

SF2715 Applied Combinatorics

Notes and Exercises Part 3

Jakob Jonsson (modified by Svante Linusson)

29 april 2011

This contains some supplementary material and exercises to part 3 of the course SF2715 applied combinatorics.

Note that the difficulty ranking of the exercises might not be what you expect. Well, a problem that seems very difficult at first might be easy when you have seen how to solve such a problem. But please let us know if you think some grading is seriously wrong.

1 Graphs from the square lattice

In some of the exercises we study a special kind of graphs called *square lattice graphs* (in Swedish *kvadratiska gittergrafer*). Let $r \geq 1$ and $k \geq 1$. We define the square lattice graph $G_{r,k}$ as follows. $G_{r,k}$ has rk nodes, ordered in r rows and k columns. That is, there is a node in row i and column j for $1 \leq i \leq r$ and $1 \leq j \leq k$. Two nodes share an edge if they are adjacent to each other in a given row or a given column. In Figure 1 you find an illustration of $G_{5,7}$.

Sometimes it can be useful to draw a lattice graph on a chess board, like we have done to the right in Figure 1. Note that every edge has one node in a black square and one node in a white square. Thus $G_{r,k}$ is bipartite.

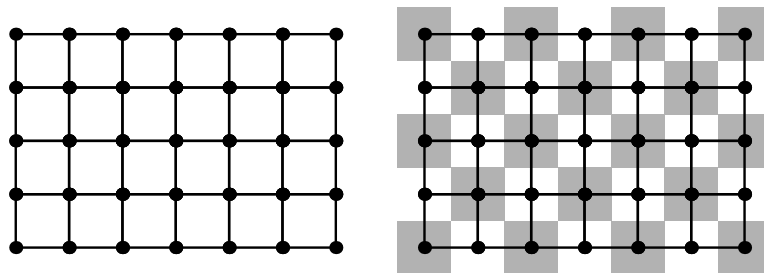


Figure 1: Lattice graph of size 5×7 . To the right drawn on a chess board.

Ö Övningsuppgifter

Ö.1 Minimalt uppspännande träd i gittergraf

I gittergrafen $G_{r,k}$ (se avsnitt 1), ge alla horisontella (vågräta) kanter vikten 1 och alla vertikala (lodräta) kanter vikten 2. Beräkna totalvikten på ett minimalt uppspännande träd i $G_{r,k}$.

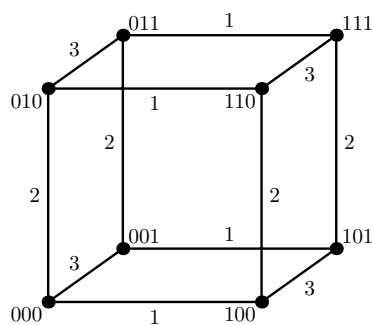
Svårighetsgrad: D

Ö.2 Minimalt uppspännande träd i hyperkub

Låt $n \geq 1$, och låt H_n ha som hörn alla binära ord av längd n . Två hörn är sammanbundna om och endast om de skiljer sig åt på exakt en position. Detta innebär att H_n har formen av en n -dimensionell hyperkub. Se Figur 2 för fallet $n = 3$, då vi får den 3-dimensionella kuben. Definiera kantvikter genom att ge vikten k till varje kant som går mellan två binära ord som skiljer sig åt på position k (räknat från vänster). Visa att ett minimalt uppspännande träd har totalvikten $2^{n+1} - n - 2$.

Ledning: Använd induktion över n .

Svårighetsgrad: B-C



Figur 2: Grafen H_3 med kantvikter som i uppgift Ö.2.

Ö.3 Unikt minimalt uppspännande träd

Låt $G = (V, E)$ vara en sammanhängande graf med reellvärda kantvikter $\{w(e) : e \in E\}$ sådana att det inte finns två kanter med exakt samma vikt. Vi har alltså att $w(e) \neq w(e')$ om $e \neq e'$.

- (a) Visa att G har ett unikt minimalt uppspännande träd.

Ledning: Studera två uppspännande träd T och U . Låt e vara minimal med avseende på vikt sådan att e bara finns med i ett av träden, säg T . Visa att $U + e$ innehåller ett uppspännande träd med lägre vikt än U .

- (b) Visa att följande två egenskaper hos ett uppspännande träd i G är ekvivalenta:
- T är det minimala uppspännande trädet i G .

- Varje kant e i G som ej tillhör T har maximal vikt bland de kanter som ingår i den unika cykeln i $T + e$.

Svårighetsgrad: A-B

Ö.4 Hamiltoncykler i bipartita grafer

Låt G vara en bipartit graf. Det finns med andra ord en partition $\{A, B\}$ av G 's hörnmängd sådan att alla kanter i G har en ändpunkt i A och en ändpunkt i B . Anta att G har en Hamiltoncykel. Visa att $|A| = |B|$.

Svårighetsgrad: E

Ö.5 Hamiltoncykler i gittergrafer

- Hitta en Hamiltoncykel i var och en av gittergraferna $G_{4,6}$ och $G_{5,6}$ (se avsnitt 1).
- Anta att r och k båda är udda. Visa att $G_{r,k}$ inte innehåller någon Hamiltoncykel.

Svårighetsgrad: (a): E, (b): C

Ö.6 Hamiltoncykler och perfekta matchningar

En *perfekt matchning* i en graf med $2m$ hörn är en mängd M bestående av m kanter sådana att varje hörn i grafen finns med i exakt en kant i M .

- Anta att G är en graf med $2m$ hörn sådan att G innehåller en Hamiltoncykel. Visa att man kan hitta två perfekta matchningar M_1 och M_2 i G sådana att $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ (det vill säga ingen kant finns med i både M_1 och M_2).
- Anta nu att G innehåller en Hamiltoncykel och att varje hörn i G har exakt tre grannar. Visa att det finns en partition $\{M_1, M_2, M_3\}$ av kantmängden i G sådan att M_1, M_2, M_3 alla är perfekta matchningar.
- För grafen i Figur 3, hitta en partition $\{M_1, M_2, M_3\}$ av kantmängden sådan att M_1, M_2, M_3 alla är perfekta matchningar.

Svårighetsgrad: (a): D, (b): C, (b): C

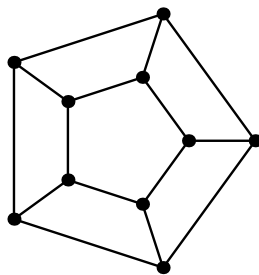
Ö.7 Grafer med Hamiltonstig men utan Hamiltoncykler

Låt G vara en graf på hörnmängden $\{1, \dots, n\}$. Anta att G har en kant mellan i och $i + 1$ för $1 \leq i \leq n - 1$. Detta innebär att G innehåller Hamiltonstigen $(1, 2, 3, \dots, n)$. Anta vidare att G inte har någon Hamiltoncykel.

- Visa att det inte finns något hörn i , $3 \leq i \leq n - 1$, sådant att både kanten $(1, i)$ och kanten $(i - 1, n)$ finns med i G .
- Visa att det inte finns hörn i och j , $2 \leq i < j \leq n - 1$, sådana att kanterna $(1, i)$, (j, n) och $(i - 1, j + 1)$ alla finns med i G .
- Visa att det inte finns hörn i och j , $2 \leq i < j \leq n - 1$, sådana att kanterna $(1, j)$, (i, n) och $(i - 1, j - 1)$ alla finns med i G .

Ledning: Rita!

Svårighetsgrad: D



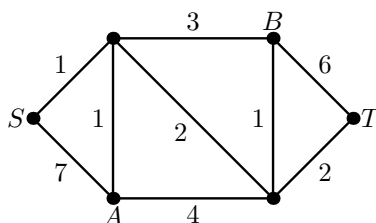
Figur 3: Grafen i uppgift Ö.6 (c).

Ö.8 Gasledningar

I Figur 4 illustreras ett nätverk av gasledningar mellan två länder S och T ; varje lednings kapacitet anges i hundratals miljoner kubikmeter gas per vecka. Alla ledningar kan användas i båda riktningarna.

- Ange ett maximalt flöde i nätverket, och visa att flödet är maximalt.
- För att täcka sina framtida behov på 800 miljoner kubikmeter importerad gas per vecka trycker landet T på för en ny ledning mellan länderna A och B . Vilken kapacitet behövs på denna nya ledning för att uppnå det önskade flödet?

Svårighetsgrad: E



Figur 4: Nätverket i uppgift Ö.8.

Ö.9 Flöden i nätverk med flera sänkor

I denna uppgift får du använda dig av att det finns en känd metod för att beräkna ett maximalt flöde i ett nätverk med exakt en källa och exakt en sänka.

- Låt D vara ett nätverk med en källa s och flera sänkor $t_1, \dots, t_r$, alla skilda från s . Med ett flöde i D menar vi ett flöde med nettoflöde 0 i alla hörn $v \notin \{s, t_1, \dots, t_r\}$, och storleken på flödet är nettoflödet ut ur s . Ange en metod för att bestämma ett maximalt flöde i D .
- För givna icke-negativa parametrar $p_1, \dots, p_r$, ange en metod för att hitta ett flöde med egenskapen att nettoflödet till t_i är exakt p_i för $1 \leq i \leq r$, under förutsättning att ett sådant flöde existerar.

Svårighetsgrad: C

Ö.10 Maximala flöden med olika riktningar mellan två givna hörn

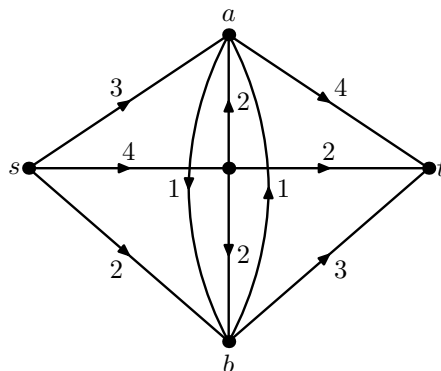
Syftet med denna uppgift är att visa att det kan finnas två hörn a och b i ett nätverk med egenskapen att tecknet på $f(a, b)$ beror på valet av maximalt flöde f (och alltså inte är entydigt bestämt av kanternas kapacitet). Med $f(a, b)$ menas här flödet från a till b längs en kant de delar. Om flödet går åt andra hållet så blir alltså $f(a, b)$ negativ.

- (a) Låt D vara definierad som i Figur 5. Visa att det finns tre maximala flöden f_1 , f_2 och f_3 sådana att $f_1(a, b) > 0$, $f_2(a, b) = 0$ och $f_3(a, b) < 0$.

Ledning: Hitta först ett maximalt flöde, och utgå sedan från detta flöde för att konstruera flöden med de önskade egenskaperna.

- (b) Konstruera ett nätverk av storlek två med bara fyra hörn s , t , a och b sådant att det finns tre maximala flöden f_1 , f_2 och f_3 sådana att $f_1(a, b) > 0$, $f_2(a, b) = 0$ och $f_3(a, b) < 0$. Som vanligt är s källan och t sänkan.

Svårighetsgrad: (a): C, (b): B



Figur 5: Nätverket i uppgift Ö.10.

Ö.11 Konstruktion av bipartit graf med flödesalgorithm

Låt $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ och $B = \{b_1, \dots, b_m\}$ vara två mängder av hörn, och låt $c_1, \dots, c_n$ och $d_1, \dots, d_m$ vara icke-negativa heltal sådana att

$$\sum_{i=1}^n c_i = \sum_{j=1}^m d_j.$$

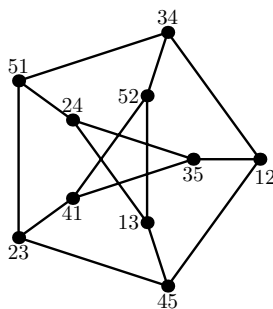
Man vill bilda en bipartit graf med kanter från hörnen i A till hörnen i B så att hörnet a_i har exakt c_i grannar i B för alla i och så att hörnet b_j har exakt d_j grannar i A för alla j . Formulera detta problem som problemet att hitta ett maximalt flöde i ett nätverk, och ange vilka egenskaper detta flöde måste ha

för att vi ska få en bipartit graf med önskade egenskaper. (Du behöver bara formulera problemet, inte lösa det.)

Svårighetsgrad: B-C

Ö.12 Knesergrafer

Låt $n \geq 2k$. Bilda en graf $H_{n,k}$ med ett hörn för varje delmängd till $\{1, \dots, n\}$ av storlek k och med en kant mellan två hörn A och B om och endast om A och B är disjunkta. $H_{n,k}$ är en så kallad *Knesergraf*. Se Figur 6 för Knesergrafens $H_{5,2}$, även kallad *Petersengrafen*.



Figur 6: Petersengrafen $H_{5,2}$, den mest välkända Knesergraf. Vi skriver ab för att beteckna hörnet $\{a, b\}$.

(a) Visa att varje hörn i $H_{n,k}$ har $\binom{n-k}{k}$ grannar.

(b) Låt (A, B, C) vara en stig i $H_{n,k}$. Visa att

$$|A \setminus C| \leq n - 2k.$$

(c) Mer allmänt, låt $(A_1, A_2, \dots, A_{2i+1})$ vara en stig i $H_{n,k}$, där $i \geq 1$. Visa att

$$|A_1 \setminus A_{2i+1}| \leq i(n - 2k).$$

Dra slutsatsen att det inte finns någon cykel av udda längd i $H_{n,k}$ vars längd understiger $\frac{n}{n-2k}$.

Ledning: Använd följande olikhet för ändliga mängder:

$$|X \setminus Z| \leq |X \setminus Y| + |Y \setminus Z|.$$

Svårighetsgrad: (a): E, (b): E, (c): A-B