KTH Matematik
Olle Stormark

SF1649 Vektoranalys och komplexa funktioner 7,5 hp för CMIEL ht 2010

Ett *vektorfält* $\boldsymbol{F}$ är en vektorvärd funktion, som till varje punkt $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ i rummet associerar en vektor

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = (F_1(x_1, x_2, x_3), F_2(x_1, x_2, x_3), F_3(x_1, x_2, x_3)).$$

I *vektoranalysen* studerar man *derivator* och *integraler* av vektorfält. De grundläggande derivationsoperatorerna är

$$\begin{aligned} \text{grad} : \quad & \text{funktioner} \to \text{vektorfält} \\ & \phi(x_1, x_2, x_3) \mapsto (\partial\phi/\partial x_1, \partial\phi/\partial x_2, \partial\phi/\partial x_3), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{div} : \quad & \text{vektorfält} \to \text{funktioner} \\ & (F_1, F_2, F_3) \mapsto \partial F_1/\partial x_1 + \partial F_2/\partial x_2 + \partial F_3/\partial x_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{rot} : \quad & \text{vektorfält} \to \text{vektorfält} \\ & (F_1, F_2, F_3) \mapsto \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}, \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}, \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right). \end{aligned}$$

Dessa uppträder till exempel i Maxwells ekvationer, som utgör basen för den *elektromagnetiska fältteorien*:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \boldsymbol{E} = \rho/\epsilon_0, \\ \operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0, \\ \operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\partial \boldsymbol{B}/\partial t, \\ \operatorname{rot} \boldsymbol{B} = \mu_0\, \boldsymbol{i} + \mu_0 \epsilon_0\, \partial \boldsymbol{E}/\partial t, \end{cases}$$

där $\boldsymbol{E}$ = elektriska fältet, $\boldsymbol{B}$ = magnetiska fältet, ρ = laddningstätheten, $\boldsymbol{i}$ = strömtätheten och μ_0, ϵ_0 är vissa konstanter.

En intressant sammansättning av differentialoperatorerna ovan är *Laplaceoperatorn* $\Delta = \operatorname{div}\operatorname{grad}$:

$$\begin{aligned}\Delta: \quad &\text{funktioner} \to \text{funktioner} \\ &\phi(x_1, x_2, x_3) \mapsto \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_k^2}.\end{aligned}$$

Funktioner ϕ som uppfyller Laplaces ekvation $\Delta\phi = 0$ sägs vara *harmoniska*.

Det så kallade *Dirichletproblemet*

$$\begin{cases} \Delta\phi = 0 \text{ i ett område } \mathcal{D}, \\ \text{restriktionen av } \phi \text{ till } \mathcal{D}\text{:s rand är en given funktion,} \end{cases}$$

är av fundamental betydelse i den matematiska fysiken.

Integralkalylens fundamentalsats

$$\int_a^b \frac{dF}{dx}\, dx = F(b) - F(a)$$

har följande generaliseringar:

$$\textit{divergenssatsen} \qquad \iiint_\Omega \operatorname{div} \boldsymbol{F}\, dV = \iint_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, dS,$$

där S = begränsningsytan för kroppen Ω, dV = volymselementet, dS = ytelementet och $\boldsymbol{n}$ = den utåtriktade enhetsnormalen för ytan S, och

$$\textit{Stokes' sats} \qquad \iint_S \operatorname{rot} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, dS = \oint_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r},$$

där C = randkurvan till ytstycket S.

I växelströmsteorien visar det sig att beräkningarna blir *mycket enklare* om man accepterar *komplexa frekvenser* ω, vilket gör att teorien för *komplexvärda funktioner av en komplex variabel*:

$$w = f(z), \text{ där } z = x + iy \text{ och } w = u + iv \text{ är komplexa variabler,}$$

blir relevant. En sådan funktion kan alternativt ses som en reell avbildning från xy-planet till uv-planet:

$$\begin{cases} u = u(x, y), \\ v = v(x, y). \end{cases}$$

$f(z)$ sägs vara *analytisk* om derivatan $f'(z)$ finns. I så fall uppfyller u och v de så kallade *Cauchy-Riemann ekvationerna*:

$$\begin{cases} \partial u/\partial x = \partial v/\partial y, \\ \partial u/\partial y = -\partial v/\partial x, \end{cases}$$

från vilka det följer att u och v är *harmoniska*: $\Delta u = \Delta v = 0$.

I vår kurs ska vi först bekanta oss med de elementära funktionerna: e^z, $\log z$, $\sin z, \ldots$ och sedan lära oss hur man kan använda dessa för att lösa Dirichletproblem i planet.

Det primära syftet med denna kurs är att ge nödvändiga förkunskaper för ämnet *elektromagnetisk fältteori.*

KURSMÅL

Efter genomgången kurs SKALL teknologerna kunna följande:

Vektoranalys

- redogöra för begreppen divergens, rotation och gradient, kunna beräkna divergensen och rotationen av vektorfält samt gradienten av funktioner
- förenkla och omforma vektoranalytiska uttryck med hjälp av nablakalkyl
- beräkna flödesintegraler över (i allmänhet krökta) ytor i rummet, givna i parameter- eller ekvationsform
- redogöra för divergenssatsen och kunna använda den vid beräkning av integraler
- beräkna linjeintegraler i rummet och kunna avgöra när de är oberoende av integrationsvägen
- redogöra för Stokes' sats och kunna använda den i samband med beräkning av linje- och flödesintegraler
- avgöra när ett vektorfält har en skalärpotential och kunna bestämma den i fall den finns
- avgöra när ett vektorfält har en vektorpotential och att i enklare fall kunna bestämma en sådan

- genomföra vektoranalytiska beräkningar av ovanstående slag inte bara i cartesiska koordinater utan även i ortogonala kroklinjiga koordinater (särskilt cylinder- och sfäriska koordinater)

- redogöra för hur Laplaces och Poissons ekvationer uppkommer inom matematisk fysik samt kunna lösa sådana i enkla fall

Komplexa funktioner

- kunna räkna obehindrat med de komplexa talen i cartesisk och polär framställning, kunna tolka relationer mellan komplexa tal geometriskt i enkla fall, kunna bestämma spegelpunkter med avseende på räta linjer och cirklar

- veta vad som menas med en analytisk funktion och kunna avgöra om en given funktion är analytisk eller ej, till exempel genom att kontrollera Cauchy-Riemann ekvationerna

- veta vad som menas med en konform avbildning

- veta vad som menas med en harmonisk funktion och kunna, till en given harmonisk funktion, bestämma en harmoniskt konjugerad funktion

- kunna redogöra för de elementära analytiska funktionerna, till exempel kunna definiera dem, beräkna deras derivator, utreda eventuella mångtydigheter samt bestämma inversa funktioner

- veta vad som menas med en Möbiustransformation och kunna avgöra hur en given Möbiustransformation avbildar ett cirkelområde eller ett halvplan; och omvänt, givet två sådana områden kunna bestämma en Möbiustransformation som avbildar det ena på det andra

- i enkla fall kunna avgöra hur andra elementära funktioner avbildar olika områden, och omvänt, kunna hitta en analytisk funktion som utför en given avbildning

- kunna lösa vissa randvärdesproblem för Laplaces ekvation genom konform avbildning på *enkla* områden (till exempel halvplan och cirkelskivor), där det är lätt att hitta lösningar.

Kurslitteratur

- P.C. Matthews, *Vector Calculus*, Springer Undergraduate Mathematics Series, 1998. I kursen ingår kapitlen 1–6 samt avsnitten 8.1 och 8.2.

- Råde - Westergren, BETA, *Mathematics Handbook for Science and Engineering*, Studentlitteratur. Det är tillåtet att använda BETA vid KS:ar och tentor. **Observera** att kapitel **11** samt avsnitten **1** och **5** i kapitel **14** ger en utmärkt sammanfattning av kursen.

- Exempelsamling i vektoranalys (PDF-fil på hemsidan).

- Olle S, *Komplexa funktioner* (PDF-fil på hemsidan). I kursen ingår hela kompendiet *utom* kapitel 8: $i\omega$-metoden.

- Olle S, *Exempelsamling i komplexa funktioner* (PDF-fil på hemsidan). OBSERVERA: Facit stämmer ofta, men *inte alltid*.

Matthews och BETA kan köpas i Studentkårens bokhandel.

Förkunskaper: Linjär algebra samt en- och flervariabelsanalys. Dessutom krävs en *god portion av fighting spirit*.

Undervisningen ges i form av lektioner.

Lärare Olle Stormark (olles@math.kth.se); sitter i rum 3653 i Klocktornet, Lindstedtsvägen 25 KTH, och har telefonnumret 7907206.

Kurssekreterare Kerstin Engstrand (kerstin@kth.se) med telefonnumret 7906149. Kerstin (men alltså *inte Olle*) har hand om kursregistrering, inrapportering av betyg, samt anmälan till tentor om *Mina Sidor* inte fungerar.

Kontrollskrivningar Det ges tre KS:ar, två på vektoranalysdelen, och en på komplexa funktioner. Godkända KS:ar tillgodoräknas på CMIEL:s ordinarie tenta och första omtenta på så sätt att godkänt på KS i ($i = 1, 2$ eller 3) ger godkänt = 3 poäng på tentatal i.

Tentamensskrivningen omfattar cirka 8 tal, och man kan maximalt få 26 poäng. **Betygsgränser**:

- 24–26 p $\Longrightarrow$ A,

- 21–23 p $\Longrightarrow$ B,

- 18–20 p $\Longrightarrow$ C,

- 15–17 p $\Longrightarrow$ D,
- 12–14 p $\Longrightarrow$ E,
- 11 p $\Longrightarrow$ Fx $\Longrightarrow$ får komplettera,
- $\leq 10 \Longrightarrow$ F.

Ordinarie tentan ges måndagen den 13:e december, klockan 14.00–19.00, preliminärt i salarna D31 och D41.

Tentamensanmälan kan göras från och med den 25/10 till och med den 28/11, klockan 24.00.

Klagomål på rättningen görs skriftligt på blanketter som tillhandahålles av matematikinstitutionens studentexpedition.

PRELIMINÄR KURSPLANERING

V = Vector Calculus, **EV** = Exempelsamling i vektoranalys, **K** = Kompendium i komplexa funktioner, **EK** = exempelsamling i komplexa funktioner.

Läxtal: Observera att **V** innehåller *kompletta lösningar* till *samtliga* övningsexempel! Några av de svårare gås igenom på tavlan, men resten ska Osquarulda av ren självbevarelsedrift *räkna själv*!!!

Lektion 1 mån 25/10 15–17 i 530: Inledning till kursen samt den vektoralgebra som finns i början av kapitel 1 i **V**. Räkna 1 och 3 i **EV**.

Lektion 2 tis 26/10 10–12 i 530: Resten av kapitel 1 i **V**. Räkna 6 och 9 i **EV**.

Lektion 3 tis 26/10, 13–15 i C21: Linjeintegraler i rummet, avsnitten 2.1 och 2.2 i **V**. Räkna 26a, 30 och 32 i **EV**.

Lektion 4 tor 28/10 10–12 i 530: Flödesintegraler och volymsintegraler, avsnitten 2.3 och 2.4 i **V**. Räkna 33a,d och 34 i **EV**.

Lektion 5 fre 29/10 13–15 i 530: Gradienten, avsnitten 3.1 och 3.2 i **V**. Räkna 13, 18 och 21 i **EV**.

Lektion 6 mån 1/11 15–17 i 530: Divergens och rotation, avsnitten 3.3 och 3.4 i **V**. Räkna 37a,d,f och 42 i **EV**.

Lektion 7 tis 2/11 10–12 i 530: Början på indexräkning, avsnitten 4.1–4.3 i **V**.

Lektion 8 tor 4/11 10–12 i 530: Fortsättning: grad, div och rot med indexräkning, avsnitten 4.4 och 4.5 i **V**. Räkna 63a,b,c,d i **EV**.

Lektion 9 fre 5/11 13–15 i 530: ”Produktformler” för grad, div och rot, avsnitten 4.6 och 4.7 i **EV**. Räkna 64a,b,c och 67 i **EV**.

Lektion 10 tis 9/11 10–12 i 530: Divergenssatsen, avsnitt 5.1 i **V**. Räkna 72, 74 och 80 i **EV**.

Lektion 11 tor 11/11 10–12 i 530: Stokes' sats, avsnitt 5.2 i **V**. Räkna 83 och 86 i **EV**.

Lektion 12 fre 12/11 13–15 i 530: Sammanfattning av kapitel 5 i **V**.

Lektion 13 mån 15/11 15–17 i 530: Ortogonala kroklinjiga koordinater, avsnitten 6.1 och 6.2.1 i **V**.

Lektion 14 tis 16/11 10–12 i 530: Divergens och rotation i kroklinjiga koordinater, avsnitten 6.2.2 och 6.2.3 i **V**.

KS 1 på kapitlen 1–4 i V tis 16/11 13–15 i C21.

Lektion 15 tor 18/11 10–12 i 530: Cylinderkoordinater och sfäriska koordinater, avsnitten 6.3 och 6.4 i **V**. Räkna 89, 95, 96, 98 och 103 i **EV**.

Lektion 16 fre 19/11 10–12 i 530: Värmeledningsekvationen, Laplaces ekvation och början på elektromagnetism, avsnitten 8.1 och 8.2 i **V**. Räkna 127 och 132 i **EV**.

Lektion 17 fre 19/11 13–15 i 530: Mera elektromagetism, avsnitt 8.2 i **EV**.

Lektion 18 mån 22/11 15–17 i 530: Komplexa tal, kapitel 2 i **K**. Räkna 1a, 2a, 6a, 6d och 9a i **EK**.

Lektion 19 tis 23/11 10–12 i 530: Riemannsfären, kapitel 3 i **K**. Räkna 13a, 14a och 14c i **EK**.

Lektion 20 tis 23/11 13–15 i C21: Polynom och exponentialfunktionen, kapitel 4 i **K**. Räkna 20a, 20b och 21a i **EK**.

Lektion 21 tor 25/11 10–12 i 530: Början på Cauchy-Riemann ekvationerna, kapitel 5 i **K**. Räkna 16a och 16b i **EK**.

Lektion 22 fre 26/11 10–12 i 530: Fortsättning på Cauchy-Riemann ekvationerna, kapitel 5 i **K**. Räkna 16d i **EK**.

KS 2 på kapitlen 5,6 och 8 i V fre 26/11 13–15 i 530.

Lektion 23 mån 29/11 15–17 i 530: Början på elementära funktioner, kapitel 6 i **K**. Räkna 22, 25a och 25c i **EK**.

Lektion 24 tis 30/11 10–12 i 530: Fortsättning på elementära funktioner, kapitel 6 i **K**. Räkna 29 och 31 i **EK**.

Lektion 25 tis 30/11 13–15 i C21: Flertydiga funktioner, kapitel 7 i **K**. Räkna 32 i **EK**.

Lektion 26 tor 2/12 10–12 i 530: Laplaces ekvation och konforma avbildningar, kapitel 9 i **K**.

Lektion 27 fre 3/12 10–12 i 530: Början på Möbiusfunktionen, kapitel 10 i **K**. Räkna 39 och 40 i **EK**.

Lektion 28 fre 3/12 13–15 i 530: Fortsättning på kapitel 10 i **K**. Räkna 43 i **EK**.

Lektion 29 mån 6/12 15–17 i 530: Konforma avbildningar, kapitel 11 i **K**. Räkna 46, 48 och 50 i **EK**.

Lektion 30 tis 7/12 10–12 i 530: Flera konforma avbildningar, kapitel 11 i **K**. Räkna 53 och 54 i **EK**.

KS 3 på kapitlen 1–7 och 9 i K tis 7/12 13–15 i C21.

Lektion 31 tor 9/12 10–12 i 530: Början på randvärdesproblem, kapitel 12 i **K**. Räkna 55 och 57 i **EK**.

Lektion 32 fre 10/12 10–12 i 530: Fortsättning på randvärdesproblem, kapitel 12 i **K**. Räkna 61 i **EK**.

Lektion 33 fre 10/12 13–16 i 530: Genomgång av gammal tentamen.

Tentamen mån 13/12 14–19, preliminärt i D31 och D41.