

**Lösning till SF1649 Vektoranalys och komplexa funktioner
för CMIEL 2010–12–13, kl. 14.00–19.00.**

- Hjälpmedel: Handboken BETA och TET:s inplastade formelblad.
 - Du som har fått godkänt på kontrollskrivning i (där $i = 1, 2, 3$) får automatiskt full poäng på tal i .
 - Betygsgränser: 24–26 poäng ger betyget A, 21–23 poäng ger betyget B, 18–20 poäng ger betyget C, 15–17 poäng ger betyget D och 12–14 poäng ger betyget E.
 - Om du har fått 11 poäng så får du betyget Fx och har då möjlighet att göra en kompletteringstentamen. Kontakta Olle i så fall. Mindre än 11 poäng ger betyget F = underkänt.
 - **Samtliga behandlade uppgifter skall förses med utförliga och tydliga lösningar! Bristande läsbarhet medför poängavdrag!!**
1. Visa först att vektorfältet $\mathbf{F} = e^{xyz} (yz, xz, xy)$ är konservativt, och beräkna sedan linjeintegralen

$$\int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \quad (3p)$$

Lösning: Man ser lätt att $\mathbf{F} = \text{grad } \phi$ med $\phi = e^{xyz}$, så att

$$\begin{aligned} \int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} \text{grad } \phi \cdot d\mathbf{r} = \int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} d\phi \\ &= \phi(1, 1, 1) - \phi(0, 0, 0) = e - 1. \end{aligned}$$

2. Låt $\mathbf{F} = (1, 0, z)$, $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$, och låt $\hat{\mathbf{n}}$ vara den enhetsnormal till Σ som har en positiv z -komponent. Beräkna flödesintegralen

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS. \quad (3p)$$

Lösning: Sätt $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + (y - 1)^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0\}$ och $\Sigma^* = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + (y - 1)^2 + z^2 \leq 1, z = 0\}$. Då är $\partial\Omega = \Sigma \cup \Sigma^*$, och enligt Gauss är

$$\iint_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = \iint_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS + \iint_{\Sigma^*} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV.$$

$\operatorname{div} \mathbf{F} = 1 \implies \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV = \text{volymen av halvklotet } \Omega = \frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi}{3} \cdot 1^3 = 2\pi/3$. På Σ^* är $\mathbf{F} = (1, 0, 0)$ och $\hat{\mathbf{n}} = (0, 0, -1)$, så $\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$, och därmed blir $\iint_{\Sigma^*} = 0$. Så tillsammans fås

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = 2\pi/3.$$

3. Visa att $u(x, y) = 2x(1 - y)$ satisfierar Laplaces ekvation, och härled sedan en deriverbar komplex funktion $f(z)$ som uppfyller $\operatorname{Re} f(z) = u(x, y)$. (3p)

Lösning: Man ser lätt att $\partial^2 u / \partial x^2 = \partial^2 u / \partial y^2 = 0$, så $\Delta u = 0$. Den sökta funktionen $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ fås sedan genom att lösa ut v ur CR-ekvationerna:

$$\partial v / \partial y = \partial u / \partial x = 2 - 2y \implies v = 2y - y^2 + g(x);$$

$$\partial v / \partial x = g'(x) = -\partial u / \partial y = 2x \implies g = x^2 + C \implies v = 2y - y^2 + x^2 + C.$$

Därmed blir

$$\begin{aligned} f(z) &= u + iv = 2x - 2xy + i \cdot 2y - i \cdot y^2 + i \cdot x^2 + iC \\ &= 2(x + iy) + i(x^2 + i \cdot 2xy + (iy)^2) + iC = 2z + iz^2 + iC. \end{aligned}$$

4. Divergenssatsen säger att

$$\iint_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV.$$

(a) Använd denna för att visa följande variant:

$$\iint_{\partial\Omega} \mathbf{F} \times \hat{\mathbf{n}} \, dS = - \iiint_{\Omega} \operatorname{rot} \mathbf{F} \, dV. \quad (3p)$$

LEDNING: Skalärmultiplicera med en konstant vektor.

Lösning: Låt \mathbf{a} vara en *godtycklig* konstant vektor. Då blir

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \iint_{\partial\Omega} \mathbf{F} \times \hat{\mathbf{n}} \, dS &= \{\mathbf{a} \cdot (\mathbf{F} \times \hat{\mathbf{n}}) = \hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{F})\} \\ &= \iint_{\partial\Omega} (\mathbf{a} \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} (\mathbf{a} \times \mathbf{F}) \, dV. \end{aligned}$$

Här är

$$\begin{aligned} \operatorname{div} (\mathbf{a} \times \mathbf{F}) &= \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j,k} \epsilon_{ijk} a_j F_k \right) = \sum_j a_j \cdot \left(\sum_{i,k} \epsilon_{ijk} \frac{\partial F_k}{\partial x_i} \right) \\ &= \sum_j a_j \cdot \left(- \sum_{i,k} \epsilon_{jik} \frac{\partial F_k}{\partial x_i} \right) = - \sum_j a_j \cdot (\operatorname{rot} \mathbf{F})_j \\ &= - \mathbf{a} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{F}. \end{aligned}$$

Så

$$\mathbf{a} \cdot \iint_{\partial\Omega} \mathbf{F} \times \hat{\mathbf{n}} \, dS = - \mathbf{a} \cdot \iiint_{\Omega} \operatorname{rot} \mathbf{F} \, dV;$$

sant för *alla* $\mathbf{a} \implies$

$$\iint_{\partial\Omega} \mathbf{F} \times \hat{\mathbf{n}} \, dS = - \iiint_{\Omega} \operatorname{rot} \mathbf{F} \, dV.$$

(b) Låt $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$.
Beräkna

$$\iint_{\partial\Omega} \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{n}} \, dS. \quad (1p)$$

Lösning:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{r} &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \partial/\partial x_1 & \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = \mathbf{0} \\ \implies \iint_{\partial\Omega} \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{n}} \, dS &= - \iiint_{\Omega} \operatorname{rot} \mathbf{r} \, dV = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

5. I Cartesiska koordinater används de *konstanta* basvektorerna $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$ och $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$. Det är då naturligt att definiera Laplaceoperatoren Δ verkande på vektorfält genom

$$\Delta \mathbf{F} = \Delta \left(\sum_{i=1}^3 F_i \mathbf{e}_i \right) = \sum_{i=1}^3 \Delta F_i \mathbf{e}_i.$$

- (a) Visa att

$$\Delta = \text{grad div} - \text{rot rot} \quad (*)$$

i det Cartesiska fallet.

$$\text{LEDNING: } \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}. \quad (2p)$$

Lösning:

$$\begin{aligned} (\text{rot rot } \mathbf{F})_i &= \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} (\nabla \times \mathbf{F})_k = \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \sum_{l,m} \epsilon_{klm} \frac{\partial}{\partial x_l} F_m \\ &= \sum_{j,l,m} \left(\sum_k \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} \right) \frac{\partial^2 F_m}{\partial x_j \partial x_l} = \sum_{j,l,m} (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \frac{\partial^2 F_m}{\partial x_j \partial x_l} \\ &= \sum_j \left(\frac{\partial^2 F_j}{\partial x_j \partial x_i} - \frac{\partial^2 F_i}{\partial x_j \partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_j \frac{\partial F_j}{\partial x_j} - \left(\sum_j \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \right) F_i \\ &= (\nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}))_i - \Delta F_i \implies \text{rot rot } \mathbf{F} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \Delta \mathbf{F} \\ &\implies \Delta = \text{grad div} - \text{rot rot}. \end{aligned}$$

- (b) Högerledet i (*) är koordinatoberoende, och därför kan (*) tas som definition av Δ verkande på vektorfält i det allmänna fallet.

Låt r , θ och ϕ vara sfäriska koordinater. Beräkna

$$\Delta \mathbf{e}_\phi. \quad (1p)$$

Lösning:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{e}_\phi &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} (r \cdot 1) = 0 \implies \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{e}_\phi = 0; \\ \operatorname{rot} \mathbf{e}_\phi &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r \mathbf{e}_\theta & r \sin \theta \mathbf{e}_\phi \\ \partial/\partial r & \partial/\partial \theta & \partial/\partial \phi \\ 0 & 0 & r \sin \theta \cdot 1 \end{vmatrix} = \frac{\cot \theta}{r} \mathbf{e}_\phi - \frac{1}{r} \mathbf{e}_\theta \\ \implies \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{e}_\phi &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r \mathbf{e}_\theta & r \sin \theta \mathbf{e}_\phi \\ \partial/\partial r & \partial/\partial \theta & \partial/\partial \phi \\ \cot \theta/r & -r \cdot 1/r & 0 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{r} \frac{-\partial(\cot \theta)/d\theta}{r} = \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \mathbf{e}_\phi. \end{aligned}$$

Så

$$\Delta \mathbf{e}_\phi = \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \mathbf{e}_\phi.$$

6. Låt Ω vara ett område i \mathbb{R}^3 med randytan $\partial\Omega$. Antag att funktionen ϕ är konstant = C på $\partial\Omega$ och att vektorfältet \mathbf{F} är divergensfritt: $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$. Beräkna

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{grad} \phi \cdot \mathbf{F} \, dV. \quad (3p)$$

Lösning: Eftersom $\nabla \cdot (\phi \mathbf{F}) = \nabla \phi \cdot \mathbf{F} + \phi \nabla \cdot \mathbf{F} = \nabla \phi \cdot \mathbf{F}$, så blir

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \nabla \phi \cdot \mathbf{F} \, dV &= \iiint_{\Omega} \nabla \cdot (\phi \mathbf{F}) \, dV = \{ \text{Gauss} \} \\ &= \iint_{\partial\Omega} \phi \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = C \cdot \iint_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = \{ \text{Gauss igen} \} \\ &= C \cdot \iiint_{\partial\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV = 0. \end{aligned}$$

7. Visa att

$$\operatorname{Re} \left(\frac{1}{1-z} \right) = \frac{1}{2} \quad \text{då} \quad |z| = 1 \text{ och } z \neq 1. \quad (2p)$$

Lösning: Möbiusfunktionen $w = 1/(1-z)$ skickar punkten $z = 1$ på enhetscirkeln i z -planet till $w = \infty$, och därmed blir bilden av enhetscirkeln en rät linje. Eftersom $w(-1) = 1/2$, går denna genom $w = 1/2$. Reella z -axeln avbildas på reella w -axeln, och vinkeln $\pi/2$

mellan enhetscirkeln och reella z -axeln vid $z = -1$ bevaras, så bildlinjen blir ortogonal mot reella w -axeln vid $w = 1/2$. Och ges alltså av $\operatorname{Re} w = 1/2$. Det vill säga,

$$\operatorname{Re} \left(\frac{1}{1-z} \right) = \frac{1}{2}.$$

8. Lös Dirichletproblemet

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 & \text{då } x < 0 \text{ och } 0 < y < \pi, \\ \phi(x, 0) = \phi(x, \pi) = 0 & \text{då } x < 0, \\ \phi(0, y) = 1 & \text{då } 0 < y < \pi, \end{cases}$$

och kontrollera sedan att den funna lösningen verkligen satisfierar randvillkoren. (5p)

Lösning: Vi avbildar först området $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 0 \text{ och } 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$ på ett enklare område med hjälp av en konform avbildning – varvid Laplaces ekvation bevaras.

Börja med

$$w_1 = e^z.$$

Horisontella linjen $\{x < 0, y = 0\}$ avbildas då på räta linjestycket $\{0 < u_1 < 1, v_1 = 0\}$, vertikala linjen $\{x = 0, 0 < y < \pi\}$ på halvcirkeln $\{u_1^2 + v_1^2 = 1, v_1 > 0\}$ och den horisontella linjen $\{x < 0, y = \pi\}$ på linjestycket $\{-1 < u_1 < 0, v_1 = 0\}$. Härav följer att bilden av halvbandet blir övre halvan av enhetsskivan i w_1 -planet – det vill säga en cirkeltvåhörning.

Skicka härnäst hörnpunkten -1 till 0 och hörnpunkten 1 till ∞ med hjälp av Möbiusfunktionen

$$w_2 = \frac{w_1 + 1}{w_1 - 1} = \frac{e^z + 1}{e^z - 1}.$$

Eftersom $w_1 = 0 \implies w_2 = -1$ ser man att randstycket $\{-1 < u_1 < 1, v_1 = 0\}$ avbildas på negativa reella w_2 -axeln. Då räta vinkeln vid $w_1 = -1$ bevaras inser man att $\{u_1^2 + u_2^2 = 1, v_1 > 0\}$ avbildas på negativa imaginära w_2 -axeln – så att bildområdet blir 3:e kvadranten i w_2 -planet.

Denna kvadrant skickas därefter till den första kvadranten i w -planet genom vridning med vinkeln $-\pi$:

$$w = e^{-i\pi} \cdot w_2 = -w_2 = \frac{1 + e^z}{1 - e^z}.$$

Vi har därmed avbildat det ursprungliga halvbandet i z -planet på första kvadranten i w -planet. Halvbandets randstycken motsvarar kvadrantens på följande sätt:

$$\begin{aligned} \{x < 0, y = 0\} &\leftrightarrow \{1 < u < \infty, v = 0\} \\ \{x < 0, y = \pi\} &\leftrightarrow \{0 < u < 1, v = 0\} \\ \{x = 0, 0 < y < \pi\} &\leftrightarrow \{u = 0, 0 < v < \infty\}. \end{aligned}$$

Detta betyder att vi får följande Dirichletproblem i uv -planet:

$$\begin{cases} \Delta \phi = 0 & \text{då } u > 0, v > 0, \\ \phi(u, 0) = 0 & \text{då } u > 0, \\ \phi(0, v) = 1 & \text{då } v > 0. \end{cases}$$

En uppenbar lösning till detta problem är

$$\phi(u, v) = \frac{2}{\pi} \arg w = \frac{2}{\pi} \arctan \frac{v}{u},$$

eftersom $\log w = \ln |w| + i \arg w$ är komplext deriverbar då $w \neq 0$, varför imaginärparten $\arg w$ är harmonisk utanför origo.

Låt oss tillslut gå tillbaka till xy -variablerna:

$$\phi(x, y) = \frac{2}{\pi} \arctan \frac{\operatorname{Im} \frac{1+e^z}{1-e^z}}{\operatorname{Re} \frac{1+e^z}{1-e^z}},$$

där

$$\begin{aligned} \frac{1 + e^z}{1 - e^z} &= \frac{1 + e^x \cos y + i e^x \sin y}{1 - e^x \cos y - i e^x \sin y} \cdot \frac{(1 - e^x \cos y) + i e^x \sin y}{(1 - e^x \cos y) + i e^x \sin y} \\ &= \frac{1 - e^{2x} \cos^2 y - e^{2x} \sin^2 y + i e^x \sin y (1 + e^x \cos y + 1 - e^x \cos y)}{\dots} \\ &= \frac{1 - e^{2x} + i \cdot 2e^x \sin y}{\dots}, \end{aligned}$$

så att

$$\frac{\operatorname{Im} \frac{1+e^z}{1-e^z}}{\operatorname{Re} \frac{1+e^z}{1-e^z}} = \frac{2e^x \sin y}{1 - e^{2x}}.$$

Vi får alltså följande svar:

$$\phi(x, y) = \frac{2}{\pi} \arctan \left(\frac{2e^x \sin y}{1 - e^{2x}} \right) \quad \text{då } x < 0 \text{ och } 0 < y < \pi.$$

Kontroll av randvärdena:

$$\begin{aligned} y = 0 \text{ eller } \pi &\implies \sin y = 0 \implies \phi(x, 0) = \phi(x, \pi) = 0; \\ x \nearrow 0 &\implies 1 - e^{2x} \searrow 0 \implies \phi(1, y) \rightarrow \frac{2}{\pi} \arctan \infty = 1. \end{aligned}$$