KTH, Matematik
Gunnel Roman och Maria Saprykina

Tentamen i SF1659, Matematik Baskurs 2010, 04-10-2010
Lösningsförslag.

1. Lös ekvationen $\dfrac{1}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + 1$.

Lösning. Alla uttryck i ekvationen är definierade bara för $x > 0$. För $x > 0$ multiplicera ekvationen med $\sqrt{x}$. Vi får en ekvivalent ekvation: $1 - 2x = \sqrt{x}$. Kvadrerar sista ekvationen (kom ihåg att den kvadrerade ekvationen kan ha fler lösningar än den ursprungliga):

$$(1-2x)^2 = x \;\Leftrightarrow\; 4x^2 - 5x + 1 = 0.$$

Rötter är $\frac{1}{4}$ och 1. Sätt in rötterna i den ursprungliga ekvationen för att verifiera. Talet $\frac{1}{4}$ upfyller ekvationen; 1 gör inte det.
Svar: $x = \frac{1}{4}$.

2. Lös ekvationen $4^x \cdot 2^{x^2} = 8^{x^3}$.
Lösning. $4^x \cdot 2^{x^2} = 8^{x^3} \Leftrightarrow 2^{2x} \cdot 2^{x^2} = 2^{3x^3} \Leftrightarrow 2^{2x+x^2} = 2^{3x^3}$.
Eftersom funktionen $f(x) = 2^x$ är injektiv på hela $\mathbb{R}$, är detta ekvivalent med $2x + x^2 = 3x^3$. Omskrivning och faktorisering ger: $x(3x^2 - x - 2) = 0$. Detta har rötter $x = 0$, $x = 1$ och $x = -\frac{2}{3}$.
Svar: $x = 0$, $x = 1$ och $x = -\frac{2}{3}$.

3a). Beräkna exakt $\cos^2 \dfrac{\pi}{8}$.
Lösning. Kom ihåg att $\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t = 2\cos^2 t - 1$. Därför har vi formeln: $\cos^2 t = (\cos 2t + 1)/2$. Använder denna formel: $\cos^2 \frac{\pi}{8} = (\cos \frac{\pi}{4} + 1)/2 = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$.
3b). Bestäm värdet $\cos\left(\arcsin\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right)$.
Lösning. Vi vet att $\arcsin x$ är udda, och $\cos x$ är jämn. Därför har vi: $\cos(\arcsin(-1/2)) = \cos(-\arcsin(1/2)) = \cos(\arcsin(1/2))$. Beteckna $\arcsin(1/2)$ för α. Vi vill veta $\cos\alpha$. Men vi vet $\sin\alpha = \sin(\arcsin(1/2)) = 1/2$. För att bestämma $\cos\alpha$, kan man betrakta en rätvinklig triangel med hypotenusen av längd 1 och en katet av längd $1/2$. Den andra kateten har längd $\sqrt{1-(1/2)^2} = \sqrt{3}/2$. Vi ser att $\cos\alpha = \sqrt{3}/2$.

4. Lös ekvationen $\sin x \cos x = \dfrac{1}{2}\cos 5x$.
Lösning. Formeln för sinus av dubbla vinkel ger: $\frac{1}{2}\sin 2x = \frac{1}{2}\cos 5x$. Detta är ekvivalent med

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \cos 5x.$$

Vi har två uppsättningar av lösningar:
a). $\frac{\pi}{2} - 2x = 5x + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$
b). $\frac{\pi}{2} - 2x = -5x + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$

Från a). får vi: $-7x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \Leftrightarrow 7x = \frac{\pi}{2} - 2\pi k \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{14} - \frac{2}{7}\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.
Från b). får vi: $3x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

5. Lös olikheten $\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-3x+2} \geq 0$.

Lösning. Faktorisera uttrycket: $\dfrac{(x+1)^2}{(x-1)(x-2)} \geq 0$. (För att faktorisera nämnaren hitta dess rötter). Ovservera att $(x+1)^2 \geq 0$ för alla x, och tecknet av hela uttrycket sammanfaller med nämnarens tecken (för alla x då $(x-1)(x-2) \neq 0$). Den ursprungliga olikheten har samma lösningar som $(x-1)(x-2) > 0$. Detta kan undersökas grafiskt: grafen av $f(x) = (x-1)(x-2)$ är en parabel med hornen uppåt, och $(x-1)(x-2) > 0$ för $x < 1$ eller $x > 2$.

6. Lös ekvationen $2\ln x + \ln x^4 + \ln x^6 = \ln(12 - 4x^6)$.
Lösning. $2\ln x + \ln x^4 + \ln x^6 = \ln(12-4x^6) \Leftrightarrow \ln(x^2 \cdot x^4 \cdot x^6) = \ln(12-4x^6) \Leftrightarrow \ln x^{12} = \ln(12-4x^6)$. Eftersom funktionen $f(x) = \ln x$ är injektiv, är denna ekvation ekvivalent med $x^{12} = 12 - 4x^6$. För att lösa den, inför en ny variabel $y = x^6$. För y har vi ekvation $y^2 = 12 - 4y$, som är samma som $y^2 + 4y - 12 = 0$. Rötterna är: $y = -6$ och $y = 2$. $x^6 = y = -6$ ger ingen lösning; $x^6 = y = 2$ ger $x = 2^{\frac{1}{6}}$.
Svar: $x = 2^{\frac{1}{6}}$.

7. Bestäm a så att koefficienten framför x^5 i utvecklingen av $\left(\dfrac{a}{3} + 2x\right)^8$ blir 28.
Lösning. Enligt binomialsatsen,

$$\left(\frac{a}{3} + 2x\right)^8 = \sum_{k=0}^{8} \binom{8}{k} \left(\frac{a}{3}\right)^k (2x)^{8-k}.$$

Vi får termen med x^5 för $8 - k = 5$, dvs för $k = 3$. Denna term är

$$\binom{8}{3} \left(\frac{a}{3}\right)^3 (2x)^5 = \frac{8!}{3!5!} \frac{a^3}{3^3} 2^5 x^5 = 7 \cdot 8 \frac{a^3}{3^3} 2^5 x^5.$$

Vi vill att $7 \cdot 8 \frac{a^3}{3^3} 2^5 = 28 = 7 \cdot 4$. Detta förenklas till

$$2^6 a^3 = 3^3 \;\Leftrightarrow\; a = \frac{3}{4}.$$

8. Låt $f(x) = ae^{kx}$ där a och k är konstanter.
a). Visa att följande likhet gäller för godtyckliga tal x_1 och x_2:

$$\left[f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)\right]^2 = f(x_1) \cdot f(x_2);$$

(exponential-lagarna behöver inte bevisas.)

Lösning. Enligt funktionens definition och exponential-lagarna,

$$\left[f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right]^2 = \left[ae^{k\frac{x_1+x_2}{2}}\right]^2 = a^2e^{2k\frac{x_1+x_2}{2}} =$$
$$a^2e^{k(x_1+x_2)} = ae^{kx_1}\cdot ae^{kx_2} = f(x_1)\cdot f(x_2).$$

b). Beräkna med hjälp av a). $f(3)$ då $f(1)=4$ och $f(2)=3$.
Lösning. Vi vet att $f(1)=4$ och $f(2)=3$. OBS att $2=\frac{1+3}{2}$. Därför har vi:

$$(f(2))^2 = \left[f\left(\frac{1+3}{2}\right)\right]^2 = f(1)\cdot f(3).$$

Sätt in värden som vi vet:

$$3^2 = 4f(3).$$

Detta medför $f(3)=\frac{9}{4}$.

9. Använd relationen $(e^a)^b = e^{ab}$ för att bevisa formeln $\ln(s^t) = t\ln s$ för $s>0$ och $t>0$.
Lösning. Enligt definitionen av logaritm,

$$e^{\ln(s^t)} = s^t.$$

Å andra sidan, definitionen av logaritm och potens-lagen medför

$$s^t = \left(e^{\ln s}\right)^t = e^{t\ln s}.$$

Vi fick att $e^{\ln(s^t)} = e^{t\ln s}$. Eftersom funktionen $f(x)=e^x$ är injektiv, medför detta att $\ln(s^t) = t\ln s$.