KTH Matematik
Olle Stormark

Lösningsföslag till KS 1A

i SF1649 Vektoranalys och komplexa funktioner för CELTE, vt 2010.

- Varje uppgift ger maximalt 3 poäng.
- För godkänt krävs minst 5 poäng sammanlagt.

1. Beräkna det arbete som kraften $\boldsymbol{F} = (xy, y, -yz)$ uträttar längs kurvan C, given av $\boldsymbol{r} = (x, y, z) = (t, t^2, t)$, där $t\colon 0 \to 1$.

   Lösning:

$$\begin{aligned}\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} &= \int_{t=0}^{1} (t^3, t^2, -t^3) \cdot (1, 2t, 1)\, dt \\ &= \int_0^1 (t^3 + 2t^3 - t^3)\, dt = 2\int_0^1 t^3\, dt = \frac{2}{4}\big[t^4\big]_0^1 = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

2. Låt $\mathcal{D}$ vara halvrummet $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon y > 0\}$, och låt

$$\boldsymbol{F} = \left(3x^2, \frac{z^2}{y}, 2z\,\ln y\right) \text{ i } \mathcal{D}.$$

   (a) Visa att $\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$ i $\mathcal{D}$.

   Lösning:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \boldsymbol{F} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 3x^2 & z^2y^{-1} & 2z\,\ln y \end{vmatrix} = \left(\frac{2z}{y} - \frac{2z}{y}, 0-0, 0-0\right) \\ &= \boldsymbol{0}.\end{aligned}$$

(b) Eftersom $\mathcal{D}$ är enkelt sammanhängande följer det från (a) att $\boldsymbol{F} = \operatorname{grad}\phi$ för en potentialfunktion ϕ. Bestäm ett sådant ϕ.

Lösning:

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = 3x^2 \Longrightarrow \phi = x^3 + g(y,z) \Longrightarrow$$
$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial y}(y,z) = z^2y^{-1} \Longrightarrow g = z^2\ln y + h(z) \Longrightarrow$$
$$\phi = x^3 + z^2\ln y + h(z) \Longrightarrow$$
$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = 2z\ln y + h'(z) = 2z\ln y \Longrightarrow h(z) = C \Longrightarrow \phi = x^3 + z^2\ln y + C.$$

(c) Låt C vara en kurva som går från $(1,1,1)$ till $(1,2,3)$ i $\mathcal{D}$. Beräkna linjeintegralen
$$\int_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}.$$

Lösning:

$$\int_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_C \text{grad } \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{(1,1,1)}^{(1,2,3)} d\phi$$
$$= \phi(1,2,3) - \phi(1,1,1) = 1 + 9\ln 2 - 1 = 9\ln 2.$$

3. Låt ϕ vara en funktion och $\boldsymbol{F}$ ett vektorfält. Använd indexräkning för att visa att
$$\operatorname{rot}(\phi\,\boldsymbol{F}) = \operatorname{grad}\phi \times \boldsymbol{F} + \phi\operatorname{rot}\boldsymbol{F}.$$

Lösning:

$$[\nabla\times(\phi\boldsymbol{F})]_i = \epsilon_{ijk}\,\frac{\partial}{\partial x_j}(\phi F_k) = \epsilon_{ijk}\,\frac{\partial\phi}{\partial x_j}F_k + \phi\,\epsilon_{ijk}\,\frac{\partial F_k}{\partial x_j}$$
$$= [\nabla\phi\times\boldsymbol{F} + \phi\,\nabla\times\boldsymbol{F}]_i \quad \text{för} \quad i = 1,2,3 \Longrightarrow$$
$$\operatorname{rot}(\phi\boldsymbol{F}) = \text{grad }\ \phi\times\boldsymbol{F} + \phi\operatorname{rot}\ \boldsymbol{F}.$$

Lycka till!
Olle.

KTH Matematik
Olle Stormark

Lösningsförslag till KS 1B

i SF1649 Vektoranalys och komplexa funktioner för CELTE, vt 2010.

- Varje uppgift ger maximalt 3 poäng.
- För godkänt krävs minst 5 poäng sammanlagt.

1. Beräkna det arbete som kraften $\boldsymbol{F} = (x, y, z)$ uträttar längs kurvan C, given av $\boldsymbol{r} = (x, y, z) = (\cos \pi t, t^2, \sin \pi t)$, där $t\colon 0 \to 1$.

   Lösning:

$$\begin{aligned}\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} &= \int_{t=0}^{1} (\cos \pi t, t^2, \sin \pi t) \cdot (-\pi \sin \pi t, 2t, \pi \cos \pi t)\, dt \\ &= \int_0^1 (-\pi \cos \pi t \sin \pi t + 2t^3 + \pi \sin \pi t \cos \pi t)\, dt = 2 \int_0^1 t^3\, dt \\ &= \frac{2}{4} \big[t^4\big]_0^1 = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

2. Låt $\mathcal{D}$ vara kvartsrummet $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon y > 0, z > 0\}$, och låt

$$\boldsymbol{F} = \left(\frac{1}{y}, \frac{1}{z} - \frac{x}{y^2}, -\frac{y}{z^2} \right) \text{ i } \mathcal{D}.$$

   (a) Visa att $\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$ i $\mathcal{D}$.

   Lösning:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \boldsymbol{F} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ y^{-1} & z^{-1} - xy^{-2} & -yz^{-2} \end{vmatrix} = (-z^{-2} + z^{-2}, 0 - 0, -y^{-2} + y^{-2}) \\ &= \boldsymbol{0}.\end{aligned}$$

(b) Eftersom $\mathcal{D}$ är enkelt sammanhängande följer det från (a) att $\boldsymbol{F} = \operatorname{grad}\phi$ för en potentialfunktion ϕ. Bestäm ett sådant ϕ.

Lösning:

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} == \frac{1}{y} \Longrightarrow \phi = \frac{x}{y} + g(y,z) \Longrightarrow$$
$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} + \frac{\partial g}{\partial y}(y,z) = \frac{1}{z} - \frac{x}{y^2} \Longrightarrow g = \frac{y}{z} + h(z) \Longrightarrow$$
$$\phi = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + h(z) \Longrightarrow$$
$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = -\frac{y}{z^2} + h'(z) = -\frac{y}{z^2} \Longrightarrow h(z) = C \Longrightarrow \phi = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + C.$$

(c) Låt C vara en kurva som går från $(1,1,1)$ till $(2,2,2)$ i $\mathcal{D}$. Beräkna linjeintegralen

$$\int_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}.$$

Lösning:

$$\int_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_C \text{grad }\ \phi\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{(1,1,1)}^{(2,2,2)} d\phi$$
$$= \phi(2,2,2) - \phi(1,1,1) = 2 - 2 = 0.$$

3. Låt $\boldsymbol{F}$ och $\boldsymbol{G}$ vara vektorfält. Använd indexräkning för att visa att

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{G}) = \operatorname{rot}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{G} - \boldsymbol{F}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{G}.$$

Lösning:

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{G}) &= \frac{\partial}{\partial x_i}(\epsilon_{ijk}\,F_jG_k) = \epsilon_{ijk}\,\frac{\partial F_j}{\partial x_i}G_k + \epsilon_{ijk}\,F_j\frac{\partial G_k}{\partial x_i}\\ &= \left(\epsilon_{kij}\frac{\partial F_j}{\partial x_i}\right)G_k - \left(\epsilon_{jik}\,\frac{\partial G_k}{\partial x_i}\right)F_j = (\operatorname{rot}\boldsymbol{F})_kG_k - (\operatorname{rot}\boldsymbol{G})_jF_j\\ &= \operatorname{rot}\boldsymbol{F}\ \cdot\boldsymbol{G} - \operatorname{rot}\boldsymbol{G}\ \cdot\ \boldsymbol{F}.\end{aligned}$$

Lycka till!
Olle.

KTH Matematik
Olle Stormark

Lösningsförslag till KS 2A

i SF1649 Vektoranalys och komplexa funktioner för CELTE, vt 2010.

- Varje uppgift ger maximalt 3 poäng.
- För godkänt krävs minst 5 poäng sammanlagt.

1. Låt $\gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon 4x^2 + y^2 = 4, z = 0\}$ och låt $\boldsymbol{F} = (2x, x^2, z^2)$. Använd Stokes' sats för att beräkna linjeintegralen

$$\oint_\gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r},$$

där γ genomlöps motsols sett uppifrån z-axeln.

Lösning:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 2x & x^2 & z^2 \end{vmatrix} = (0, 0, 2x).$$

Om Σ är ellipskivan $\{4x^2 + y^2 \leq 4\}$ i xy-planet, så är $\gamma = \partial\Sigma$ och $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{e}_z$, och enligt Stokes är då

$$\oint_\gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \iint_\Sigma \operatorname{rot} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{e}_z \, dS = \iint_\Sigma 2x \, dxdy$$
$$= \int_{y=-2}^{2} \left(\int_{x=-\sqrt{4-y^2}/2}^{\sqrt{4-y^2}/2} 2x \, dx \right) dy = 0,$$

ty en udda funktion integrerad över ett symmetriskt intervall ger integralen 0.

2. Låt $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 2\}$, låt $\partial\Omega$ vara Ω:s randyta med den utåtriktade enhetsnormalen $\boldsymbol{n}$, och låt $\boldsymbol{F} = r\,\boldsymbol{r}$, där $\boldsymbol{r} = (x,y,z)$ och $r = |\boldsymbol{r}|$. Använd divergenssatsen för att beräkna flödesintegralen
$$\iint_{\partial\Omega} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, dS.$$

Lösning:

$$\boldsymbol{F} = (x^2+y^2+z^2)^{1/2}\,(x,y,z) = (F_x, F_y, F_z) \Longrightarrow$$
$$\partial F_x/\partial x = \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-1/2} \cdot 2x \cdot x + (x^2+y^2+z^2)^{1/2} = \frac{x^2}{r} + r \Longrightarrow$$
$$\operatorname{div} \boldsymbol{F} = \partial F_x/\partial x + \partial F_y/\partial y + \partial F_z/\partial z = \frac{x^2+y^2+z^2}{r} + 3r = 4r \Longrightarrow$$
$$\iint_{\partial\Omega} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, dS = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \boldsymbol{F}\, dV = \int_{r=1}^{\sqrt{2}} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} 4r \cdot r^2 \sin\theta\, dr d\theta d\phi$$
$$= \left[r^4\right]_1^{\sqrt{2}} \cdot [-\cos\theta]_0^{\pi} \cdot 2\pi = 3 \cdot 2 \cdot 2\pi = 12\pi.$$

3. Beräkna rotationen av var och en av de cylindriska basvektorerna $\boldsymbol{e}_\rho$, $\boldsymbol{e}_\phi$ och $\boldsymbol{e}_z$ (med BETAs beteckningar; Matthews skriver R i stället för ρ).

Lösning: $\boldsymbol{F} = F_\rho\, \boldsymbol{e}_\rho + F_\phi\, \boldsymbol{e}_\phi + F_z\, \boldsymbol{e}_z \Longrightarrow$

$$\operatorname{rot}\ \boldsymbol{F} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_\rho & \rho\, \boldsymbol{e}_\phi & \boldsymbol{e}_z \\ \partial/\partial\rho & \partial/\partial\phi & \partial/\partial z \\ F_\rho & \rho F_\phi & F_z \end{vmatrix}.$$

$$F_\rho = 1,\ F_\phi = F_z = 0 \Longrightarrow \operatorname{rot} \boldsymbol{e}_\rho = \boldsymbol{0},$$
$$F_\rho = 0,\ F_\phi = 1,\ F_z = 0 \Longrightarrow \operatorname{rot} \boldsymbol{e}_\phi = \frac{1}{\rho}\, \boldsymbol{e}_z,$$
$$F_\rho = F_\phi = 0,\ F_z = 1 \Longrightarrow \operatorname{rot} \boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{0}.$$

KTH Matematik
Olle Stormark

Lösningsförslag till KS 2B

i SF1649 Vektoranalys och komplexa funktioner för CELTE, vt 2010.

- Varje uppgift ger maximalt 3 poäng.
- För godkänt krävs minst 5 poäng sammanlagt.

1. Låt γ vara skärningen mellan halvsfären $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 = 16, z \geq 0\}$ och cylindern $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 = 4\}$, och låt $\boldsymbol{F} = (y^2 + z^2, x^2 + y^2, x^2 + y^2)$. Använd Stokes' sats för att beräkna linjeintegralen
$$\oint_\gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r},$$
där γ genomlöps motsols sett uppifrån z-axeln.

   Lösning:
$$\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ y^2 + z^2 & x^2 + y^2 & x^2 + y^2 \end{vmatrix} = (2y, 2z - 2x, 2x - 2y).$$
Om Σ är cirkelskivan $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 \leq 4,\ z = 2\sqrt{3}\}$, så är $\gamma = \partial\Sigma$ och $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{e}_z$, och enligt Stokes är då
$$\oint_\gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \iint_\Sigma \operatorname{rot} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, dS = 2 \iint_{x^2+y^2 \leq 4} (x - y)\, dxdy = 0$$
av symmetriskäl (eller med hjälp av polära koordinater).

2. Låt $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2+y^2+z^2 \leq 4,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}$, låt $\partial\Omega$ vara Ω:s randyta med den utåtriktade enhetsnormalen $\boldsymbol{n}$, och låt $\boldsymbol{F} = (x^2, -2xy, 3xz)$. Använd divergenssatsen för att beräkna flödesintegralen

$$\iint_{\partial\Omega} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, dS.$$

Lösning: $\operatorname{div} \boldsymbol{F} = 2x - 2x + 3x = 3x \Longrightarrow$

$$\begin{aligned}
\iint_{\partial\Omega} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, dS &= \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \boldsymbol{F}\, dV = \iiint_{\Omega} 3x\, dV \\
&= \int_{r=0}^{2} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{\phi=0}^{\pi/2} 3r \sin\theta \cos\phi \cdot r^2 \sin\theta \, dr d\theta d\phi \\
&= \frac{3}{4}\big[r^4\big]_0^2 \cdot \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\theta\right) d\theta \cdot [\sin\phi]_0^{\pi/2} \\
&= \frac{3}{4} \cdot 4^2 \cdot \left[\frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^{\pi/2} \cdot 1 = 3 \cdot 4 \cdot \frac{\pi}{4} = 3\pi.
\end{aligned}$$

3. Beräkna rotationen av var och en av de sfäriska basvektorerna $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\theta$ och $\boldsymbol{e}_\phi$.

Lösning: $\boldsymbol{F} = F_r\, \boldsymbol{e}_r + F_\theta\, \boldsymbol{e}_\theta + F_\phi\, \boldsymbol{e}_\phi \Longrightarrow$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_r & r\, \boldsymbol{e}_\theta & r\sin\theta\, \boldsymbol{e}_\phi \\ \partial/\partial r & \partial/\partial\theta & \partial/\partial\phi \\ F_r & r\, F_\theta & r\sin\theta\, F_\phi \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&F_r = 1,\ F_\theta = F_\phi = 0 \Longrightarrow \operatorname{rot} \boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{0}, \\
&F_r = 0,\ F_\theta = 1,\ F_\phi = 0 \Longrightarrow \operatorname{rot} \boldsymbol{e}_\theta = \frac{1}{r}\, \boldsymbol{e}_\phi, \\
&F_r = F_\theta = 0,\ F_\phi = 1 \Longrightarrow \operatorname{rot} \boldsymbol{e}_\phi = \frac{r\cos\theta\, \boldsymbol{e}_r - r\sin\theta\, \boldsymbol{e}_\theta}{r^2 \sin\theta} = \frac{\cot\theta}{r}\, \boldsymbol{e}_r - \frac{1}{r}\, \boldsymbol{e}_\theta.
\end{aligned}$$

KTH Matematik
Olle Stormark

Lösningsförslag till KS 3A

i SF1649 Vektoranalys och komplexa funktioner för CELTE, vt 2010.

- Varje uppgift ger maximalt 3 poäng.
- För godkänt krävs minst 5 poäng sammanlagt.

1. Bestäm alla värden av $(-1+i\sqrt{3})^i$, och ange dem på formen $a+ib$, där a och b är reella tal.

   Lösning:

   $$-1+i\sqrt{3} = 2\cdot e^{i2\pi/3} \Longrightarrow \log(-1+i\sqrt{3}) = \ln 2 + i(2\pi/3 + n\cdot 2\pi)$$
   $$\Longrightarrow (-1+i\sqrt{3})^i = e^{i\log(-1+i\sqrt{3})} = e^{i\ln 2 - 2\pi/3 - n\cdot 2\pi} =$$
   $$= e^{-2\pi/3-n\cdot 2\pi}\cdot\cos(\ln 2) + i\, e^{-2\pi/3-n\cdot 2\pi}\cdot\sin(\ln 2),\ \text{där } n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

2. Visa direkt från definitionen av $\sin z$ respektive $\cos z$ att
   $$\cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z.$$

   Lösning:

   $$\begin{aligned}\cos^2 z - \sin^2 z &= \left(\frac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz})\right)^2 - \left(\frac{1}{2i}(e^{iz}-e^{-iz})\right)^2 \\ &= \frac{1}{4}(e^{2iz}+2+e^{-2iz}+e^{2iz}-2+e^{-2iz}) = \frac{1}{2}(e^{2iz}+e^{-2iz}) \\ &= \cos 2z.\end{aligned}$$

3. Bestäm bilden av halvbandet $\{z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Re} z > 0,\, 0 < \operatorname{Im} z < \pi/2\}$ under avbildningen $w = e^z$.

   Lösning: $w = e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} \iff |w| = e^x$ och $\arg w = y$. $0 < x < \infty \Longrightarrow 1 < |w| < \infty$, $0 < y < \pi/2 \Longrightarrow 0 < \arg w < \pi/2$, varför bilden blir $\{w \in \mathbb{C}\colon |w| > 1,\, 0 < \arg w < \pi/2\}$ eller $\{w \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Re} w > 0,\, \operatorname{Im} w > 0,\, |w| > 1\}$.

KTH Matematik
Olle Stormark

Lösningsförslag till KS 3B

i SF1649 Vektoranalys och komplexa funktioner för CELTE, vt 2010.

- Varje uppgift ger maximalt 3 poäng.
- För godkänt krävs minst 5 poäng sammanlagt.

1. Bestäm alla värden av $(\sqrt{3}-i)^i$, och ange dem på formen $a+ib$, där a och b är reella tal.

   Lösning:

   $$\sqrt{3}-i = 2\cdot e^{-i\pi/6} \Longrightarrow \log(\sqrt{3}-i) = \ln 2 - i\pi/6 + in\cdot 2\pi$$
   $$\Longrightarrow (\sqrt{3}-i)^i = e^{i\log(\sqrt{3}-i)} = e^{i\ln 2+\pi/6-n\cdot 2\pi} =$$
   $$= e^{\pi/6-n\cdot 2\pi}\cdot\cos(\ln 2) + i\,e^{\pi/6-n\cdot 2\pi}\cdot\sin(\ln 2),\ \text{där } n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

2. Visa direkt från definitionen av $\sin z$ respektive $\cos z$ att

   $$\sin 2z = 2\sin z\cos z.$$

   Lösning:

   $$\begin{aligned} 2\sin z\cos z &= 2\cdot\frac{1}{2i}(e^{iz}-e^{-iz})\cdot\frac{1}{2}\,(e^{iz}+e^{-iz}) \\ &= \frac{1}{2i}(e^{2iz}+1-1-e^{-2iz}) = \frac{1}{2i}(e^{2iz}-e^{-2iz}) \\ &= \sin 2z. \end{aligned}$$

3. Bestäm bilden av halvbandet $\{z\in\mathbb{C}\colon \operatorname{Re} z<0,\ 0<\operatorname{Im} z<\pi/2\}$ under avbildningen $w=e^z$.

   Lösning: $w = e^z = e^{x+iy} = e^x\cdot e^{iy} \iff |w| = e^x$ och $\arg w = y$. $-\infty < x < 0 \Longrightarrow 0 < |w| < 1$, $0 < y < \pi/2 \Longrightarrow 0 < \arg w < \pi/2$, varför bilden blir $\{w\in\mathbb{C}\colon |w|<1,\ 0<\arg w<\pi/2\}$ eller $\{w\in\mathbb{C}\colon \operatorname{Re} w>0,\ \operatorname{Im} w>0,\ |w|<1\}$.