

SF2715 Applied Combinatorics, Handout II

Svante Linusson

April 5 2011

In these notes we gather some facts about some sets of objects counted by Catalan numbers. We also give a number of extra exercises.

1 Catalan numbers

Note: What we here call c_n is called C_{n+1} in Cameron.

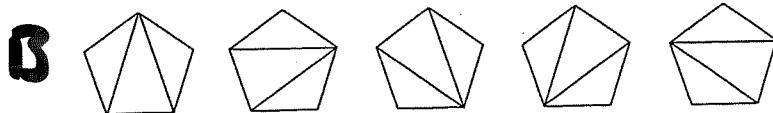
The Catalan numbers are $c_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \frac{1}{2n+1} \binom{2n+1}{n} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} = 1, 1, 2, 5, 14, 42, \dots$ and they count a great number of different objects in mathematics. A recursion for the Catalan numbers is

$$c_n = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \cdot c_{n-i-1}.$$

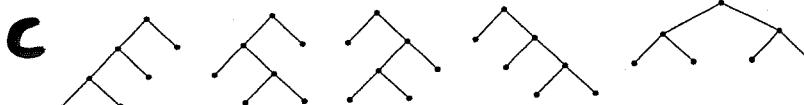
Some examples of things counted by the Catalan numbers are
A) well matched strings of n pairs of parentheses,
B) triangulations of a convex $n+2$ -gon and
C) plane binary trees (outdegree 0 or 2) with $n+1$ unlabeled leaves.

A) $((())) \quad ((())() \quad ((()) \quad ()((()) \quad ()()()$

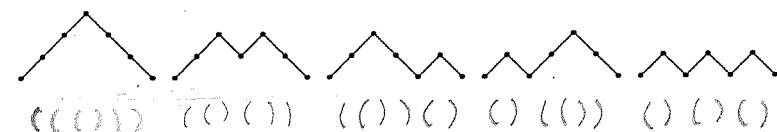
Triangulations of a convex $(n+2)$ -gon into n triangles by $n-1$ diagonals that do not intersect in their interiors:



Plane binary trees with $2n+1$ vertices (or $n+1$ endpoints):



Richard Stanley has in exercise 6.17 in his book Enumerative Combinatorics vol II a list of 68 different sets of objects counted by Catalan numbers. These have been supplemented with over 120 more on his homepage, see <http://www-math.mit.edu/~rstan/ec/catald.pdf>. An other common example, we call it D), is the set of paths in \mathbb{Z}^2 from $(0,0)$ to $(2n,0)$ with steps $(1,1)$ and $(1,-1)$ that never passes below the x -axis. Such paths are called Dyck paths. There is an easy bijection between Dyck paths and strings of parentheses, where every step $(1,1)$ corresponds to a left parentheses and $(1,-1)$ to a right parentheses.



To see that the number of Dyck paths satisfies the recursion for Catalan numbers we let $(2(i+1), 0)$ be the first position that the Dyck path returns to the x -axis. Then there are c_i ways to get there (first step is up, last step is down and inbetween the path never goes below the line $y=1$). Also c_{n-i-1} is the number of ways to continue the path to $(2n,0)$. We sum over all legal values of i and we will get the recursion (1).

A more direct combinatorial proof is as follows. First we notice that the total number of paths from $(0,0)$ to $(2n,0)$ with steps $(1,1)$ and $(1,-1)$ is $\binom{2n}{n}$ (think Pascal's triangle). We must then subtract all the bad paths, i.e. those going below the x -axis. Let s be such a path and let $(2i+1, -1)$ be the first position where this happens. Now we define the path s' by mirroring the rest of the path s in the line $y=-1$, that is s and s' are identical up to $(2i+1, -1)$ and after that every upstep is changed to a downstep and vice versa. We have in this way created a bijection (you should check the details!) between all the bad paths and all paths from $(0,0)$ to $(2n, -2)$. This later number is clearly $\binom{2n}{n-1}$ so we deduce that the number of Dyck paths is $\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}$ as we wanted to prove.

There are several interesting refinements of the Catalan numbers. One refinement is what is called the α -refinement by the French and called Ballot numbers in English. We get this refinement by refining on the height ($t+1$ below) of the last peek in the Dyck path. These numbers are most easily explained with the so called Catalan triangle:

1				
1	4	5		
1	3	9	28	
1	2	5	14	42
1	1	2	5	14

Here we see for example that $2 = 1 + 1, 5 = 2 + 2 + 1, 14 = 5 + 5 + 3 + 1, 42 = 14 + 14 + 9 + 4 + 1, \dots$. Let $c_n(t) :=$ number of paths from $(0,0)$ till $(2n-2-t, t)$, for $n > t \geq 0$. This is the same as the number of Dyck paths of length $2n$ that has a last peak of height $t+1$.

Theorem 1.1 We have

1. $c_n = \sum_{t=0}^{n-1} c_n(t)$, for $n \geq 1$
2. $c_n(t) = c_{n-1}(t-1) + c_n(t+1)$ and
3. $c_n(t) = \binom{2n-t-2}{n-t} - \binom{2n-t-2}{n-t-1}$.

Proof. Exercise. □

2 Bijections

A fifth set of objects counted by the Catalan numbers is the set mentioned in Cameron's book E) different ways of adding $n+1$ ordered numbers together by recursive use of addition of two numbers. Example when $n=3$

$$\begin{aligned} & (((a_1 + a_2) + a_3) + a_4), \\ & ((a_1 + (a_2 + a_3)) + a_4), \\ & (a_1 + ((a_2 + a_3) + a_4)), \\ & (a_1 + (a_2 + (a_3 + a_4))), \\ & ((a_1 + a_2) + (a_3 + a_4)). \end{aligned}$$

You should try to convince yourself that each of these five sets satisfy the basic recursion. An often preferred way to prove enumeration results is to find a bijection to some other sets of objects whose enumeration is known. Let us therefore sketch the bijections between the five kinds of objects A-E discussed in these notes. I will skip the formal proofs that the maps described below are bijections. A bijection between A and D was described above.

2.1 $B \leftrightarrow C$

Fix one edge of the n -gon, say the edge 12. Given a triangulation of a $n+2$ -gon we define a tree in the following way. Each of the n triangles in the triangulation corresponds to a node in the tree. The root will be the triangle adjacent to the edge 12. Two nodes of the tree are adjacent if the corresponding triangles share an edge. This will give us a rooted tree in which every node has out-degree at most two. We now complete the tree with a set of $n+1$ leaves so that every one of the n nodes will get outdegree exactly 2.

Going the opposite way is defined in the reverse manner. Given a plane binary tree with $n+1$ leaves, start by removing the leaves and then the structure of the remaining n inner nodes T will tell you the structure of the triangulation. This is most easily seen by starting at the root and divide up into the possible cases. If the root has only one child in T then the root triangle has two outer edges of the polygon as edges ad we can proceed recursively with the remaining $n-1$ nodes. If the root r has two children in T then we look at the two subtrees under them. If the right subtree has a total of k nodes then the triangulation will have the edges 1, $k+3$ and 2, $k+3$. We then proceed recursively with the two subtrees and the two smaller polygons thus formed.

2.2 $C \leftrightarrow D$

Given a binary tree with $n+1$ leaves, do a depth first search in the tree were we always prefer to go left if possible. Record an up step every time we go down along an edge of the tree and a down step every time we go to the right in the tree. The reverse is defined in the obvious way.

2.3 $C \leftrightarrow E$

Given a plane binary tree with $n+1$ leaves we number the leaves with a_1, \dots, a_{n+1} . The tree now gives the order of addition. The reverse is just as easy, the order we add the $n+1$ numbers together naturally gives a plane binary tree.

3 Some definitions

There are some different notations for permutations. Let us an example look at the permutation π defined as a bijection by $\pi(1) = 2$, $\pi(2) = 4$, $\pi(3) = 6$, $\pi(4) = 1$, $\pi(5) = 3$, $\pi(6) = 5$ and $\pi(7) = 7$. In two row notation this becomes

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 1 & 3 & 5 & 7 \end{pmatrix},$$

or in cycle notation

$$\pi = (1, 2, 4)(3, 6, 5)(7).$$

See Cameron for the exact definitions. It is fairly common also to use the so called word form of the permutations which corresponds to just the bottom row of the two row notation. in our example

$$\pi = 2 \ 4 \ 6 \ 1 \ 3 \ 5 \ 7,$$

If you feel unsure when using the word form you can always return to the two row notation which is less easy to mess up.

In some exercises permutations and partitions are constructed with the use of some number theoretic concepts. Recall that for two positive integers a och b , the greatest common divisor, denoted $\gcd(a, b)$, is the largest integer d such that d divides both a and b . The least common multiple of a and b , denoted $\text{lcm}(a, b)$, is the smallest positive integer m such that m is divisible by both a and b . We have the relation

$$\text{lcm}(a, b) \ \gcd(a, b) = ab.$$

Ö Övningsuppgifter

Ö.1 Prove Theorem 1.1

Prove Theorem 1.1 using the interpretation as Dyck paths ending at $(2n-2-t, t)$.

Svårighetsgrad: B

Ö.2 Follow the bijections

For the following string of well matched parenthesis find the corresponding objects using the bijections defined in these notes.

$$((())((())((((())(()))$$

Svårighetsgrad: E

Ö.3 Refinement

For each of the four sets of objects A,B,C and E find some subsets counted by $c_n(t)$.

Svårighetsgrad: C-E

Ö.4 Partition med avseende på största gemensamma delare

Låt n vara ett positivt heltalet. Man kan bilda en partition av $\{1, 2, \dots, n-1\}$ genom att låta a och b tillhöra samma mängd om och endast om $\gcd(a, n) = \gcd(b, n)$, där $\gcd(a, n)$ är lika med den största gemensamma delaren till a och n . Bestäm denna partition för $n = 6$, $n = 11$, $n = 12$ och $n = 16$.

Svårighetsgrad: E

Ö.5 En permutation på en mängd av heltalspar

Låt m och n vara positiva heltalet, och låt X vara mängden av par (a, b) sådana att $0 \leq a \leq m-1$ och $0 \leq b \leq n-1$. Låt π vara permutationen på X med egenskapen att

$$\pi((a, b)) = ((a+1) \bmod m, (b+1) \bmod n).$$

Exempel: Om vi skriver paret (a, b) som ab har vi för $m = 3$ och $n = 4$ cykeluppdeleningen

$$(00, 11, 22, 03, 10, 21, 02, 13, 20, 01, 12, 23)$$

och för $m = 3$ och $n = 6$ cykeluppdeleningen

$$(00, 11, 22, 03, 14, 25)(01, 12, 23, 04, 15, 20)(02, 13, 24, 05, 10, 21).$$

Visa att π är en cyklistisk permutation om och endast om $\gcd(m, n) = 1$, där $\gcd(m, n)$ är lika med den största gemensamma delaren till m och n .

Svårighetsgrad: D

Ö.6 Cykeluppdelening vid multiplikation modulo 13

Mängden $\mathbb{Z}_{13}^* = \{1, 2, 3, \dots, 12\}$ bildar en grupp under multiplikation modulo 13. För $j \in \mathbb{Z}_{13}^*$, låt π_j beteckna permutationen som ges av multiplikation med j modulo 13; vi har alltså att $\pi_j(i) = (j \cdot i) \bmod 13$ för $i \in \mathbb{Z}_{13}^*$.

(a) Ange cykeluppdeleningen för permutationerna π_3 och π_5 .

(b) Ange en sluten formel för elementet i rad r och kolumn k i följande tabell:

		k			
		0	1	2	3
r	0	1	5	12	8
	1	3	2	10	11
	2	9	6	4	7

Svårighetsgrad: (a): E, (b): C

Ö.7 Permutationer med lika stora cykler

Låt n och k vara positiva heltalet. Visa att det finns

$$\frac{(nk)!}{n! \cdot k^n}$$

permutationer av nk element med en cykeluppdelening bestående av n cykler med vardera k element.

Svårighetsgrad: C

Ö.8 Mängdpartitioner med lika stora delar

Låt n och k vara positiva heltalet. Visa att det finns

$$\frac{(nk)!}{n! \cdot (k!)^n}$$

partitioner av en mängd med nk element bestående av n delmängder med vardera k element.

Svårighetsgrad: C (lättare om du gjort uppgift Ö.7)

Ö.9 231-undvikande permutationer

En permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} = a_1 a_2 \cdots a_n$ är 231-undvikande om det inte finns index $i < j < k$ sådana att $a_i < a_k < a_j$. Förlaringen till denna beteckning är att $a_i a_j a_k$ bildar "mönstret" 231; a_i är näst störst, a_j är störst och a_k är minst. Exempelvis är 3127465 en 231-undvikande permutation, medan 4127365 inte är det, ty 4127365 innehåller delsekvensen 473, som bildar "mönstret" 231.

Visa att antalet 231-undvikande permutationer av n element är lika med det n:te Catalantalalet C_n .

Ledning. Försök hitta en rekursion genom att studera positionen för det största elementet n i en given 231-undvikande permutation.

Svårighetsgrad: A

Ö.10 Involutioner

Visa att följande permuterationer är involutioner:

- Den permutation π av mängden $\{0, 1, 2, \dots, 2m - 1\}$ som ges av

$$\pi(k) = (k + m) \text{ mod } 2m.$$

- Den permutation π av mängden $\{0, 1, 2, \dots, 2m - 1\}$ som ges av

$$\pi(k) = (a - k) \text{ mod } 2m,$$

där a är en heltalskonstant.

- Permutationen π^5 , då π är permuterationen av mängden $\{1, 2, \dots, 10\}$ som ges av

$$\pi(k) = (2k) \text{ mod } 11.$$

Svårighetsgrad: E

Ö.11 Partitioner där hälften av elementen tillhör samma delmängd

Låt $n \geq 1$, och låt H_n vara antalet partitioner av en mängd med $2n$ element sådana att det finns en delmängd i partitionen som innehåller exakt n element.

Visa att

$$H_n = \binom{2n}{n} \cdot \left(B_n - \frac{1}{2} \right),$$

där B_n är det n :te Belltalet.

Svårighetsgrad: E

Ö.12 Ordnade partitioner

Belltalet B_n ger som bekant antalet partitioner av mängden $\{1, \dots, n\}$. Låt P_n vara antalet *ordnade* partitioner av mängden $\{1, \dots, n\}$, där en ordnad partition är en följd (Y_1, \dots, Y_k) sådan att $\{Y_1, \dots, Y_k\}$ är en (ordnad) partition. Exempelvis är $P_3 = 13$, ty vi har 13 ordnade partitioner av tre element:

$$(123), (1, 23), (23, 1), (2, 13), (13, 2), (3, 12), (12, 3), \\ (1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1).$$

Visa att

$$P_n = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} P_i$$

för $n \geq 1$ och att

$$P(x) = \sum_{i=0}^{\infty} P_i \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{2 - e^x}.$$

Svårighetsgrad: C

Ö.13 Dartspel och Belltal

Med n därtippar, numrerade från 1 till n , och med en tavla med n ringar, numrerade från 1 till n utifrån och in, kan man spela följande spel.

- Pilarna kastas i nummerordning.
- Man måste träffa tavlan med alla pilar.
- Man får inte sätta en pil i en given ring förrän man har satt pilar i alla ringar utanför den givna ringen. I synnerhet måste den första pilen sättas i den yttersta ringen med nummer 1.

Man vinner om man lyckas kasta alla n pilar enligt ovanstående regler. Exempelvis ger följande kastsriter vinst för $n = 3$:

$$(1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 2, 1), (1, 2, 2), (1, 2, 3).$$

Visa att antalet sätt att vinna på är lika med det n :te Belltalet.

Svårighetsgrad: B

Ö.14 Stirlingtal av första slaget

Absolutbeloppet $c_{n,k}$ av Stirlingtalet $s_{n,k}$ av första slaget anger antalet permuterationer av $\{1, \dots, n\}$ med exakt k cykler. Observera att $c_{n,k} = 0$ om $n < k$.

- Visa att

$$c_{n,k} = \sum_{r=1}^{n-k+1} \frac{(n-1)!}{(n-r)!} c_{n-r, k-1}$$

genom att i en given permutation studera den cykel som innehåller elementet n .

- Låt

$$f_k(x) = \sum_{n \geq k} c_{n,k} \frac{x^n}{n!}.$$

Använd (a) för att visa att

$$f'_k(x) = \frac{f_{k-1}(x)}{1-x}$$

för $k \geq 1$ (vi definierar $f_0(x) = 1$).

- Använd (b) för att visa att

$$f_k(x) = \frac{(-\ln(1-x))^k}{k!}.$$

Svårighetsgrad: A-C

Ö.15 Stirlingtal av andra slaget

Stirlingtalet $S_{n,k}$ av andra slaget anger antalet partitioner av $\{1, \dots, n\}$ i exakt k delmängder. Observera att $S_{n,k} = 0$ om $n < k$.

(a) Visa att

$$S_{n,k} = \sum_{r=1}^{n-k+1} \binom{n-1}{r-1} S_{n-r, k-1}$$

genom att i en given partition studera den delmängd som innehåller elementet n .

(b) Låt

$$f_k(x) = \sum_{n \geq k} S_{n,k} \frac{x^n}{n!}.$$

Använd (a) för att visa att

$$f'_k(x) = e^x f_{k-1}(x)$$

för $k \geq 1$ (vi definierar $f_0(x) = 1$).

(c) Använd (b) för att visa att

$$f_k(x) = \frac{(e^x - 1)^k}{k!}.$$

Svårighetsgrad: A-C (lättare om du gjort uppgift Ö.14)

Ö.16 Partitioner av n med högst k delar

Låt $k, n \geq 1$. Visa att antalet partitioner av talet n med högst k delar är lika med antalet partitioner av n sådana att varje del är högst k . Exempelvis har vi för $n = 5$ och $k = 3$ att

$$5 = 4 + 1 = 3 + 2 = 3 + 1 + 1 = 2 + 2 + 1$$

och att

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 2 + 1 + 1 + 1 = 2 + 2 + 1 = 3 + 1 + 1 = 3 + 2,$$

alltså fem partitioner i bågge fallen.

Svårighetsgrad: E

Ö.17 Partitioner av kn med alla delar delbara med k

Låt $n, k \geq 1$. Visa att antalet partitioner av talet kn sådana att varje del är delbar med k är lika med det totala antalet partitioner av talet n .

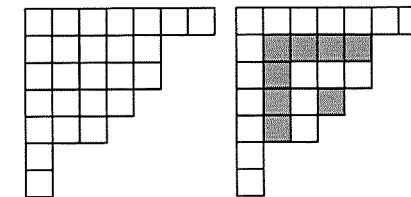
Svårighetsgrad: E

Ö.18 Partitioner av n som är sitt eget konjugat

Ge ett övertygande argument för att antalet partitioner av n som sammanfaller med sitt eget konjugat (se avsnitt 3) är lika med antalet partitioner av n i delar som alla är udda och sinesmellan olika.

Ledning. Studera bilden till höger i Figur 1.

Svårighetsgrad: B



Figur 1: Exempel på en partition som är sitt eget konjugat; kolumn i och rad i har samma längd för alla i . Bilden till höger ger en ledtråd till uppgift Ö.18.

Ö.19 Komplettering av tablåer

Visa att var och en av de tre delvis ifyllda tablåerna i Figur 2 kan kompletteras till en fullständig tablå på precis ett sätt. Ange de unika fullständiga tablåerna.

		7			
		12			
4	10	14			
4			5	8	14
4			11		
11					13

Figur 2: De tre delvis ifyllda tablåerna i uppgift Ö.19.

Svårighetsgrad: E

Ö.20 RSK-algoritmen I

Använd RSK-algoritmen på permutationerna

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 2 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ och } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Förklara sambandet mellan de två resulterande paren av tablåer.

Svårighetsgrad: E

Ö.21 RSK-algoritmen II

Använd RSK-algoritmen på permutationen $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 6 & 5 & 1 & 3 & 2 & 8 & 7 \end{pmatrix}$. Förklara sambandet mellan de två resulterande tablåerna.

Svårighetsgrad: E

Ö.22 RSK-algoritmen III

Låt

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n & n+1 & n+2 & n+3 & \cdots & 2n-1 & 2n \\ b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_{n-1} & b_n & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$$

vara en permutation sådan att

$$\begin{array}{ccccccccc} a_1 & < & a_2 & < & a_3 & < & \cdots & < & a_{n-1} & < & a_n \\ b_1 & < & b_2 & < & b_3 & < & \cdots & < & b_{n-1} & < & b_n \end{array}$$

och $a_i < b_i$ för $1 \leq i \leq n$. Vad blir resultatet då man använder RSK-algoritmen på denna permutation? Motivera ditt svar med ett bevis.

Ledning om du körs fast: Försök få en idé genom att studera ett specialfall, exempelvis

$$\left(\begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 5 & 7 & 9 & 10 & 1 & 2 & 4 & 6 & 8 \end{array} \right).$$

Lägg märke till hur tablåerna ser ut efter k steg för varje givet k .

Svårighetsgrad: C