint_S \nabla \times (\mathbf{e}_i \times \nabla \frac{1}{r}) \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS$$

Integranden kan skrivas

$$\begin{aligned} -(\mathbf{e}_i \cdot \nabla)\nabla\frac{1}{r} + \mathbf{e}_i \nabla \cdot \nabla \frac{1}{r} &= \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\mathbf{r}}{r^3} + \mathbf{0} = \frac{\mathbf{e}_i}{r^3} - \mathbf{r}\frac{3}{r^4}\frac{x_i}{r} = \\ &= \frac{\mathbf{e}_i}{r^3} - \frac{3(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} \end{aligned}$$

Ytintegralen blir följaktligen

$$\mathbf{e}_i \cdot \iint_S \left(\frac{\hat{\mathbf{n}}}{r^3} - (\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{n}})\frac{3\mathbf{r}}{r^5} \right) dS$$

Alltså är linjeintegralen och ytintegralen lika om

$$\psi = \phi = \frac{1}{r^3}$$

88. 88 Låt S' vara en cirkelskiva parallell med xy-planet med radie 1 och centrum i $(0, 0, 1)$ och med normalen $\mathbf{e}_z$.

$$\iint_{S+S'} \phi\, d\mathbf{S} = \iiint_V \nabla\phi\, dV = \iiint_V (2z^2 + y, x, 4xz + 3z^2) dV$$

Volymsintegralerna över x, y och xz är $= 0$ av symmetriskäl. Som integrationselement i de återstående integralerna används en cirkelskiva som utskärs av de två plan ortogonala mot z-axeln på avstånden z resp. $z + dz$ från xy-planet. Cirkelskivans volym är $\pi z^2 dz$ och vi finner

$$\iiint_V z^2 dV = \int_0^1 \pi z^4 dz = \frac{\pi}{5}$$

Ytintegralen över S' blir

$$\iint_{S'} (2x + xy + 1)\mathbf{e}_z dS = \pi \mathbf{e}_z$$

Den sökta integralen blir följaktligen

$$\iint_S \phi d\mathbf{S} = \frac{\pi}{5}(2, 0, 3) - \pi(0, 0, 1) = \frac{2\pi}{5}(1, 0, -1)$$

89. 89

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad}(\rho - \cos\varphi) &= \mathbf{e}_\rho + \mathbf{e}_\varphi \frac{\sin\varphi}{\rho} \\
\operatorname{grad}(z - \rho\sin\varphi) &= -\sin\varphi\,\mathbf{e}_\rho - \cos\varphi\,\mathbf{e}_\varphi + \mathbf{e}_z
\end{aligned}$$

I den givna punkten:

$$\begin{aligned}
\pm\hat{\mathbf{n}}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_\rho + \mathbf{e}_\varphi) \\
\pm\hat{\mathbf{n}}_2 &= -\frac{1}{2}(\mathbf{e}_\rho + \mathbf{e}_\varphi) + \frac{\mathbf{e}_z}{\sqrt{2}} \\
|\hat{\mathbf{n}}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_2| &= \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \\
\Rightarrow \quad \alpha &= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

90. 90

$$\begin{aligned}
\nabla T &= 2\rho\mathbf{e}_\rho - \frac{2}{\rho}z^2\sin\varphi\cos\varphi\,\mathbf{e}_\varphi + 2z\cos^2\varphi\,\mathbf{e}_z \\
(\nabla T)_P &= 4\mathbf{e}_\rho - \frac{1}{2}\mathbf{e}_\varphi + \mathbf{e}_z \\
\frac{dT}{ds} &= (\nabla T)_P \cdot \frac{\mathbf{e}_\rho - 2\mathbf{e}_\varphi}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \\
\left(\frac{dT}{ds}\right)_{\max} &= |(\nabla T)_P| = \frac{\sqrt{69}}{2} \text{ i riktn. } (\nabla T)_P
\end{aligned}$$

91. 91 $\operatorname{div}\operatorname{grad}\phi \equiv 0$, dvs. flödet $= 0$ om ytan ej skär z-axeln där fältet är singulärt.

92. 92 Potentialen ϕ bestäms av ekvationssystemet

$$\frac{\partial\phi}{\partial\rho} = z^2\sin^2\varphi \tag{1}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi} = z^2\sin 2\varphi - \frac{z}{\rho}\sin\varphi \tag{2}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = \cos\varphi + 2\rho z\sin^2\varphi \tag{3}$$

(1) har lösningen

$$\phi = \rho z^2\sin^2\varphi + F(\varphi, z) \tag{4}$$

(4) → (2) ger:

$$\frac{\partial F}{\partial\varphi} = -z\sin\varphi$$

som har lösningen

$$F = z\cos\varphi + G(z) \tag{5}$$

$(4,5) \to (3)$ ger slutligen:

$$\frac{dG}{dz} = 0$$

dvs.

$$G = C \quad \text{(konst.)}$$

$$\phi(\rho,\varphi,z) = \rho z^2 \sin^2\varphi + z\cos\varphi + C$$

$$\int_P^Q \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \phi(5,\frac{\pi}{2},-1) - \phi(1,\frac{\pi}{6},1) = \frac{19}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

93. 93

$$\begin{aligned} \nabla^2\mathbf{A} &= \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{A} - \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A} = \\ &= \operatorname{grad} 0 - \operatorname{rot}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho f)\mathbf{e}_z\right) = \\ &= \frac{d}{d\rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}(\rho f)\right)\mathbf{e}_\varphi = \mathbf{0} \end{aligned}$$

ger

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}(\rho f) &= a \\ \rho f &= \frac{a\rho^2}{2} + b \\ f &= \frac{a}{2}\rho + \frac{b}{\rho} \end{aligned}$$

94. 94 rot $\mathbf{A} \equiv \mathbf{0}$, dvs. cirkulationen $= 0$ för alla kurvor som ej omkretsar z-axeln, där fältet är singulärt.

95. 95

a) $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r} = \omega\rho\mathbf{e}_\varphi$

b)

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}(\omega\rho) = 0$$

medför att $\mathbf{v}$ har en vektorpotential.

c)

$$\operatorname{rot}\mathbf{A} = \frac{\partial A_\rho}{\partial z}\mathbf{e}_\varphi - \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\rho}{\partial\varphi}\mathbf{e}_z = \omega\rho\mathbf{e}_\varphi$$

kräver

$$\begin{cases} \dfrac{\partial A_\rho}{\partial z} = \omega\rho \\ \dfrac{\partial A_\rho}{\partial\varphi} = 0 \end{cases}$$

som ger
$$A_\rho = \omega\rho z + F(\rho)$$
där F är en godtycklig funktion.

96. 96

a)

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\mathbf{B} &= \frac{I\mu_0}{2\pi}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\rho}\right) = 0 \\
\operatorname{rot}\mathbf{A} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z(\rho)}{\partial\rho}\rho\mathbf{e}_\varphi = \mathbf{B} = \frac{I\mu_0}{2\pi}\frac{\mathbf{e}_\varphi}{\rho} \\
\Rightarrow \quad A_z(\rho) &= -\frac{I\mu_0}{2\pi}\ln\rho + C
\end{aligned}$$

b) $\operatorname{rot}\mathbf{B} = \mathbf{0}$ visas enkelt.
Betrakta en cirkel, Γ, som är koncentrisk med cylindern och som har radien $R_1 > R$.

$$\oint_\Gamma \mathbf{B}\cdot d\mathbf{r} = \{d\mathbf{r} = R_1 d\varphi\,\mathbf{e}_\varphi \text{ på } \Gamma\} = \frac{I\mu_0}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R_1 d\varphi}{R_1} = I\mu_0 \neq 0$$

(Det område som Γ omsluter är inte enkelt sammanhängande.)

97. 97

$$\begin{cases}
\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A}) = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A} \\
\nabla\cdot\mathbf{e}_\varphi = 0 \\
\nabla\times\mathbf{e}_\varphi = \frac{1}{\rho}\mathbf{e}_z \\
\nabla\times\left(\frac{1}{\rho}\mathbf{e}_z\right) = \frac{\mathbf{e}_\varphi}{\rho^2}
\end{cases}$$

ger
$$\nabla^2\mathbf{e}_\varphi = -\frac{\mathbf{e}_\varphi}{\rho^2}$$

98. 98

a)

$$\nabla\psi = \mathbf{e}_r\frac{\partial\psi}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = \frac{2\cos\theta}{r^3}\mathbf{e}_r + \frac{\sin\theta}{r^3}\mathbf{e}_\theta$$

b)

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{A} &= \frac{1}{r^2 \sin\theta} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r\mathbf{e}_\theta & r\sin\theta\,\mathbf{e}_\varphi \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \theta} & \dfrac{\partial}{\partial \varphi} \\ 0 & 0 & \dfrac{\sin^2\theta}{r} \end{vmatrix} = \\
&= \frac{1}{r^2 \sin\theta} \left(\mathbf{e}_r \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r} + r\mathbf{e}_\theta \frac{\sin^2\theta}{r^2} \right) = \\
&= \frac{2\cos\theta}{r^3}\mathbf{e}_r + \frac{\sin\theta}{r^3}\mathbf{e}_\theta = \nabla\psi
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \nabla\psi &= \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \\
\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) &= \nabla \times (\nabla\psi) = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

99. 99

a) $\nabla^2 \mathbf{A} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{A} - \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A}$

b) Man erhåller $\operatorname{rot}\mathbf{e}_r = \mathbf{0}$ och $\operatorname{div}\mathbf{e}_r = 2/r$.

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{e}_r = -\frac{2}{r^2}\mathbf{e}_r \quad \Rightarrow \quad \nabla^2\mathbf{e}_r = -\frac{2}{r^2}\mathbf{e}_r$$

c) Man finner att

$$\operatorname{div}\mathbf{e}_\varphi = 0$$

Vidare är

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}\mathbf{e}_\varphi &= \frac{1}{r}\cot\theta\,\mathbf{e}_r - \frac{1}{r}\mathbf{e}_\theta \\
\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{e}_\varphi &= -\frac{1}{r^2}\mathbf{e}_\varphi \frac{d}{d\theta}(\cot\theta) = \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\mathbf{e}_\varphi \\
\Rightarrow \quad \nabla^2\mathbf{e}_\varphi &= -\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\mathbf{e}_\varphi
\end{aligned}$$

100. 100

$$\begin{aligned}
\mathbf{n}_P &= \operatorname{grad} r(3+\cos\theta) = (3+\cos\theta)\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}r(-\sin\theta)\mathbf{e}_\theta \\
\mathbf{r}_P &= r\mathbf{e}_r \\
\cos\alpha &= \frac{\mathbf{n}_P \cdot \mathbf{r}_P}{|\mathbf{n}_P||\mathbf{r}_P|} = \frac{3+\cos\theta}{\sqrt{(3+\cos\theta)^2 + \sin^2\theta}} \\
\alpha &= \arccos\frac{3+\cos\theta}{\sqrt{10+6\cos\theta}}
\end{aligned}$$

101. 101

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} p &= 2r\sin\theta\cos\varphi\,\mathbf{e}_r + r\cos\theta\cos\varphi\,\mathbf{e}_\theta - r\sin\varphi\,\mathbf{e}_\varphi \\ (\operatorname{grad} p)_P &= 2\sqrt{2}\mathbf{e}_r - \sqrt{2}\mathbf{e}_\varphi \end{aligned}$$

Riktningsderivatan i den givna riktningen är

$$\begin{aligned} \frac{dp}{ds} &= (2\sqrt{2}\mathbf{e}_r - \sqrt{2}\mathbf{e}_\varphi)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_r + \mathbf{e}_\varphi) = 1 \\ \left(\frac{dp}{ds}\right)_{\max} &= |\operatorname{grad} p| = \sqrt{10} \end{aligned}$$

om riktningen är $\parallel \operatorname{grad} p$.

102. 102

$$\begin{aligned} (\nabla T)_P &= -\frac{1}{2}\mathbf{e}_r - \frac{1}{8}\mathbf{e}_\theta \\ \frac{dT}{ds} &= (\nabla T)_P\cdot\frac{\mathbf{e}_r + \mathbf{e}_\varphi}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \left(\frac{dT}{ds}\right)_{\max} &= |(\nabla T)_P| = \frac{1}{8}\sqrt{17} \end{aligned}$$

i riktningen $-4\mathbf{e}_r - \mathbf{e}_\theta$.

103. 103

$$\operatorname{grad}\phi = \mathbf{A}$$

dvs.

$$\frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{3\cos^2\theta - 1}{r^4} \qquad (1)$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} = \frac{\sin 2\theta}{r^4} \qquad (2)$$

$$\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi} = 0 \qquad (3)$$

$$(3) \quad \Rightarrow \quad \phi = \phi(r,\theta)$$

$$(1) \quad \Rightarrow \quad \phi = -\frac{3\cos^2\theta - 1}{3r^3} + F(\theta) \qquad (4)$$

(4) insatt i (2) ger:

$$\frac{6\cos\theta\sin\theta}{3r^4} + \frac{1}{r}F'(\theta) = \frac{\sin 2\theta}{r^4} \quad \Rightarrow \quad F(\theta) = C$$

$$\int_P^Q \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \phi(Q) - \phi(P) = \frac{1}{81} - \left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{29}{162}$$

104. 104

a) $\operatorname{rot} \mathbf{F} = \mathbf{0}$

b)

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\cos 3\theta}{r^4 \sin\theta}$$

c) Ja, eftersom $\operatorname{rot} \mathbf{F} = \mathbf{0}$. $\operatorname{grad} \psi = \mathbf{F}$ ger

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \psi}{\partial r} = -\dfrac{1}{r^3} \sin 2\theta \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \psi}{\partial \theta} = \dfrac{1}{r^3} \cos 2\theta \end{cases}$$

vilket ger

$$\psi = \frac{1}{2}\frac{\sin 2\theta}{r^2} + C$$

105. 105

$$\operatorname{rot}(A_\varphi \mathbf{e}_\varphi) = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\varphi \sin\theta)\mathbf{e}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi)\mathbf{e}_\theta = \frac{\mathbf{e}_r}{r^2}$$

ger

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\varphi \sin\theta) = \frac{1}{r} \qquad (1)$$

$$rA_\varphi = F(\theta, \varphi) \qquad (2)$$

Om (2) sätts in i (1) fås

$$\frac{\partial}{\partial\theta}(F\sin\theta) = \sin\theta$$

dvs.

$$F\sin\theta = -\cos\theta + G(\varphi)$$

$$\operatorname{div}(A_\varphi \mathbf{e}_\varphi) = \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}(rA_\varphi) = 0$$

ger A_φ oberoende av φ, dvs.

$$G(\varphi) = \text{konst.}$$

Alltså:

$$\mathbf{A} = \frac{C - \cos\theta}{r\sin\theta}\mathbf{e}_\varphi$$

vilket ej är definierat på z-axeln.

106. 106 Eftersom rotationen av vektorfältet $\equiv \mathbf{0}$, och området är enkelt sammanhängande, existerar en potential ϕ. Man finner

$$\phi = \ln r + \varphi + C$$

där man måste välja variationsområdet för φ så att $-\pi \le \varphi \le \pi$ för att potentialen ska bli kontinuerlig.

Linjeintegralen =

$$= \nabla^2\phi = \ln 3 - \pi$$

107. 107

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \sin\theta\,\mathbf{e}_\theta + \sin\theta\,\mathbf{e}_\varphi \quad \Rightarrow \quad \operatorname{rot}\mathbf{A} = \frac{2\cos\theta}{r}\mathbf{e}_r - \ldots \\
\oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} &= \iint_S \operatorname{rot}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} = \\
&= \{S \text{ är sfärytan, } d\mathbf{S} = r^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi\,\mathbf{e}_r,\ r=1\} = \\
&= \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2} 2\sin\theta\cos\theta\,d\theta = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

förutsatt att en betraktare i origo ser en medurs orienterad kurva.

108. 108

$$\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{e}_\theta dS &= \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} (\cos\theta\cos\varphi\,\mathbf{e}_x + \cos\theta\sin\varphi\,\mathbf{e}_y - \\
&\quad - \sin\theta\,\mathbf{e}_z)\sin\theta\,d\theta\,d\varphi = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{\pi^2}{8}\right)
\end{aligned}$$

109. 109 Rotationen $= \mathbf{0}$, dvs. cirkulationen $= 0$.

110. 110 Koordinatsystemet väljs så att linjen $\theta = 0$ blir parallell med vektorn $\mathbf{a}$. I så fall gäller

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}\cdot\mathbf{r} &= ar\cos\theta \\
\mathbf{a}\times\mathbf{r} &= ar\sin\theta\,\mathbf{e}_\varphi
\end{aligned}$$

a)

$$\operatorname{grad}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}) = a\cos\theta\,\mathbf{e}_r - a\sin\theta\,\mathbf{e}_\theta = \mathbf{a}$$

b)

$$\operatorname{div}(\mathbf{a}\times\mathbf{r}) = \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}(rar\sin\theta) = 0$$

c)

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}(\mathbf{a}\times\mathbf{r}) &= \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r\mathbf{e}_\theta & r\sin\theta\mathbf{e}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\varphi} \\ 0 & 0 & ar^2\sin^2\theta \end{vmatrix} = \\
&= 2a\cos\theta\,\mathbf{e}_r - 2a\sin\theta\,\mathbf{e}_\theta = 2\mathbf{a}
\end{aligned}$$

111. 111 $-\dfrac{4\cos\theta}{r^4}\mathbf{e}_r$

112. 112

$$\begin{aligned}
\nabla^2\mathbf{e}_\theta &= \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{e}_\theta - \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{e}_\theta \\
\operatorname{div}\mathbf{e}_\theta &= \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(r\sin\theta) = \frac{1}{r}\frac{\cos\theta}{\sin\theta} \\
\operatorname{grad}\left(\frac{1}{r}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right) &= \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{r}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)\mathbf{e}_\theta = \\
&= -\frac{1}{r^2}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\mathbf{e}_r - \frac{1}{r^2}\frac{1}{\sin^2\theta}\mathbf{e}_\theta \\
\operatorname{rot}\mathbf{e}_\theta &= \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r\mathbf{e}_\theta & r\sin\theta\,\mathbf{e}_\varphi \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi} \\ 0 & r & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{r}\mathbf{e}_\varphi \\
\operatorname{rot}\left(\frac{1}{r}\mathbf{e}_\varphi\right) &= \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r\mathbf{e}_\theta & r\sin\theta\,\mathbf{e}_\varphi \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi} \\ 0 & 0 & r\sin\theta\dfrac{1}{r} \end{vmatrix} = \frac{1}{r^2}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\mathbf{e}_r
\end{aligned}$$

Alltså:

$$\nabla^2\mathbf{e}_\theta = -\frac{2}{r^2}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\mathbf{e}_r - \frac{1}{r^2}\frac{1}{\sin^2\theta}\mathbf{e}_\theta$$

113. 113

a) $\operatorname{div}\mathbf{A} = 0$ i sfären. Detta borde ge

$$\iiint \operatorname{div}\mathbf{A}dV = 0$$

medan ytintegralen

$$\oiint_S \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} = 1/R^2 \oiint_S dS = 4\pi$$

b)

$$\oiint_{S_1+S_2} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} = \oiint_{S_1} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} + \oiint_{S_2} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}$$

där den yttre sfären har utåtriktad normal medan den inre sfären har innåtriktad normal. Detta ger nettoresultatet $4\pi - 4\pi = 0$.

c) Ytan S får inte omsluta fältets singularitet i origo.

114. 114 Den första termen representerar flödet från en punktsänka, som befinner sig i området. Den ger bidraget $-4\pi q$. Den andra termen bidrar med

$$\int_{-2c}^{2c} 12pz^2 4\pi c^2 dz = 256\pi pc^5$$

115. 115 Den första termen är en punktsänka i punkten $(3, -1, 0)$, vars avstånd från sfärens medelpunkt är

$$\sqrt{(3-2)^2 + (-1-1)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{6} < 3$$

Punktsänkan ligger således inuti sfären och ger bidraget -4π. Gauss' sats ger bidraget från den andra termen:

$$\iiint_V 6xy\, dV$$

Denna integral beräknas i koordinatsystemet K' vars origo ligger i sfärens medelpunkt:

$$x' = x - 2, \qquad y' = y - 1 \qquad z' = z - 1$$

$$\iiint_V 6(x'+2)(y'+1)dV = 12V = 12\frac{4}{3}\pi 3^3 = 432\pi$$

Alltså: Flödet $= 428\pi$.

116. 116 div $\mathbf{A} = 0$. Fältet är singulärt i origo. Flödet genom en godtycklig yta som innesluter origo = flödet genom en sfär med radien ε =

$$= \frac{1}{\varepsilon^4} \iint (3\cos^2\theta - 1)\varepsilon^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = 0$$

117. 117

a) Fältet är en superposition av en linjekälla och en punktsänka. Flödet = $2\pi 2 - 4\pi = 0$.

b)

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}} &= \left(\frac{1}{\rho}\mathbf{e}_\rho - \frac{1}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}(\rho\mathbf{e}_\rho + z\mathbf{e}_z)\right)\cdot\left(\frac{\rho\mathbf{e}_\rho + z\mathbf{e}_z}{\sqrt{\rho^2+z^2}}\right) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{\rho^2+z^2}} - \frac{1}{\rho^2+z^2} = 0 \quad \text{då} \quad \rho^2+z^2 = 1
\end{aligned}$$

118. 118

a)

$$\begin{aligned}
\oiint_S \frac{1}{r}\mathbf{e}_r \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS &= \iiint_{\varepsilon \le r \le f(\theta)} \operatorname{div}\left(\frac{1}{r}\mathbf{e}_r\right) dV + \oiint_{r=\varepsilon} \frac{1}{r} dS = \\
&= \iiint_{\varepsilon \le r \le f(\theta)} \frac{1}{r^2} r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi + 4\pi\varepsilon \to \\
&\to 2\pi \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^{f(\theta)} dr = 2\pi \ln 3 \\
f(\theta) &= \frac{1}{2-\cos\theta}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_r \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS &= r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi \\
\iint \frac{1}{r} r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi &= 2\pi \ln 3
\end{aligned}$$

$\mathbf{e}_r/r^2$ skulle ge 4π.

119. 119 8π

120. 120 $\operatorname{div}\mathbf{A} = 2z$. Fältet är singulärt på z-axeln, varifrån området tillförs flödet

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{2-\sqrt{4-\varepsilon^2}}^{2+\sqrt{4-\varepsilon^2}} z\frac{\varepsilon^2-1}{\varepsilon} 2\pi\varepsilon\, dz = \int_0^4 (-2\pi z) dz = -16\pi$$

Totala flödet =

$$\iiint_V 2z\, dV - 16\pi = \frac{80\pi}{3}$$

121. 121 Cirkulationen längs kurvan

$$\rho = \rho_0, \qquad z = z_0, \qquad \varphi : 0 \to 2\pi$$

är

$$\begin{aligned}
\oint \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{t}}\, ds &= \{\hat{\mathbf{t}} = \mathbf{e}_\varphi,\ ds = \rho_0 d\varphi\} = \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{\sin\varphi}{\rho_0^2} \rho_0 d\varphi = 0
\end{aligned}$$

122. 122 En dipol består av en punktkälla och en punktsänka. Flödena från dessa adderas så lösningen följer behandlingen av punktkällan i kompendiet.

a)

$$\oiint = 4\pi q + (-4\pi q) = 0$$

b)

$$\oiint = 4\pi q + 0 = 4\pi q$$

c)

$$\oiint = 0 + 0 = 0$$

123. 123 Vi låter z-axeln vara parallell med $\mathbf{e}$ samt inför sfäriska koordinater:

$$\mathbf{A} = \frac{\sin^2\theta}{r^2}\mathbf{e}_r$$

Fältet är källfritt för $r \neq 0$ ty

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin\theta\frac{\sin^2\theta}{r^2}\right) = 0$$

Flödet ut genom S är lika stort som flödet ut genom en sfär S_ε med radien ε och medelpunkten i origo.

$$\begin{aligned}\oiint_S \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} &= \oiint_{S_\varepsilon} \frac{\sin^2\theta}{\varepsilon^2}\mathbf{e}_r\cdot d\mathbf{S} = \{d\mathbf{S} = \mathbf{e}_r\varepsilon^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi\} = \\ &= \int_0^\pi \sin^3\theta\,d\theta\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{8}{3}\pi\end{aligned}$$

124. 124 Inför cylinderkoordinater

$$\mathbf{A} = (2xz, 2yz, -x^2-y^2) = 2\rho z\mathbf{e}_\rho - \rho^2\mathbf{e}_z$$

Fältlinjernas differentialekvationer blir:

$$\frac{d\rho}{2\rho z} = -\frac{dz}{\rho^2}, \qquad d\varphi = 0$$

med lösningen:

$$\begin{cases}\rho^2 = -2z^2 + a\\ \varphi = b\end{cases}$$

För fältlinjen genom $(1,1,1)$ ($\rho = \sqrt{2}, \varphi = \pi/4, z = 1$) gäller att $a = 4$ och $b = \pi/4$.

Dess skärningspunkter med planet $x + y = 1$:

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \varphi = \frac{\pi}{4}, \qquad z = \pm\frac{\sqrt{7}}{2}$$

125. 125 Differentialekvationerna är:

$$\frac{d\rho}{\rho\cos\varphi} = \frac{\rho d\varphi}{\rho^2} = \frac{dz}{\rho\sin\varphi}$$

De satisfieras av

$$\begin{cases} \rho = a + \sin\varphi \\ z = b - \cos\varphi \end{cases}$$

För den sökta fältlinjen gäller $a = b = 2$.

$$\begin{aligned} y = 0 \quad \Rightarrow \quad & \varphi = 0 \quad \text{dvs. } \rho = 2, \quad z = 1 \text{ eller} \\ & \varphi = \pi \quad \text{dvs. } \rho = 2, \quad z = 3 \end{aligned}$$

126. 126 Den sökta fältlinjen har ekv.: $r = 4a\sin^2\theta$, $\varphi = 0$.
$r_{\max} = 4a$ för $\theta = \pi/2$.

127. 127 $\phi(x) = \phi_0 x/d$

128. 128 $\phi(r) = \phi_0(1/r - 1/R_1)/(1/R_2 - 1/R_1)$

129. 129 0 *Ledning:* Använd medelvärdessatsen.

130. 130

$$\frac{\partial d}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho v_\rho d) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}(v_\varphi d) = \kappa$$

I specialfallet erhålls:

$$d = \frac{k\rho_0}{4v_0}\left(2 - \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^2\right)$$

131. 131

$$T = T_0 + \frac{T_d - T_0}{d}x$$

132. 132

$$\begin{aligned} V &= \frac{V_2 - V_1}{\ln(R_2/R_1)}\ln(\rho/R_1) + V_1 \\ \mathbf{E} &= -\frac{V_2 - V_1}{\ln(R_2/R_1)}\frac{\mathbf{e}_\rho}{\rho} \end{aligned}$$

133. 133

$$\begin{aligned} V &= V_0 \frac{R}{r} \\ \mathbf{E} &= V_0 \frac{R}{r^2} \mathbf{e}_r \end{aligned}$$

134. 134

$$\phi = \begin{cases} -\dfrac{\gamma \rho_0}{6}(3R^2 - r^2) & 0 \le r \le R \\ -\dfrac{\gamma \rho_0 R^3}{3r} & R \le r < \pm\infty \end{cases}$$

ϕ och $\partial\phi/\partial r$ är kontinuerliga för $r = R$.

135. 135 Sätt $\psi = \phi + \varphi$, $\varphi = 0$ på S

$$\begin{aligned} &\iiint_V (\operatorname{grad}\psi)^2 dV - \iiint_V (\operatorname{grad}\phi)^2 dV = \\ &= \iiint_V (2 \operatorname{grad}\phi \cdot \operatorname{grad}\varphi + (\operatorname{grad}\varphi)^2) dV = \\ &= 2 \oint\!\!\oint_S \varphi \operatorname{grad}\phi \, d\mathbf{S} - 2 \iiint_V \varphi \nabla^2 \phi \, dV + \iiint_V (\operatorname{grad}\varphi)^2 dV = \\ &= 0 + \iiint_V (\operatorname{grad}\varphi)^2 dV \ge 0 \end{aligned}$$

136. 136

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi &= 0 \\ \mathbf{e}_z \cdot \operatorname{grad}\phi &= 0 \\ \nabla^2 \ln\rho &= 0 \\ \operatorname{grad}\ln\rho &= \frac{1}{\rho}\mathbf{e}_\rho \\ 0 &= \iiint_{\substack{\varepsilon \le \rho \le R \\ -h \le z \le h}} (\phi \nabla^2 \ln\rho - \ln\rho \nabla^2 \phi) dV = \\ &= \iint_S \left(\phi \frac{1}{\rho} - \frac{\partial\phi}{\partial\rho} \ln\rho\right) dS - \\ &\quad - \iint_{\substack{\rho = \varepsilon \\ -h \le z \le h}} \left(\phi \frac{1}{\rho} - \frac{\partial\phi}{\partial\rho} \ln\rho\right) \rho \, d\varphi \, dz \end{aligned}$$

emedan integranden $= 0$ på ytorna $z = \pm h$.

$$\begin{aligned} &2h \int_0^{2\pi} \phi(\varepsilon, \varphi) d\varphi - 2h\varepsilon \ln\varepsilon \int_0^{2\pi} \frac{\partial\phi}{\partial\rho} d\varphi = \\ &= \frac{1}{R} \iint_S \phi \, dS - \ln R \iint_S \frac{\partial\phi}{\partial\rho} dS = \\ &= \frac{1}{R} \iint_S \phi \, dS - \ln R \iiint_V \nabla^2 \phi \, dV \end{aligned}$$

Då $\varepsilon \to 0$ blir

$$\begin{aligned} 4\pi h\phi(0,-) &= \frac{1}{R}\iint_S \phi\, dS \\ \gamma &= \frac{1}{4\pi h R} \end{aligned}$$

137. 137 Lägg origo i punkten $\mathbf{r}_P$: $\mathbf{R} \equiv \mathbf{r} - \mathbf{r}_P$.

Sätt in $\phi = T$, $\psi = 1/R$ i Greens sats II:

$$\iiint_{V^*} \left(T\nabla^2 \frac{1}{R} - \frac{1}{R}\nabla^2 T \right) dV = \oiint_{S-S_\varepsilon} \left(T\nabla \frac{1}{R} - \frac{1}{R}\nabla T \right) \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS$$

Här är

$$\begin{aligned} \nabla^2 \frac{1}{R} &= 0 \\ \nabla^2 T &= -\frac{1}{k}\kappa \text{ i } V^* \\ \nabla \frac{1}{R} &= -\frac{\mathbf{e}_R}{R^2} \\ R &= \varepsilon \text{ på } S_\varepsilon \\ \hat{\mathbf{n}} &= \mathbf{e}_R \text{ på } S_\varepsilon \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \iiint_{V^*} \frac{\kappa}{kR} dV =$$

$$= \oiint_S -\frac{\theta \mathbf{e}_R \cdot \hat{\mathbf{n}}}{R^2} dS + \oiint_S \frac{\gamma}{kR} dS + \oiint_{S_\varepsilon} T \frac{\mathbf{e}_R \cdot \mathbf{e}_R}{R^2} dS + \oiint_{S_\varepsilon} \frac{1}{R} \nabla T \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS \qquad (1)$$

För de båda sista termerna i H.L. finner vi följande med hjälp av medelvärdessatsen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon^2} \oiint_{S_\varepsilon} T\, dS &= \frac{1}{\varepsilon^2} T(P') 4\pi\varepsilon^2 \to 4\pi T(P) \\ \frac{1}{\varepsilon} \oiint_{S_\varepsilon} \nabla T \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS &= \{\text{enl. Gauss' sats}\} = \frac{1}{\varepsilon} \iiint_{V_\varepsilon} \nabla^2 T\, dV = \\ &= -\frac{1}{k\varepsilon} \iiint_{V_\varepsilon} \kappa\, dV = -\frac{1}{k\varepsilon} \kappa(P'') \frac{4}{3}\pi\varepsilon^3 \to 0 \end{aligned}$$

Således blir (1) i limes då $\varepsilon \to 0$:

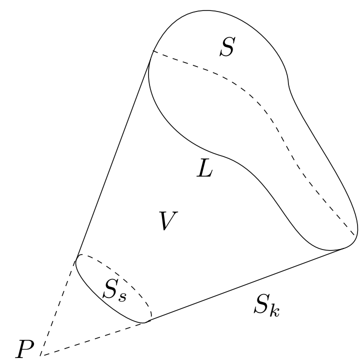
$$T(P) = \frac{1}{4\pi k} \iiint_V \frac{\kappa}{R} dV + \frac{1}{4\pi} \oiint_S \frac{\theta \mathbf{R} \cdot \hat{\mathbf{n}}}{R^3} dS - \frac{1}{4\pi k} \oiint_S \frac{\gamma}{R} dS$$

dvs.

$$a = \frac{1}{4\pi k}, \qquad b = \frac{1}{4\pi}, \qquad c = -\frac{1}{4\pi k}$$

138. 138

a) Konstruera volymen V som begränsas av dipolytan S, den av de räta linjerna från P till randkurvan L genererade ytan S_k samt S_s, som är en del av en sfäryta (radie a).



Fältet

$$\mathbf{A} = -\sigma \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_P}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_P|^3}$$

är en punktsänka i P. Således gäller

$$\oiint_{S+S_k+S_s} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = 0$$

Men

$$\iint_{S_k} = 0$$

ty $\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$ på S_k.

$$\Rightarrow \iint_S = -\iint_{S_s} = -\sigma \iint_{S_s} \frac{dS_s}{a^2} = -\sigma\Omega$$

där Ω är den rymdvinkel under vilken S_s ses, dvs. den sökta rymdvinkeln.

b) Om L upptar rymdvinkeln Ω_0 från en punkt P på dipolytan så är potentialen

$$\approx -\sigma\Omega_0$$

i en punkt omedelbart under ytan, och

$$\approx +\sigma(4\pi - \Omega_0)$$

i en punkt omedelbart över ytan

$$\Rightarrow \nabla^2\phi = 4\pi\sigma$$

139. 139 Integralen =

$$
\begin{aligned}
&= \oint_{C_1}\oint_{C_2}(r_1^2 - 2\mathbf{r}_1\cdot\mathbf{r}_2 + r_2^2)d\mathbf{r}_1\cdot d\mathbf{r}_2 = [1] = \\
&= -\oint_{C_1}\oint_{C_2} 2(\mathbf{r}_1\cdot\mathbf{r}_2)d\mathbf{r}_1\cdot d\mathbf{r}_2 = \\
&= -2\oint_{C_1} d\mathbf{r}_1\cdot\oint_{C_2}(\mathbf{r}_1\cdot\mathbf{r}_2)d\mathbf{r}_2 = [2] = \\
&= -2\oint_{C_1} d\mathbf{r}_1\cdot\iint_{S_2}\hat{\mathbf{n}}_2\times\nabla_2(\mathbf{r}_1\cdot\mathbf{r}_2)dS_2 = [3] = \\
&= -2\oint_{C_1} d\mathbf{r}_1\cdot\iint_{S_2}\hat{\mathbf{n}}_2\times\mathbf{r}_1\,dS_2 = \\
&= 2\oint_{C_1} d\mathbf{r}_1\cdot\left(\mathbf{r}_1\times\iint_{S_2}\hat{\mathbf{n}}_2\,dS_2\right) = \\
&= \left(2\oint_{C_1} d\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_1\right)\cdot\iint_{S_2}\hat{\mathbf{n}}_2\,dS_2 = [4] = \\
&= -4\iint_{S_1}\hat{\mathbf{n}}_1\,dS_1\cdot\iint_{S_2}\hat{\mathbf{n}}_2\,dS_2
\end{aligned}
$$

$[1]: \oint_{C_1}\oint_{C_2} r_1^2 d\mathbf{r}_1\cdot d\mathbf{r}_2 = \oint_{C_1} r_1^2 d\mathbf{r}_1\cdot\oint_{C_2} d\mathbf{r}_2 = 0$

[2] : Integralsatsen $\oint_C \phi\, d\mathbf{r} = \ldots$ har använts.

[3] : ∇_2 opererar bara på $\mathbf{r}_2$.

[4] : Resultatet av ex. 73 har använts.

140. 140 $\mathbf{e}_1 = (1,1,2)/h_1, \mathbf{e}_2 = (1,-3,1)/h_2, \mathbf{e}_3 = (7,1,-4)/h_3, h_1 = \sqrt{6}, h_2 = \sqrt{11}, h_3 = \sqrt{66}$

141. 141

a) $a^3bc4\pi/15$

b) $594/5$

142. 142

a)

$$
\begin{cases}
u_1 = x^2 - y^2 \\
u_2 = xy \\
u_3 = z
\end{cases}
$$

ger

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1/h_1 = \nabla u_1 = 2(x\mathbf{e}_x - y\mathbf{e}_y) \\ \mathbf{e}_2/h_2 = \nabla u_2 = y\mathbf{e}_x + x\mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_3/h_3 = \nabla u_3 = \mathbf{e}_z \end{cases}$$

Alltså:

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1 = (x\mathbf{e}_x - y\mathbf{e}_y)/\sqrt{x^2+y^2} \\ \mathbf{e}_2 = (y\mathbf{e}_x + x\mathbf{e}_y)/\sqrt{x^2+y^2} \\ \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_z \end{cases}$$

Uppenbart gäller $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$.

b)

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{2(u_1^2+4u_2^2)^{1/4}} \\ h_2 &= \frac{1}{(u_1^2+4u_2^2)^{1/4}} \\ h_3 &= 1 \end{aligned}$$

Alltså:

$$\begin{aligned} &\operatorname{div} \mathbf{A} = \\ &= 2\sqrt{u_1^2+4u_2^2}\left(\frac{\partial}{\partial u_1}\frac{A_1}{(u_1^2+4u_2^2)^{1/4}} + \frac{\partial}{\partial u_2}\frac{A_2}{2(u_1^2+4u_2^2)^{1/4}} + \right. \\ &\left. + \frac{\partial}{\partial u_3}\frac{A_3}{2\sqrt{u_1^2+4u_2^2}}\right) \end{aligned}$$

143. 143

a)

$$\begin{cases} u = \sqrt{\sqrt{x^2+y^2+z^2}+z} & 0 \le u < \infty \\ v = \sqrt{\sqrt{x^2+y^2+z^2}-z} & 0 \le v < \infty \\ \tan\varphi = y/x & 0 \le \varphi < 2\pi \end{cases}$$

b)

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{2}\left(u_0^2 - \frac{x^2+y^2}{u_0^2}\right), \quad \text{rotationsparaboloider} \\ z &= \frac{1}{2}\left(\frac{x^2+y^2}{v_0^2} - v_0^2\right), \quad \text{rotationsparaboloider} \\ y &= x\tan\varphi_0, \quad \text{halvplan genom } z\text{-axeln} \end{aligned}$$

d)

$$\operatorname{grad}\phi = \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}\left(\frac{\partial\phi}{\partial u}\mathbf{e}_u + \frac{\partial\phi}{\partial v}\mathbf{e}_v\right) + \frac{1}{uv}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\mathbf{e}_\varphi$$

e)

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_u &= \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}(v\cos\varphi, v\sin\varphi, u) \\
\mathbf{e}_v &= \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}(u\cos\varphi, u\sin\varphi, -v) \\
\mathbf{e}_\varphi &= (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)
\end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned}
\mathbf{r} &= \frac{1}{2}\operatorname{grad}(x^2+y^2+z^2) = \frac{1}{2}\operatorname{grad}\left(\frac{u^2+v^2}{2}\right)^2 = \\
&= \frac{\sqrt{u^2+v^2}}{2}(u\mathbf{e}_u + v\mathbf{e}_v) \\
\frac{\mathbf{e}_r}{r^2} &= -\operatorname{grad}\frac{1}{r} = \frac{4}{(u^2+v^2)^{5/2}}(u\mathbf{e}_u + v\mathbf{e}_v)
\end{aligned}$$

144. 144

a)

$$\begin{aligned}
\nabla u &= \mathbf{e}_r\sin^2\frac{\theta}{2} + \mathbf{e}_\theta\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \\
\nabla v &= \mathbf{e}_r\cos^2\frac{\theta}{2} - \mathbf{e}_\theta\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \\
\nabla w &= \frac{2}{r\sin\theta}\mathbf{e}_\varphi = \frac{1}{r\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}\mathbf{e}_\varphi
\end{aligned}$$

Ortogonaliteten framgår av dessa uttryck och eftersom $\mathbf{e}_i = h_i\nabla u_i$ får vi:

$$\begin{aligned}
h_u &= \frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}} = \sqrt{\frac{u+v}{u}} \\
h_v &= \frac{1}{\cos\frac{\theta}{2}} = \sqrt{\frac{u+v}{v}} \\
h_w &= r\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{uv}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\frac{uv}{(u+v)^2}\frac{1}{uv}}\left(\frac{\partial}{\partial u}\sqrt{\frac{(u^2+uv)(u+v)uv}{v}} + \right. \\
&\qquad \left. + \frac{\partial}{\partial v}\sqrt{\frac{(v^2+uv)(u+v)uv}{u}}\right) = \\
&= \frac{1}{u+v}(2u+v+2v+u) = 3
\end{aligned}$$

145. 145

a) Använd $\nabla\psi \cdot d\mathbf{r} = d\psi$ med $\psi = \phi$ och $\psi = u_i$ i uttrycket

$$d\phi = \sum_i \frac{\partial \phi}{\partial u_i} du_i$$

och vi får

$$\nabla\phi = \sum_i \frac{\partial \phi}{\partial u_i} \nabla u_i \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
\nabla^2\phi &= \sum_i \frac{\partial \phi}{\partial u_i}\nabla^2 u_i + \sum_i \nabla\left(\frac{\partial \phi}{\partial u_i}\right)\cdot\nabla u_i = \{\text{enl. (1)}\} = \\
&= \sum_i \frac{\partial \phi}{\partial u_i}\nabla^2 u_i + \sum_i\sum_j \frac{\partial^2 \phi}{\partial u_i \partial u_j}\nabla u_i\cdot\nabla u_j = \\
&= \sum_i \frac{\partial^2 \phi}{\partial u_i^2}|\nabla u_i|^2
\end{aligned}$$

Detta ger två villkor:

a) $\nabla^2 u_i = 0$

b) $\nabla u_i \cdot \nabla u_j = \delta_{ij}|\nabla u_i|^2$

b) $\nabla^2 u_i = 0$ tillämpat på u_1, u_2 och u_3 ger med det enklaste valet av integrationskonstanter:

$$\begin{aligned}
u_1 &= \frac{1}{r} \\
u_2 &= \ln\left(\tan\frac{\theta}{2}\right) \\
u_3 &= \varphi
\end{aligned}$$

Skalfaktorerna fås ur $\nabla u_i = \mathbf{e}_i/h_i$:

$$h_1^2 = \frac{1}{u_1^4}, \qquad h_2^2 = h_3^2 = \frac{1}{u_1^2\cosh^2 u_2}$$

Alltså:

$$\nabla^2\phi = u_1^4\frac{\partial^2\phi}{\partial u_1^2} + u_1^2\cosh^2 u_2\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial u_2^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial u_3^2}\right)$$

146. 146

$$\begin{aligned}
\mathbf{r} &= a(\cosh u\cos v\,\mathbf{e}_x + \sinh u\sin v\,\mathbf{e}_y) + w\mathbf{e}_z \\
\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u} &= a(\sinh u\cos v\,\mathbf{e}_x + \cosh u\sin v\,\mathbf{e}_y) \\
\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v} &= a(-\cosh u\sin v\,\mathbf{e}_x + \sinh u\cos v\,\mathbf{e}_y) \\
\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial w} &= \mathbf{e}_z
\end{aligned}$$

Tydligen ortogonala.

$$\begin{aligned} h_u &= a\sqrt{\cosh^2 u \sin^2 v + \sinh^2 u \cos^2 v} = a\sqrt{\cosh^2 u - \cos^2 v} \\ h_v &= h_u \\ h_w &= 1 \end{aligned}$$

Därför blir

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{h_u h_v}\frac{\partial}{\partial u}\frac{h_v}{h_u}\frac{\partial\phi}{\partial u} = \frac{1}{h_u h_v}\frac{\partial^2\phi}{\partial u^2}$$

$\nabla^2\phi = 0$ har därför lösningen

$$\phi = Au + B$$

Ellips 1:

$$\left.\begin{aligned} \frac{5}{4} = \cosh u \\ \frac{3}{4} = \sinh u \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad e^u = 2 \quad \Rightarrow \quad u = \ln 2$$

Ellips 2:

$$\left.\begin{aligned} \frac{5}{3} = \cosh u \\ \frac{4}{3} = \sinh u \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad e^u = 3 \quad \Rightarrow \quad u = \ln 3$$

$$\begin{cases} A\ln 2 + B = 0 \\ A\ln 3 + B = 2 \end{cases}$$

ger

$$\begin{aligned} A &= \frac{2}{\ln 3 - \ln 2} \\ B &= -\frac{2\ln 2}{\ln 3 - \ln 2} \end{aligned}$$

Alltså:

$$\phi = \frac{2}{\ln 3 - \ln 2}(u - \ln 2)$$

147. 147

a) Ur

$$\begin{cases} \xi^2 = \rho - y \\ \eta^2 = \rho + y \\ \zeta = z \end{cases}$$

har vi

$$\begin{cases} 2\xi\nabla\xi = \mathbf{e}_\rho - \mathbf{e}_y \\ 2\eta\nabla\eta = \mathbf{e}_\rho + \mathbf{e}_y \\ \nabla\zeta = \mathbf{e}_z \end{cases}$$

Alltså:

$$\begin{aligned}
\nabla\xi &= \frac{1}{h_\xi}\mathbf{e}_\xi = \frac{1}{2\xi}\frac{1}{\rho}(x\mathbf{e}_x - (\rho - y)\mathbf{e}_y) \\
\nabla\eta &= \frac{1}{h_\eta}\mathbf{e}_\eta = \frac{1}{2\eta}\frac{1}{\rho}(x\mathbf{e}_x + (\rho + y)\mathbf{e}_y)
\end{aligned}$$

Då

$$|\nabla\xi| = \frac{1}{|\xi|}\frac{1}{2\rho}\sqrt{x^2+y^2+\rho^2-2\rho y} = \frac{\sqrt{2\rho(\rho-y)}}{|\xi|2\rho} = \frac{1}{\sqrt{2\rho}}$$

ty $\rho - y = \xi^2$, har vi

$$\begin{aligned}
h_\xi &= \sqrt{\xi^2+\eta^2} \\
\mathbf{e}_\xi &= \frac{1}{\xi}\frac{1}{\sqrt{2\rho}}(\xi\eta\mathbf{e}_x - \xi^2\mathbf{e}_y) = \frac{1}{\sqrt{2\rho}}(\eta\mathbf{e}_x - \xi\mathbf{e}_y) \\
h_\eta &= \sqrt{\xi^2+\eta^2} \\
\mathbf{e}_\eta &= \frac{1}{\sqrt{2\rho}}(\xi\mathbf{e}_x + \eta\mathbf{e}_y) \\
\mathbf{e}_\zeta &= \mathbf{e}_z
\end{aligned}$$

b)

$$(a_{ij}) = \frac{1}{\sqrt{2\rho}}\begin{pmatrix} \eta & -\xi & 0 \\ \xi & \eta & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2\rho} \end{pmatrix}$$

Tydligen är basvektorerna ortogonala. Enl. a) är

$$\begin{aligned}
h_\xi &= \sqrt{\xi^2+\eta^2} = \sqrt{2\rho} \\
h_\eta &= \sqrt{\xi^2+\eta^2} \\
h_\zeta &= 1
\end{aligned}$$

varav

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\mathbf{A} &= \frac{1}{2\rho}\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\xi}{2}(3\eta^2+\xi^2)\right) + \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\eta}{2}(3\xi^2+\eta^2)\right)\right) = \\
&= \frac{1}{2\rho}\left(\frac{3}{2}(\xi^2+\eta^2) + \frac{3}{2}(\xi^2+\eta^2)\right) = 3
\end{aligned}$$

eftersom $2\rho = \xi^2 + \eta^2$.
Alternativt kan $\mathbf{A}$ transformeras till (x, y, z) där man finner

$$\mathbf{A} = (2x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y)$$

varav resultatet följer trivialt.

148. 148

$$\mathbf{r} = (r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta)$$

Bilda $v - u = 2r\cos\theta$ och $vu = r^2(1-\cos^2\theta) = r^2\sin^2\theta$.

$$\Rightarrow \quad \mathbf{r} = (\sqrt{vu}\cos w, \sqrt{vu}\sin w, (v-u)/2)$$

$$\begin{aligned} h_u &= \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right| = \frac{\sqrt{v+u}}{2\sqrt{u}} \\ h_v &= \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| = \frac{\sqrt{v+u}}{2\sqrt{v}} \\ h_w &= \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w}\right| = \sqrt{vu} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{grad}\phi = \frac{2\sqrt{u}}{\sqrt{v+u}}\frac{\partial\phi}{\partial u}\mathbf{e}_u + \frac{2\sqrt{v}}{\sqrt{v+u}}\frac{\partial\phi}{\partial v}\mathbf{e}_v + \frac{1}{\sqrt{vu}}\frac{\partial\phi}{\partial w}\mathbf{e}_w$$

Bilda $u + v = 2r$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \mathbf{r} &= \frac{1}{2}(u+v)\operatorname{grad}\frac{1}{2}(u+v) = \\ &= \frac{1}{2}(u+v)\frac{1}{2}\left(\frac{2\sqrt{u}}{\sqrt{v+u}}\mathbf{e}_u + \frac{2\sqrt{v}}{\sqrt{v+u}}\mathbf{e}_v\right) = \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{u^2+uv}\,\mathbf{e}_u + \frac{1}{2}\sqrt{v^2+uv}\,\mathbf{e}_v \end{aligned}$$

149. 149

a)

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{uv(u^2+v^2)}\left(\frac{\partial}{\partial u}\left(uv\frac{\partial\phi}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(uv\frac{\partial\phi}{\partial v}\right) + \frac{u^2+v^2}{uv}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}\right) = 0$$

b)

$$\phi = \phi(u) \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{du}\left(u\frac{d\phi}{du}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi = a\ln u + b$$

c)

$$\phi = \frac{a}{2}\ln r + \frac{a}{2}\ln(1+\cos\theta) + b$$

150. 150 Ortogonaliteten framgår av att $\partial\mathbf{r}/\partial u$, $\partial\mathbf{r}/\partial v$ och $\partial\mathbf{r}/\partial\varphi$ är inbördes ortogonala.

$$h_u = h_v = \sqrt{u^2+v^2}, \qquad h_\varphi = uv$$

Ekvationen för ϕ:

$$\frac{d}{du}\left(u\frac{d\phi}{du}\right) = 0$$

Lösningen blir (sedan randvillkoren använts):

$$\phi = \phi_0 \frac{1}{\ln \frac{\sqrt{2}}{3}} \ln \frac{u}{3\sqrt{a}}$$

151. 151

a) Det räcker med att konstatera att kolumnerna i (a_{ik}) är ortogonala samt att $\det(a_{ik}) = 1$.

b)

$$T' = aTa^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

152. 152

$$\begin{pmatrix} \cos^2\alpha & -\sin\alpha\cos\alpha & 0 \\ -\sin\alpha\cos\alpha & \sin^2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

153. 153

$$\begin{pmatrix} 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\alpha & \cos^2\alpha & -\sin\alpha\cos\alpha \\ \cos\alpha & -\sin\alpha\cos\alpha & \sin^2\alpha \end{pmatrix}$$

154. 154 Vi har

$$A_{ij}x_ix_j + B_ix_i = 0 \qquad (1)$$

$$A'_{ij}x'_ix'_j + B'_ix'_i = 0 \qquad (2)$$

Byt i, j mot r, s i (1):

$$\begin{aligned} A_{rs}x_rx_s + B_rx_r &= \{x_r = a_{ir}x'_i, x_s = a_{js}x'_j\} = \\ &= a_{ir}a_{js}A_{rs}x'_ix'_j + a_{ir}B_rx'_i = 0 \end{aligned}$$

Jämförelse med (2) ger $A'_{ij} = a_{ir}a_{js}A_{rs}$ och $B'_i = a_{ir}B_r$, dvs. A_{ij} och B_i är komponenter av tensorer.

155. 155

a) $\delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 1 + 1 + 1 = 3$

b) $\delta_{ij}\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{iik} = 0$

c)

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{\ell jk} &= \underbrace{\varepsilon_{i12}\varepsilon_{\ell 12} + \varepsilon_{i13}\varepsilon_{\ell 13} + \varepsilon_{i23}\varepsilon_{\ell 23}}_{\delta_{i\ell}} + \\ &\quad + \underbrace{\varepsilon_{i21}\varepsilon_{\ell 21} + \varepsilon_{i31}\varepsilon_{\ell 31} + \varepsilon_{i32}\varepsilon_{\ell 32}}_{\delta_{i\ell}} = 2\delta_{i\ell}\end{aligned}$$

Alternativt:

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{\ell jk} = \varepsilon_{jki}\varepsilon_{jk\ell} = \delta_{kk}\delta_{i\ell} - \delta_{k\ell}\delta_{ik} = 3\delta_{i\ell} - \delta_{i\ell} = 2\delta_{i\ell}$$

d) $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} =$ antal jämna permutationer + antal udda = 6
Alternativt:

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = \delta_{jj}\delta_{kk} - \delta_{jk}\delta_{kj} = 3 \cdot 3 - \delta_{jj} = 9 - 3 = 6$$

156. 156

a)

$$\begin{aligned}A'_{ijk\ell} &= a_{ir}a_{js}a_{kt}a_{\ell u}\delta_{rs}\delta_{tu} = a_{ir}a_{jr}a_{kt}a_{\ell t} = \{a_{ik}a_{jk} = \delta_{ij}\} = \\ &= \delta_{ij}\delta_{k\ell} = A_{ijk\ell}\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}B'_{ijk\ell} &= a_{ir}a_{js}a_{kt}a_{\ell u}(\delta_{rt}\delta_{su} + \delta_{ru}\delta_{st}) = \\ &= a_{ir}a_{js}a_{kr}a_{\ell s} + a_{ir}a_{js}a_{ks}a_{\ell r} = \\ &= \delta_{ik}\delta_{j\ell} + \delta_{i\ell}\delta_{jk} = B_{ijk\ell}\end{aligned}$$

c) $C_{ijk\ell} = \varepsilon_{nij}\varepsilon_{nk\ell} = \delta_{ik}\delta_{j\ell} - \delta_{i\ell}\delta_{jk}$. Nu kan samma metod som i b) användas.

157. 157

a) Yttre produkten av tensorerna A_{ij} och $B_{k\ell}$, en tensor av fjärde ordningen.

b) $A_{ij}B_{ji}$ erhålls som inre produkten mellan A_{ij} och $B_{k\ell}$. Ordningstalet är noll (skalär).

c) Denna tensor erhålls som partiella derivatan m.a.p. x_k. Ordningstalet är tre.

d) Erhålls efter derivering av A_{ij} m.a.p. x_k resp. x_ℓ åtföljd av en kontraktion, $\ell = i$. Ordningstalet är två.

e) $A_{ij}A_{jk}$ är en tensor av andra ordningen. Volymsintegrering ger en ny tensor av samma ordning.

158. 158

a) $\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{A} = (\varepsilon_{ijk}A_{k,j})_{,i} = \varepsilon_{ijk}A_{k,ji} = 0$ eftersom ε_{ijk} är antisymmetrisk och $A_{k,ji}$ symmetrisk vid byte av ordningen mellan i och j.

b) $\mathbf{B}\cdot((\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{C}) - \mathbf{A}\cdot((\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{C})$

c) $\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{A} - \nabla^2\mathbf{A}$

d) $(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A} + \mathbf{A}\operatorname{div}\mathbf{B} - \mathbf{B}\operatorname{div}\mathbf{A} - (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B}$

e) 0

f) $-2\operatorname{grad}\phi + \mathbf{r}\nabla^2\phi - (\mathbf{r}\cdot\nabla)\operatorname{grad}\phi$

g) $-2\operatorname{rot}\mathbf{A} - (\mathbf{r}\cdot\nabla)\operatorname{rot}\mathbf{A}$

h) 0

i) $\operatorname{rot}\mathbf{B} + (\mathbf{r}\cdot\nabla)\operatorname{rot}\mathbf{B}$

j) $-2\operatorname{div}\mathbf{B} + \mathbf{r}\cdot\nabla^2\mathbf{B} - (\mathbf{r}\cdot\nabla)\operatorname{div}\mathbf{B}$

k) $\mathbf{B}\times((\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{C}) - \mathbf{C}\times((\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B})$

159. 159

$$
\begin{aligned}
&(((\mathbf{r}\times\nabla)\times(\mathbf{r}\times\nabla))\phi)_i = \\
&= (\varepsilon_{ijk}(\varepsilon_{j\ell m}x_\ell\partial_m)(\varepsilon_{knp}x_n\partial_p))\phi = \\
&= \varepsilon_{j\ell m}(\delta_{in}\delta_{jp} - \delta_{ip}\delta_{jn})x_\ell(x_{n,m}\phi_{,p} + x_n\phi_{,pm}) = \{x_{n,m} = \delta_{mn}\} = \\
&= \varepsilon_{j\ell m}x_\ell(\delta_{im}\phi_{,j} + x_i\phi_{,jm} - \delta_{jm}\phi_{,i} - x_j\phi_{,im}) = \\
&= -\varepsilon_{i\ell j}x_\ell\phi_{,j} + 0 - 0 - \underbrace{\varepsilon_{j\ell m}x_\ell x_j\phi_{,im}}_{=0} = -(\mathbf{r}\times\nabla\phi)_i
\end{aligned}
$$

160. 160

a)

$$
\begin{aligned}
\left(\oint_C \mathbf{A}\times d\mathbf{r}\right)_i &= \oint_C \varepsilon_{ijk}A_j dx_k = \iint_S \varepsilon_{k\ell m}\varepsilon_{ijk}A_{j,m}dS_\ell = \\
&= \iint_S (\delta_{i\ell}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{j\ell})A_{j,m}dS_\ell = \\
&= \iint_S (A_{j,j}n_i - A_{j,i}n_j)dS
\end{aligned}
$$

b)

$$
\iint_S ((\mathbf{B}\cdot(\hat{\mathbf{n}}\times\nabla))\mathbf{A} + \mathbf{A}(\hat{\mathbf{n}}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{B}))dS
$$

c)

$$
\iint_S (A_{ij,j}n_i - A_{ij,i}n_j)dS
$$

161. 161

$$-\oint_C \phi \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$$

162. 162

$$\begin{aligned}
\left(\iint_S (\operatorname{grad}\phi \times \operatorname{Grad}\mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S}\right)_\ell &= \iint_S \varepsilon_{ijk}\phi_{,j}A_{\ell,k}dS_i = \\
&= \iint_S \varepsilon_{ijk}((\phi A_{\ell,k})_{,j} - \phi A_{\ell,kj})dS_i = \\
&= \{\varepsilon_{ijk}A_{\ell,kj} = 0\} = \\
&= \oint_C \phi A_{\ell,k}dx_k
\end{aligned}$$

163. 163

a)

$$\begin{aligned}
\iiint_V (\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}))_i dV &= \iiint_V \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{k\ell m}A_{m,\ell j}dV = \\
&= \oiint_S (\delta_{i\ell}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{j\ell})A_{m,\ell}dS_j = \\
&= \oiint_S (A_{j,i} - A_{i,j})dS_j
\end{aligned}$$

b)

$$\oiint_S (\mathbf{A} \times \nabla\phi) \cdot d\mathbf{S}$$

164. 164

$$\oiint_S \mathbf{A}(\mathbf{B} \cdot d\mathbf{S})$$

165. 165

$$\begin{aligned}
&((\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla)\mathbf{E} + \hat{\mathbf{n}} \times (\nabla \times \mathbf{E}) - \hat{\mathbf{n}}(\nabla \cdot \mathbf{E}))_i = \\
&= n_jE_{i,j} + \varepsilon_{ijk}n_j\varepsilon_{k\ell m}E_{m,\ell} - n_iE_{j,j} = \\
&= n_jE_{i,j} + n_jE_{j,i} - n_jE_{i,j} - n_iE_{j,j} = \\
&= n_jE_{j,i} - n_iE_{j,j} = \varepsilon_{m\ell k}\varepsilon_{mji}n_\ell E_{j,k}
\end{aligned}$$

Nu kan Stokes' sats användas, men eftersom en sluten yta saknar randkurva, blir resultatet noll.

166. 166 $T_{ij} = \mu_0(H_iH_j - \delta_{ij}H^2/2)$

167. 167

a) Nej, ty om $T_{ik} \neq T_{ki}$ i K så är $T'_{ik} \neq T'_{ki}$ i alla K'.
b) Nej, ty Sp $\overleftrightarrow{\mathbf{T}} = 3$, men Sp $\overleftrightarrow{\mathbf{T}}' = 0$.
c) Nej, samma argument som i a).

168. 168

a) F_i är kontraktionen av $T_{ij} = m(\omega^2\delta_{ij} - \omega_i\omega_j)$ och x_j.
b) Varje vektor i xy-planet är egenvektor med egenvärde $m\omega^2$. Varje vektor parallell med $\mathbf{e}_z$ är egenvektor med egenvärde noll. Detta gäller med $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega)$.

169. 169

a) $M_{ij} = (3x_ix_j - r^2\delta_{ij})/r^5$
b) $\lambda_{1,2} = -1/r^3$, $\lambda_3 = 2/r^3$, $\mathbf{e}_3 \parallel \mathbf{r}$

170. 170

a) $F_i = A_{ij}v_j$, $A_{ij} = e\varepsilon_{ijk}B_k$
b) $\lambda_{1,2} = \pm ieB$, $\lambda_3 = 0$, $\mathbf{e}_3 \parallel \mathbf{B}$

171. 171

$$\begin{aligned}
F_i &= \iiint_V \rho E_i dV = \iiint_V \varepsilon_0 E_{j,j} E_i dV = \\
&= \iiint_V \varepsilon_0((E_jE_i)_{,j} - E_jE_{i,j})dV = \\
&= \{E_i = -\phi_{,i} \text{ dvs. } E_{i,j} = -\phi_{,ij} = -\phi_{,ji} = E_{j,i}\} = \\
&= \iiint_V \varepsilon_0((E_jE_i)_{,j} - \frac{1}{2}(E_jE_j)_{,i})dV = \{\text{Gauss' sats}\} = \\
&= \oiint_S \varepsilon_0(E_kE_i - \frac{1}{2}\delta_{ik}E_jE_j)dS_k \\
D_i &= \varepsilon_0 E_i
\end{aligned}$$

172. 172

$$\begin{aligned}
&\iiint_V (\mathbf{A}\,\mathrm{div}\,\mathbf{A} - \mathbf{A}\times\mathrm{rot}\,\mathbf{A})_i dV = \\
&= \mathbf{e}_i \iiint_V (A_i A_{j,j} - \varepsilon_{ijk} A_j \varepsilon_{k\ell m} A_{m,\ell}) dV = \\
&= \mathbf{e}_i \iiint_V (A_i A_{j,j} - (\delta_{i\ell}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{j\ell}) A_j A_{m,\ell}) dV = \\
&= \mathbf{e}_i \iiint_V (A_i A_{j,j} - A_j A_{j,i} + A_j A_{i,j}) dV = \\
&= \mathbf{e}_i \iiint_V (A_i A_j - \frac{1}{2}\delta_{ij} A_k A_k)_{,j} dV = \\
&= \mathbf{e}_i \oiint_S (A_i A_j - \frac{1}{2}\delta_{ij} A_k A_k) dS_j = \\
&= \mathbf{e}_i \oiint_S T_{ij} dS_j
\end{aligned}$$

För $\mathbf{A} = \mathbf{E}$ finner vi att med

$$T_{ij} = E_i E_j - \frac{1}{2}\delta_{ij} E_k E_k$$

gäller

$$\iiint_V \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\mathbf{r}) E_i(\mathbf{r}) dV = \oiint_S T_{ij} dS_j$$

För $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ finner vi att med

$$T_{ij} = B_i B_j - \frac{1}{2}\delta_{ij} B_k B_k$$

gäller

$$\iiint_V \mu_0(\mathbf{i}\times\mathbf{B})_i dV = \oiint_S T_{ij} dS_j$$

173. 173 Med $\nabla r = \mathbf{e}_r$ får man

$$\phi = \frac{3(\mathbf{m}_1\cdot\mathbf{e}_r)(\mathbf{m}_2\cdot\mathbf{e}_r) - \mathbf{m}_1\cdot\mathbf{m}_2}{r^3}$$

Givna värden insatta ger

$$\phi = \frac{5}{4}\frac{|\mathbf{m}_1||\mathbf{m}_2|}{r^3}$$

174. 174 Kan utföras på ett flertal sätt, t.ex.:

$$\begin{aligned}
\nabla\times\left(\mathbf{m}\times\frac{\mathbf{r}}{r^3}\right) &= \left(\nabla\frac{1}{r^3}\right)\times(\mathbf{m}\times\mathbf{r}) + \frac{1}{r^3}\nabla\times(\mathbf{m}\times\mathbf{r}) = \\
&= -\frac{3\mathbf{r}}{r^5}\times(\mathbf{m}\times\mathbf{r}) + \frac{1}{r^3}(\mathbf{m}(\nabla\cdot\mathbf{r}) - (\mathbf{m}\cdot\nabla)\mathbf{r}) = \\
&= -\frac{3}{r^5}(\mathbf{m}r^2 - \mathbf{r}(\mathbf{m}\cdot\mathbf{r})) + \frac{1}{r^3}(3\mathbf{m} - \mathbf{m}) = \\
&= \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{m}\cdot\mathbf{r})}{r^5} - \frac{\mathbf{m}}{r^3}
\end{aligned}$$

varav

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3\mathbf{r}(\mathbf{m}\cdot\mathbf{r}) - \mathbf{m}r^2}{r^5}$$

Viktigt alternativ: Välj $\mathbf{e}_z \parallel \mathbf{m} \Rightarrow \mathbf{m} = m\mathbf{e}_z$

Med sfäriska koordinater:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{\mu_0 m}{4\pi}\frac{\sin\theta}{r^2}\mathbf{e}_\varphi \\ \operatorname{rot}\mathbf{A} &= \frac{\mu_0 m}{4\pi}\left(\frac{2\cos\theta}{r^3}\mathbf{e}_r + \frac{\sin\theta}{r^3}\mathbf{e}_\theta\right) \end{aligned}$$

175. 175

a)

$$\frac{dV}{ds} = \nabla V \cdot \hat{\mathbf{s}} = 2$$

b)

$$\left(\frac{dV}{ds}\right)_{\max} = |\nabla V| = \sqrt{10}$$

i riktningen $2\mathbf{e}_r - \mathbf{e}_\theta$.

176. 176 Enligt Gauss' sats gäller

$$\oiint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \operatorname{div}\mathbf{E}\, dV = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V \rho(\mathbf{r})dV = \frac{1}{\varepsilon_0}Q$$

Alltså är

$$Q = \varepsilon_0 \oiint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = \frac{\varepsilon_0\rho_0 a^2}{\varepsilon_0 a}\oiint_S \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) dS$$

Men

$$\begin{aligned} \oiint_S x^2 dS &= \oiint_S y^2 dS = \oiint_S z^2 dS = \\ &= \frac{1}{3}\oiint_S (x^2+y^2+z^2) dS = \frac{1}{3}a^2 \oiint_S dS = \\ &= \frac{4\pi a^4}{3} \end{aligned}$$

Alltså

$$Q = \rho_0 \frac{4\pi a^3}{3}\left(1 + \frac{a^2}{b^2} + \frac{a^2}{c^2}\right)$$

177. 177

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) &= \mathbf{r} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{\omega}) - \boldsymbol{\omega} \cdot (\nabla \times \mathbf{r}) = 0 + 0 \\
\nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) &= \boldsymbol{\omega}(\nabla \cdot \mathbf{r}) - (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{r} = 3\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega} = 2\boldsymbol{\omega} \\
\nabla \cdot \mathbf{a} &= \nabla \cdot (\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}) + \nabla \cdot (\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})) = \\
&= 0 + \nabla \cdot (\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}) - \omega^2 \mathbf{r}) = \\
&= \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}) - \omega^2 \nabla \cdot \mathbf{r} = \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} - 3\omega^2 = -2\omega^2 \\
\nabla \times \mathbf{a} &= \nabla \times (\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}) - \omega^2 \mathbf{r}) = \nabla(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}) \times \boldsymbol{\omega} - \omega^2 \nabla \times \mathbf{r} = \\
&= \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{0} = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

178. 178 Eftersom

$$\mathbf{i} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B}$$

har vi

$$\begin{aligned}
\mathbf{i} \times \mathbf{B} &= \frac{1}{\mu_0}(\nabla \times \underset{\cdot}{\mathbf{B}}) \times \mathbf{B} = \frac{1}{\mu_0}((\mathbf{B} \cdot \nabla)\underset{\cdot}{\mathbf{B}} - \nabla(\underset{\cdot}{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{B})) = \\
&= \frac{1}{\mu_0}\left((\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B} - \nabla\left(\frac{1}{2}\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}\right)\right)
\end{aligned}$$

Alltså är

$$\mathbf{f} = \frac{1}{\mu_0}(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B} - \nabla(p + \frac{1}{2\mu_0}B^2)$$

179. 179

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \mathbf{F} &= \frac{p}{r^2 \sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \sin\theta \frac{2\cos\theta}{r^3}\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(r \sin\theta \frac{\sin\theta}{r^3}\right)\right) = \\
&= -p\frac{2\cos\theta}{r^4} + p\frac{2\cos\theta}{r^4} = 0 \\
\operatorname{rot} \mathbf{F} &= \frac{1}{r^2 \sin\theta} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r\mathbf{e}_\theta & r\sin\theta\, \mathbf{e}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \frac{2\cos\theta}{r^3} & \frac{\sin\theta}{r^2} & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 0)
\end{aligned}$$

Kommentar: $\mathbf{F} = \operatorname{grad}\phi_1 + \operatorname{grad}\phi_2$ där ϕ_1 och ϕ_2 är potentialer från plus- och minusladdning, ger

1) $\operatorname{rot}\mathbf{F} = \mathbf{0}$ ty $\operatorname{rot}\operatorname{grad}\phi = \mathbf{0}$
2) $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$ ty $\nabla^2\phi_1 = \nabla^2\phi_2 = 0$

180. 180

a) $(2xy - y - 2z, -y^2, 2y)$
b) $(-6xy, xz, 2x^2y - y^3)$
c) $(-yz - z^2, 2x^2 - y^2, 0)$
d) $(2, 2, 2x)$

181. 181 Sätt $\mathbf{A} = \operatorname{grad}\phi$.

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\phi \operatorname{rot}\mathbf{B}) &= \operatorname{grad}\phi \cdot \operatorname{rot}\mathbf{B} + \phi \operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{B} = \\
&= \operatorname{grad}\phi \cdot \operatorname{rot}\mathbf{B} \\
\iiint_V \mathbf{A} \cdot \operatorname{rot}\mathbf{B}\, dV &= \oiint_S \phi \operatorname{rot}\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS = \phi_S \oiint_S \operatorname{rot}\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS = \\
&= \phi_S \iiint_V \operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{B}\, dV = 0
\end{aligned}$$

182. 182 Lägg z-axeln parallellt med $\mathbf{a}$ och inför sfäriska koordinater:

$$\mathbf{A} = \operatorname{grad}\frac{a\cos\theta}{r^2}$$

Fältet är singulärt i origo.

$$\mathbf{A} = \operatorname{grad}\frac{a\cos\theta}{r^2} = -\frac{2a\cos\theta}{r^3}\mathbf{e}_r - \frac{a\sin\theta}{r^3}\mathbf{e}_\theta$$

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = 0 \quad \text{då} \quad r \neq 0$$

Flödet ut genom kuben = flödet ut genom en sfär kring origo.

$$\oiint_{r=R} \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_r dS = -\frac{2a}{R} 2\pi \int_0^\pi \cos\theta \sin\theta\, d\theta = 0$$

183. 183 Bilda $\mathbf{D}(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{A}(\mathbf{r}) - \mathbf{B}(\mathbf{r})$. Vi vet att

$$\operatorname{rot}\mathbf{D} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{D} = \operatorname{grad}\phi$$

Vidare gäller

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = \operatorname{div}\operatorname{grad}\phi = 0 \tag{1}$$

På S gäller

$$\mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad \text{dvs.} \quad \operatorname{grad}\phi \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \tag{2}$$

(1) och (2) leder till att $\phi = C$, dvs.

$$\mathbf{D} \equiv \mathbf{0} \text{ i } V$$

184. 184

$$\iint_S (\nabla\phi \times \nabla\psi)\cdot d\mathbf{S} = \iint_S (-\nabla\times(\psi\nabla\phi) + \psi\nabla\times\nabla\phi)\cdot d\mathbf{S}$$

Men $\nabla\times\nabla\phi = \mathbf{0}$ och enligt Stokes' sats är

$$\iint_S \nabla\times(\psi\nabla\phi)\cdot d\mathbf{S} = \oint_C \psi\nabla\phi\cdot d\mathbf{r}$$

Om nu C är en ekvipotentialkurva till ϕ så gäller där $\nabla\phi \perp d\mathbf{r}$ eller $\nabla\phi\cdot d\mathbf{r} = 0$. Alltså

$$\iint_S (\nabla\phi\times\nabla\psi)\cdot d\mathbf{S} = 0$$

185. 185

$$\begin{aligned}
\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A}) &= \nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A}\\
\nabla\cdot\mathbf{A} &= (n+1)\rho^{n-1}\\
\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}) &= (n^2-1)\rho^{n-2}\mathbf{e}_\rho\\
\nabla\times\mathbf{A} &= \mathbf{0}
\end{aligned}$$

Detta ger

$$\nabla^2\mathbf{A} = (n^2-1)\rho^{n-2}\mathbf{e}_\rho$$

och ekvationen blir

$$(n^2-1-m)\rho^{n-2} = 0$$

dvs.

$$n = \pm\sqrt{1+m}$$

186. 186

a)

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}r^2 f(r) = 0 \quad \text{ger} \quad f = \frac{C}{r^2}$$

Ur

$$\oiint_S \frac{C}{r^2}\mathbf{e}_r\cdot d\mathbf{S} = Q$$

erhålls

$$C = \frac{Q}{4\pi}$$

b)

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \frac{Q}{4\pi}\int_C \frac{\mathbf{r}\cdot d\mathbf{r}}{r^3} = \frac{Q}{4\pi}\int_{r_0}^{r_1}\frac{dr}{r^2}$$

Oberoende av vägen ($\operatorname{rot}\mathbf{F} = \mathbf{0}$ för $|\mathbf{r}| \neq 0$). Man får

$$\begin{aligned}
r_0 &= a\sqrt{0+16+0} = 4a\\
r_1 &= a\sqrt{0+16+9} = 5a\\
\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \frac{Q}{4\pi}\left(-\frac{1}{5a}+\frac{1}{4a}\right) = \frac{Q}{80\pi a}
\end{aligned}$$

187. 187 $|\mathbf{a}| = \omega^2\sqrt{1+\cos^4\omega t}$

188. 188
$$\iiint_V \mathbf{A}\cdot \operatorname{rot}\mathbf{B}\,dV = \oiint_S (\mathbf{B}\times\mathbf{A})\cdot d\mathbf{S} + \iiint_V \mathbf{B}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{A}\,dV$$
På S är
$$\mathbf{B} = \mathbf{0} + a^2\mathbf{r} \;\Rightarrow\; \mathbf{B}\times\mathbf{A} = 0 \text{ på } S$$
Vidare är
$$\operatorname{rot}\mathbf{A} = \nabla\left(\frac{1}{r^2+a^2}\right)\times\mathbf{r} + \frac{1}{r^2+a^2}\nabla\times\mathbf{r} = \mathbf{0}+\mathbf{0}$$
Vi har alltså
$$\iiint_V \mathbf{A}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{B}\,dV = 0$$

189. 189 Vi beräknar integralens komponent i $\mathbf{e}_i$-riktningen ($i = 1, 2, 3$):
$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_i\cdot\oint_C \cdots &= \oint_C \mathbf{e}_i\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{r})\times d\mathbf{r} = \\
&= \oint_C \mathbf{e}_i\times(\mathbf{a}\times\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} = \{\text{enl. Stokes' sats}\} = \\
&= \iint_S \operatorname{rot}(\mathbf{e}_i\times(\mathbf{a}\times\mathbf{r}))\cdot d\mathbf{S} \\
\nabla\times(\mathbf{e}_i\times(\mathbf{a}\times\underset{\cdot}{\mathbf{r}})) &= (\nabla\cdot(\mathbf{a}\times\underset{\cdot}{\mathbf{r}}))\mathbf{e}_i - (\mathbf{e}_i\cdot\nabla)(\mathbf{a}\times\underset{\cdot}{\mathbf{r}}) = \\
&= -(\mathbf{a}\cdot\underbrace{(\nabla\times\underset{\cdot}{\mathbf{r}})}_{=\mathbf{0}})\mathbf{e}_i - \mathbf{a}\times\underbrace{(\mathbf{e}_i\cdot\nabla)\underset{\cdot}{\mathbf{r}}}_{=\mathbf{e}_i} \\
\Rightarrow \mathbf{e}_i\cdot\oint_C \cdots &= -\iint_S (\mathbf{a}\times\mathbf{e}_i)\cdot d\mathbf{S} = \mathbf{e}_i\cdot\iint_S \mathbf{a}\times d\mathbf{S}
\end{aligned}$$
Den sökta integralen är således
$$\iint_S \mathbf{a}\times d\mathbf{S} = \pm\iint_S \mathbf{a}\times\frac{\mathbf{b}}{b}dS = \pm\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{b}\pi$$
$$\hat{\mathbf{n}} = \pm\frac{\mathbf{b}}{b}$$

190. 190 Enligt Gauss' universalsats har vi:
$$\begin{aligned}
\oiint_S \phi\mathbf{F}\times d\mathbf{S} &= -\iiint_V \operatorname{rot}(\phi\mathbf{F})dV = \\
&= -\iiint_V (\nabla\phi\times\mathbf{F})dV - \iiint_V \phi\frac{\mathbf{e}_r}{r^2}dV = \\
&= \iiint_V \phi\nabla\frac{1}{r}dV = \\
&= \iiint_V \nabla\left(\phi\frac{1}{r}\right)dV - \iiint_V \frac{1}{r}\nabla\phi\,dV
\end{aligned}$$

Här har vi utnyttjat att

$$\nabla\phi \parallel \mathbf{F} \quad \text{och} \quad \operatorname{rot}\mathbf{F} = \frac{\mathbf{e}_r}{r^2} = -\operatorname{grad}\frac{1}{r}$$

Enligt en annan variant av Gauss' sats är

$$\iiint_V \nabla\left(\phi\frac{1}{r}\right) dV = \oiint_S \phi\frac{1}{r} d\mathbf{S}$$

och vi har

$$\oiint_S \phi\mathbf{F}\times d\mathbf{S} = \oiint_S \phi\frac{1}{r}d\mathbf{S} - \iiint_V \frac{1}{r}\nabla\phi\, dV$$

191. 191

a) Ur $\mathbf{A}(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^n\mathbf{A}(x, y, z)$ får man genom derivering

$$\left(x\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial x} + y\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial y} + z\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial z}\right) = n\lambda^{n-1}\mathbf{A}(x, y, z)$$

I limes då $\lambda \to 1$ gäller därför

$$(\mathbf{r}\cdot\nabla)\mathbf{A} = n\mathbf{A}$$

b) Vi behöver

$$\begin{aligned}
\nabla(\mathbf{r}\cdot\mathbf{A}) &= (\mathbf{r}\cdot\nabla)\mathbf{A} + (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{r} + \mathbf{r}\times(\nabla\times\mathbf{A}) + \mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{r}) = \\
&= n\mathbf{A} + \mathbf{A} + \mathbf{r}\times(\nabla\times\mathbf{A}) + \mathbf{0}
\end{aligned}$$

och får nu

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot(\mathbf{r}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{A})) &= (\nabla\cdot\mathbf{r})(\mathbf{r}\cdot\mathbf{A}) + \mathbf{r}\cdot\nabla(\mathbf{r}\cdot\mathbf{A}) = \\
&= 3(\mathbf{r}\cdot\mathbf{A}) + (n+1)(\mathbf{r}\cdot\mathbf{A}) + \mathbf{r}\cdot(\mathbf{r}\times(\nabla\times\mathbf{A})) = \\
&= (n+4)(\mathbf{r}\cdot\mathbf{A})
\end{aligned}$$

192. 192

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_i\cdot\oiint_S \cdots &= \oiint_S \frac{\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_r}{r^3}\mathbf{e}_r\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dS = \{\text{Gauss' sats}\} = \\
&= \iiint_V \nabla\cdot\frac{(\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_r)\mathbf{e}_r}{r^3}dV \\
\nabla\cdot\frac{(\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{r})\mathbf{e}_r}{r^4} &= \frac{\mathbf{e}_r}{r^4}\cdot\underbrace{\nabla(\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{r})}_{=\mathbf{e}_i} + (\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{r})\underbrace{\nabla\cdot\frac{\mathbf{e}_r}{r^4}}_{=-2/r^5} = \\
&= \mathbf{e}_i\cdot\left(-\frac{\mathbf{e}_r}{r^4}\right) = \mathbf{e}_i\cdot\operatorname{grad}\left(\frac{1}{3r^3}\right)
\end{aligned}$$

$\mathbf{e}_i$ bryts ut ur integralen och då $i = x$, y och z inses att

$$\oiint_S \cdots = \iiint_V \operatorname{grad}\left(\frac{1}{3r^3}\right) dV$$

193. 193

$$\begin{aligned}\iiint_V \operatorname{div}(\phi\mathbf{B})dV &= \iiint_V \nabla\phi\cdot\mathbf{B}\,dV + \iiint_V \phi\operatorname{div}\mathbf{B}\,dV = \\ &= \iiint_V \mathbf{E}\cdot\mathbf{B}\,dV\end{aligned}$$

ty

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = \operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{A} = 0 \tag{1}$$

Gauss' sats ger å andra sidan

$$\begin{aligned}\iiint_V \operatorname{div}(\phi\mathbf{B})dV &= \oiint_S \phi\mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} = \phi\oiint_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} = \\ &= \phi\iiint_V \operatorname{div}\mathbf{B}\,dV = 0\end{aligned}$$

enligt (1). Alltså

$$\iiint_V \mathbf{E}\cdot\mathbf{B}\,dV = 0$$

194. 194

$$\begin{aligned}\nabla^2\mathbf{A} &= \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{A} - \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A} = \\ &= \frac{d}{d\rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}(\rho A_\rho)\right)\mathbf{e}_\rho + \frac{d}{d\rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}(\rho A_\varphi)\right)\mathbf{e}_\varphi + \\ &\quad + \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dA_z}{d\rho}\right)\mathbf{e}_z = 0\end{aligned}$$

$$\frac{d}{d\rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}(\rho A_\rho)\right) = 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}(\rho A_\rho) = a \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad \frac{d}{d\rho}(\rho A_\rho) = a\rho \quad\Rightarrow\quad \rho A_\rho = c_1\rho^2 + c_2 \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad A_\rho = c_1\rho + \frac{c_2}{\rho}$$

P.s.s. erhålls

$$A_\varphi = c_3\rho + \frac{c_4}{\rho}$$

$$\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dA_z}{d\rho}\right) = 0 \quad\Rightarrow\quad \rho\frac{dA_z}{d\rho} = c_5 \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad A_z = c_5\ln\rho + c_6$$

Dvs.

$$\mathbf{A} = (c_1\rho + \frac{c_2}{\rho})\mathbf{e}_\rho + (c_3\rho + \frac{c_4}{\rho})\mathbf{e}_\varphi + (c_5\ln\rho + c_6)\mathbf{e}_z$$

195. 195

a)

$$
\begin{aligned}
&\iint_S \mathbf{e}_\varphi \times \hat{\mathbf{n}}\, dS = \\
&= \quad \{\hat{\mathbf{n}} = -\mathbf{e}_r\} = -\iint_S \mathbf{e}_\theta\, dS = \\
&= \quad -\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} (\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, -\sin\theta)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi = \\
&= \quad \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{\pi^2}{8}\right)
\end{aligned}
$$

b) Låt S_{xy}, S_{xz} och S_{yz} vara sidoytorna i xy-, xz- resp. yz-planet.

$$
\begin{aligned}
&\oint\!\!\!\oint_{-S+S_{xy}+S_{xz}+S_{yz}} \mathbf{e}_\varphi \times \hat{\mathbf{n}}\, dS = \\
&= \quad -\iiint_V \nabla \times \mathbf{e}_\varphi\, dV = -\iiint_V \frac{1}{\rho}\mathbf{e}_z\, dV = \\
&= \quad -\iiint \frac{1}{r\sin\theta}\mathbf{e}_z r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi = \\
&= \quad -\int_0^1 r\, dr \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\pi/2} d\varphi\, \mathbf{e}_z = -\frac{\pi^2}{8}\mathbf{e}_z
\end{aligned}
$$

$$
\iint_{S_{xz}} \cdots = \iint_{S_{yz}} \cdots = 0
$$

eftersom $\hat{\mathbf{n}} \parallel \mathbf{e}_\varphi$ på S_{xz} och S_{yz}.

$$
\begin{aligned}
\iint_{S_{xy}} \mathbf{e}_\varphi \times \hat{\mathbf{n}}\, dS \quad &= \quad \iint_{S_{xy}} \mathbf{e}_\varphi \times \mathbf{e}_\theta\, dS = -\iint_{S_{xy}} \mathbf{e}_r\, dS = \\
&= \quad -\int_0^1 \int_0^{\pi/2} (\cos\varphi, \sin\varphi, 0) r\, dr\, d\varphi = \\
&= \quad \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)
\end{aligned}
$$

$$
\iint_S \cdots = -\iint_{-S+S_{xy}} \cdots + \iint_{S_{xy}} \cdots = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{\pi^2}{8}\right)
$$

196. 196 rot $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ på S, $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ på C

$$
\begin{aligned}
0 \quad &= \quad \oint_C ((\mathbf{e}\cdot\mathbf{r})\mathbf{A}) \cdot d\mathbf{r} = \{\text{Stokes' sats}\} = \iint_S \operatorname{rot}((\mathbf{e}\cdot\mathbf{r})\mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \\
&= \quad \iint_S (\underbrace{\operatorname{grad}(\mathbf{e}\cdot\mathbf{r})}_{\mathbf{e}} \times \mathbf{A} + (\mathbf{e}\cdot\mathbf{r})\underbrace{\operatorname{rot}\mathbf{A}}_{=\mathbf{0}}) \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS = \\
&= \quad \iint_S \hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{e} \times \mathbf{A}) dS = -\mathbf{e} \cdot \iint_S (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{A}) dS
\end{aligned}
$$

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z \quad \Rightarrow \quad \iint_S (\mathbf{A} \times \hat{\mathbf{n}}) dS = \mathbf{0}$$

197. 197

$$(\operatorname{rot} \mathbf{B})^2 = (\operatorname{rot} \mathbf{A})^2 + (\operatorname{rot} \mathbf{D})^2 + 2 \operatorname{rot} \mathbf{A} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{D} \tag{1}$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{D} \times \operatorname{rot} \mathbf{A}) = \operatorname{rot} \mathbf{D} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{A} - \mathbf{D} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} \tag{2}$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A} = -\nabla^2 \mathbf{A} = \mathbf{0} \tag{3}$$

$$\mathbf{D} \times \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{0} \quad \text{ty} \quad \mathbf{A} \times \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{B} \times \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{C} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
&\iiint_V (\operatorname{rot} \mathbf{B})^2 dV - \iiint_V (\operatorname{rot} \mathbf{A})^2 dV = \{(1)\} = \\
&= \iiint_V ((\operatorname{rot} \mathbf{D})^2 + 2 \operatorname{rot} \mathbf{A} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{D}) dV = \{(2)\} = \\
&= \iiint_V ((\operatorname{rot} \mathbf{D})^2 + 2 \operatorname{div}(\mathbf{D} \times \operatorname{rot} \mathbf{A}) + 2\mathbf{D} \cdot \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A}) dV = \{(3)\} = \\
&= \iiint_V (\operatorname{rot} \mathbf{D})^2 dV + 2 \oiint_S (\mathbf{D} \times \operatorname{rot} \mathbf{A}) \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS = \\
&= \iiint_V (\operatorname{rot} \mathbf{D})^2 dV + 2 \oiint_S (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{D}) \cdot \operatorname{rot} \mathbf{A}\, dS = \{(4)\} = \\
&= \iiint_V (\operatorname{rot} \mathbf{D})^2 dV \geq 0
\end{aligned}$$

198. 198

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \alpha \mathbf{A} \quad \Rightarrow \quad \alpha^2 \mathbf{A} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A}$$

Dessutom är

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A}$$

vilket medför att

$$\nabla^2 \mathbf{A} + \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = (\nabla^2 + \alpha^2) \mathbf{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} = \operatorname{grad} \left(\frac{1}{\alpha} \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{A} \right) = \mathbf{0}$$

199. 199

a)

$$\begin{aligned}
\nabla^2 \nabla^2 u &= \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d}{d\rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{du}{d\rho} \right) \right) \right) = 0 \\
\nabla^2 u &= \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{du}{d\rho} \right) = a \ln \rho + b \\
u &= A\rho^2 \ln \rho + B\rho^2 + C \ln \rho + D
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\nabla^2\nabla^2 u &= \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{du}{dr}\right)\right)\right) = 0 \\
\nabla^2 u &= \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{du}{dr}\right) = \frac{a}{r} + b \\
u &= Ar^2 + Br + \frac{C}{r} + D
\end{aligned}$$

200. 200 Sätt $\mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{C}$.

$$\begin{aligned}
&\iiint_V \mathbf{A}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{C}\,dV = \\
&= \iiint_V (\operatorname{div}(\mathbf{C}\times\mathbf{A}) + \mathbf{C}\cdot\underbrace{\operatorname{rot}\mathbf{A}}_{=\mathbf{0}})dV = \{\text{enl. Gauss' sats}\} = \\
&= \oiint_S (\mathbf{C}\times\mathbf{A})\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS = \oiint_S (\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{C})\cdot\mathbf{A}\,dS = 0
\end{aligned}$$

201. 201

a) Man får

$$\nabla\cdot\nabla\phi = \frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}r\phi = \frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}e^{-\lambda r} = \frac{\lambda^2}{r}e^{-\lambda r}$$

för $r \neq 0$. För $r = 0$ är $\nabla^2\phi$ ej definierad. Utesluts origo genom att betrakta volymen mellan $r = R$ och $r = \varepsilon$ ger Gauss' sats:

$$\oiint_S \nabla\phi\cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_\varepsilon} \nabla\phi\cdot d\mathbf{S} = \lambda^2 \iiint \frac{1}{r}e^{-\lambda r}dV$$

Vi får alltså

$$\begin{aligned}
I(R) &= \lambda^2 4\pi \int_\varepsilon^R e^{-\lambda r} r\,dr - \\
&\quad - \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} e^{-\lambda\varepsilon}\left(-\frac{1}{\varepsilon^2} - \frac{\lambda}{\varepsilon}\right)\mathbf{e}_r\cdot(-\mathbf{e}_r\varepsilon^2)\sin\theta\,d\theta\,d\varphi = \\
&= 4\pi(e^{-\lambda\varepsilon}(1+\varepsilon\lambda) - e^{-\lambda R}(1+R\lambda) - e^{-\lambda\varepsilon}(1+\lambda\varepsilon)) \\
&= -4\pi e^{-\lambda R}(1+R\lambda)
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\nabla\phi &= -\left(\frac{1}{r^2} + \frac{\lambda}{r}\right)e^{-\lambda r}\mathbf{e}_r \\
d\mathbf{S} &= \mathbf{e}_r R^2 \sin\theta\,d\theta\,d\varphi
\end{aligned}$$

ger

$$I(R) = -(1+R\lambda)e^{-\lambda R}4\pi$$

Vi noterar att

$$\lim_{\substack{R\to\infty \\ \lambda\neq 0}} I(R) = 0 \quad \text{medan} \quad \lim_{\substack{\lambda\to 0 \\ R<\infty}} = -4\pi$$

202. 202

$$\begin{aligned}
\mathbf{v} &= -\frac{1}{2}\mathbf{e}_\theta + 2\cos\frac{t}{2}\,\mathbf{e}_\varphi \\
\mathbf{a} &= -\left(\frac{1}{4} + 4\cos^2\frac{t}{2}\right)\mathbf{e}_r - 2\sin t\,\mathbf{e}_\theta - 2\sin\frac{t}{2}\,\mathbf{e}_\varphi
\end{aligned}$$