SF2715 Applied Combinatorics
Extra exercises and solutions, part I

Jakob Jonsson

24 mars 2011

Ö Övningsuppgifter

These extra exercises are in Swedish. If you have problems understanding please ask the course leader Svante.

Ö.1 Binomialkoefficientens värde

Syftet med denna uppgift är att ge ett bevis för att binomialkoefficienten $\binom{n}{k}$ uppfyller identiteten

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

Låt $0 \le k \le n$. Använd följande procedur för att bilda en permutation av elementen i en mängd X av storlek n.

1. Välj ut k element.
2. Bilda en ordnad följd av dessa k element.
3. Bilda en ordnad följd av de återstående $n-k$ elementen.
4. Bilda en permutation genom att sätta ihop de två följderna.

Visa med hjälp av ovanstående procedur att

$$n! = \binom{n}{k} \cdot k! \cdot (n-k)!.$$

Svårighetsgrad: E

Ö.2 Ännu en rekursion för binomialkoefficienterna

Visa att

$$\binom{n}{k} = \binom{n-2}{k-2} + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k} + \binom{n-3}{k-2} + \binom{n-3}{k-1}.$$

Svårighetsgrad: E

Ö.3 Binomialsatsen I

Använd binomialsatsen för att visa att

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-2)^k = (-1)^n.$$

Svårighetsgrad: E

Ö.4 Binomialsatsen II

Använd binomialsatsen för att visa att

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (2+x)^k = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k.$$

Svårighetsgrad: C

Ö.5 Vem vet mest?

Vem vet mest? är en frågesporttävling på Sveriges Television där tolv deltagare tävlar om tre finalplatser. Kvalificeringstävlingen är uppdelad i två omgångar. I den första omgången får deltagarna svara på två frågor, och de som svarar fel på båda frågorna är utslagna. Den andra omgången är en sinnrikt konstruerad utslagstävling som pågår tills bara tre deltagare återstår. Dessa tre deltagare går vidare till finalen. (Vi antar att antalet personer som går vidare till den andra omgången alltid är minst tre.)

(a) Med spelregler som ovan, visa att det finns 112640 sätt för de tolv deltagarna att fördela sig mellan grupperna “utslagna i första omgången”, “utslagna i andra omgången” och “kvalificerade för final”.

(b) Ge ett kombinatoriskt bevis för identiteten

$$\sum_{r=k}^{n} \binom{n}{r} \binom{r}{k} = \binom{n}{k} 2^{n-k}.$$

(Det är tillåtet att lösa (a) genom att först lösa (b) och sedan stoppa in lämpligt valda parametrar.)

(c) Ge ett algebraiskt bevis för identiteten i (b).

Svårighetsgrad: (a): E, (b): D, (c): C

Ö.6 Växande följder av tal I

(a) Låt k och n vara positiva heltal sådana att $k \geq n$. Beräkna antalet heltalsföljder $(y_1, \ldots, y_k)$ sådana att

$$1 \leq y_1 \leq y_2 \leq \cdots \leq y_k \leq n.$$

med egenskapen att vart och ett av talen $1, 2, \ldots, n$ förekommer minst en gång bland talen $y_1, y_2, \ldots, y_k$.

(b) Låt k och n vara positiva heltal sådana att $n \leq k \leq 2n$. Beräkna antalet heltalsföljder $(y_1, \ldots, y_k)$ sådana att

$$1 \leq y_1 \leq y_2 \leq \cdots \leq y_k \leq n.$$

med egenskapen att vart och ett av talen $1, 2, \ldots, n$ förekommer minst en gång och högst två gånger bland talen $y_1, y_2, \ldots, y_k$.

Svårighetsgrad: D

Ö.7 Växande följder av tal II

Ge ett direkt bevis för att följande två antal sammanfaller och är lika med $\binom{n+k-1}{k}$:

- Antalet heltalsföljder $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ sådana att
$$1 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_k \leq n + k - 1$$
(strikta olikheter).
- Antalet heltalsföljder $(b_1, b_2, \ldots, b_k)$ sådana att
$$1 \leq b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_k \leq n$$
(ej strikta olikheter). Detta är lika med antalet multimängder av storlek k över en mängd av storlek n.

Ledning. Försök transformera en följd av det andra slaget till en följd av det första slaget genom att addera lämpliga konstanter C_k till vart och ett av talen $b_1, b_2, \ldots, b_k$. Vi vill alltså att

$$1 \leq b_1 + C_1 < b_2 + C_2 < \cdots < b_k + C_k \leq n + k - 1.$$

Svårighetsgrad: C

Ö.8 Genererande funktion för tärningskast

Låt $n \geq 1$, och låt $a_{n,k}$ vara antalet sätt att få summan n då man kastar k stycken vanliga sexsidiga tärningar. Ange ett slutet uttryck för den genererande funktionen

$$\sum_{n=k}^{6k} a_{n,k} x^n.$$

Beräkna $a_{10,3}$.

Svårighetsgrad: E

Ö.9 Slantsingling

För $1 \leq n \leq r$, låt $a_{n,r}$ vara antalet sätt att singla slant r gånger så att klave dyker upp exakt n gånger och så att vi får klave vid den sista slantsinglingen.

(a) Visa att
$$a_{n,r} = \binom{r-1}{n-1}.$$

(b) Visa att
$$\sum_{r \geq n} \binom{r-1}{n-1} x^r = \frac{x^n}{(1-x)^n}.$$

Ledning: Dela in ovanstående slantsingling i n omgångar, och använd multiplikationsprincipen.

Svårighetsgrad: (a): E, (b): C, (c): D

Ö.10 Summor på formen $t + 2u + 3v$

Låt a_n vara antalet tripplar (t, u, v) av ickenegativa heltal sådana att $t+2u+3v = n$. Ge en sluten formel för $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$.

Svårighetsgrad: C

Ö.11 Ord som undviker 00

Låt Q beteckna alfabetet $\{0, 1, 2\}$, och låt a_n vara antalet ord över Q av längd n som inte innehåller delordet 00. Exempelvis är $a_1 = 3$, $a_2 = 8$ och $a_3 = 22$.

(a) Visa att
$$a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2}$$
för $n \geq 3$.

(b) Visa att
$$\sum_{n\geq 1} a_n x^n = \frac{3x + 2x^2}{1 - 2x - 2x^2}.$$

Svårighetsgrad: D

Ö.12 Ord som undviker 00 och 11

Låt Q beteckna alfabetet $\{0, 1, 2\}$, och låt a_n vara antalet ord över Q av längd n som inte innehåller delorden 00 och 11. Exempelvis är $a_1 = 3$, $a_2 = 7$ och $a_3 = 17$.

(a) Visa att det finns tal r och s sådana att $a_n = ra_{n-1} + sa_{n-2}$ för alla $n \geq 3$, och bestäm r och s.

(b) Skriv $\sum_{n\geq 1} a_n x^n$ som en rationell funktion.

Svårighetsgrad: D

Ö.13 Ord som undviker 01

Låt Q beteckna alfabetet $\{0, 1, 2\}$, och låt a_n vara antalet ord över Q av längd n som inte innehåller delordet 01. Exempelvis är $a_1 = 3$, $a_2 = 8$ och $a_3 = 21$. Visa att det finns tal r och s sådana att $a_n = ra_{n-1} + sa_{n-2}$ för alla $n \geq 3$, och bestäm r och s.

Svårighetsgrad: D

Ö.14 Ord som undviker ij om $|i - j| \geq 2$

Låt $Q = \{0, 1, 2, 3\}$, och låt X bestå av alla ord ij sådana att $|i - j| \geq 2$. Vi har alltså att $X = \{02, 03, 13, 20, 30, 31\}$. Låt a_n vara antalet ord över Q som undviker delorden i X.

(a) Visa att

$$a_{n+4} = 4a_{n+3} - 3a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n$$

för $n \geq 1$.

(b) Man kan räkna ut att $a_1 = 10$, $a_2 = 26$, $a_3 = 68$ och $a_4 = 178$. Använd detta för att visa att $a_n = 2F_{2n+2}$ för $n \geq 1$, där F_i är det i:te Fibonaccitalet; $F_0 = F_1 = 1$.

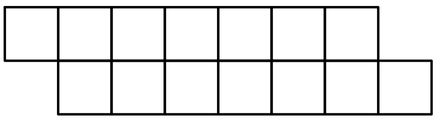
Ledning. Ett sätt att förenkla uträkningarna är att först visa att $F_{2k+4} = 3F_{2k+2} - F_{2k}$ för $k \geq 0$.

Svårighetsgrad: (a): D, (b): C

Ö.15 Grannfria konfigurationer av brickor på ett bräde

Studera ett bräde med två rader av kvadratiska rutor med $n + 1$ rutor i varje rad. Plocka nu bort nedre vänstra och övre högra rutan från brädet. Figur 1 illustrerar fallet $n = 7$. Ange en rekursionsformel för antalet sätt att placera brickor på de $2n$ återstående rutorna, där regeln är att man inte får lägga brickor på två rutor med gemensam kant.

Svårighetsgrad: B



Figur 1: Brädet i uppgift Ö.15 för $n = 7$.

Ö.16 Delmängders kardinalitet modulo 3

För varje heltal $n \geq 0$ och $k \in \{0, 1, 2\}$, låt $\beta_{n,k}$ vara antalet delmängder till $\{1, \ldots, n\}$ vars kardinalitet är kongruent med k modulo 3.

(a) Använd ett kombinatoriskt resonemang för att bevisa att

$$\beta_{n+3,k} = 3 \cdot 2^n - \beta_{n,k}$$

för $n \geq 0$ och $k \in \{0, 1, 2\}$.

(b) Använd identiteten i (a) för att visa att

$$\beta_{3m,k} = \begin{cases} (8^m + 2(-1)^m)/3 & \text{om } k = 0, \\ (8^m - (-1)^m)/3 & \text{om } k \in \{1, 2\} \end{cases}$$

för alla $m \geq 0$.

Svårighetsgrad: (a): B, (b): E

Ö.17 Hopparningar av tal på avstånd högst 2

Låt a_n vara antalet sätt att dela in mängden $\{1, \ldots, 2n\}$ i n par så att avståndet mellan talen i varje par är högst 2. Exempelvis är $a_2 = 2$, ty hopparningarna $\{1-2, 3-4\}$ och $\{1-3, 2-4\}$ är tillåtna, medan hopparningen $\{1-4, 2-3\}$ inte är det; avståndet mellan 1 och 4 i det första paret är större än 2. Visa att

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

för alla $n \geq 2$. Eftersom $a_0 = a_1 = 1$ får vi alltså Fibonacciföljden.

Svårighetsgrad: C

Ö.18 Hopparningar av tal på avstånd högst 3

Låt nu a_n vara antalet sätt att dela in mängden $\{1, \ldots, 2n\}$ i n par så att avståndet mellan talen i varje par är högst 3. Visa att

$$a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} - a_{n-4}$$

för alla $n \geq 4$.

Svårighetsgrad: A

Ö.19 Växande följder av tal III

Som bekant är $a_{n,k} = \binom{n+k-1}{k}$ lika med antalet heltalsföljder $(b_1, b_2, \ldots, b_k)$ som uppfyller olikheterna

$$1 \leq b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_k \leq n.$$

(a) Låt

$$A_n(x) = \sum_{k \geq 0} a_{n,k} x^n.$$

Ge ett kombinatoriskt bevis för att

$$A_n(x) = 1 + x \sum_{i=1}^{n} A_i(x).$$

Ledning: Studera det sista elementet b_k i en given följd.

(b) Använd (a) för att visa att

$$A_n(x) = \frac{1}{(1-x)^n}.$$

Svårighetsgrad: C

Ö.20 Icke-skärande hopparningar

Representera talen $1, \ldots, 2n$ som punkter på en cirkel, utspridda i växande ordning medurs. För en given hopparning av dessa $2n$ punkter, dra ett linjestycke mellan varje par av hopparade punkter. Om linjestyckena inte skär varandra inuti cirkeln säger vi att hopparningen är icke-skärande. Exempelvis är hopparningen $\{1-5, 2-8, 3-4, 6-7, 9-12, 10-11\}$ av talen $1, \ldots, 12$ skärande, ty linjestycket mellan punkt 1 och punkt 5 skär motsvarande linjestycke mellan 2 och 8 (studera urtavlan på en klocka). Algebraiskt kan vi uttrycka detta som att vi inte tillåter hopparningar som innehåller par $a-c$ och $b-d$ med egenskapen att

$$a < b < c < d.$$

Visa att antalet icke-skärande hopparningar av $1, \ldots, 2n$ är lika med det n:te Catalantalet C_n (C_{n+1} med Camerons notation).

Ledning. Bilda en rekursionsformel för det sökta antalet genom att studera det par som innehåller punkten $2n$.

Svårighetsgrad: B

Ö.21 Oavgjord tävling där den ena spelaren aldrig leder

Två personer A och B spelar $2n$ partier luffarschack och vinner n partier var. Efter varje omgång har A vunnit minst lika många partier som B. Visa att antalet sätt detta kan ske på är lika med det n:te Catalantalet C_n (C_{n+1} med Camerons notation).

Ledning: Bilda en rekursionsformel för det sökta antalet genom att studera det första tillfället i tävlingen då A och B har vunnit lika många partier. Bortse från tillfället i början av tävlingen då ställningen är 0-0.

Svårighetsgrad: A

Lösningsförslag till övningsuppgifter, del I

Obs! Preliminär version!

Allmän kommentar gällande de uppgifter som behandlar rekursioner (alltså uppgifterna 11-21): Var noggrann med att kontrollera relevanta startvärden vid härledningar av talserier. Till exempel räcker det inte att talföljden $(a_n)_{n\geq 0}$ uppfyller $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ för att vi ska erhålla Fibonaccitalen. Vi måste även ha att a_0 och a_1 är på varandra följande Fibonaccital. Om exempelvis $a_0 = 2$ och $a_1 = 1$ får vi nämligen inte Fibonaccital utan de tal som brukar benämnas Lucastal. För att ge ett annat exempel måste c_0 vara lika med 1 för att ekvationen

$$c_n = \sum_{k=0}^{n-1} c_k c_{n-k-1}$$

ska ge Catalantalen.

Ö.1. Vi kan utföra steg 1 i proceduren på $\binom{n}{k}$ olika sätt; vi väljer en mängd med k element från en mängd med n element. Vidare kan vi utföra steg 2 på $k!$ olika sätt och steg 3 på $(n-k)!$ olika sätt; vi sorterar mängder med k respektive $n-k$ element. Vi kan få varje permutation av mängden X på precis ett sätt med den beskrivna proceduren: Det första steget avgör vilka de första k elementen är, det andra steget avgör i vilken ordning dessa k element kommer och det tredje steget avgör i vilken ordning de övriga $n-k$ elementen kommer. Eftersom antalet permutationer av n element är lika med $n!$ erhåller vi den önskade identiteten.

Ö.2.

Arbeta med högerledet. Vi ser att

$$\begin{aligned}
& \binom{n-2}{k-2} + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k} + \left(\binom{n-3}{k-2} + \binom{n-3}{k-1}\right) \\
= \quad & \left(\binom{n-2}{k-2} + \binom{n-2}{k-1}\right) + \binom{n-2}{k} + \binom{n-2}{k-1} \\
= \quad & \binom{n-1}{k-1} + \left(\binom{n-2}{k} + \binom{n-2}{k-1}\right) \\
= \quad & \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k},
\end{aligned}$$

vilket är lika med vänsterledet.

Ö.3. Sätt $t=-2$. Binomialsatsen ger att

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-2)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k = (1+t)^n = (1-2)^n = (-1)^n.$$

Ö.4. I denna uppgift måste vi använda binomialsatsen på såväl vänsterled som högerled. Studera först vänsterledet. $x^k(2+x)^k$ kan skrivas som $(x(2+x))^k = (2x+x^2)^k$. Sätter vi $t = 2x + x^2$ får vi att

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(2x+x^2)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k = (1+t)^n \\
= \quad & (1+2x+x^2)^n = ((1+x)^2)^n = (1+x)^{2n}.
\end{aligned}$$

Studera nu högerledet. Vi ser att

$$\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k = (1+x)^{2n}.$$

Alltså är vänsterled och högerled lika, vilket avslutar beviset.

Ö.5.

(a) Det finns $\binom{12}{3}$ möjligheter för de tre finalisterna. Var och en av de övriga nio deltagarna blir utslagen antingen i första omgången eller i andra omgången. Det finns alltså två möjligheter för var och en av dessa nio deltagare. Det totala antalet möjligheter är därmed

$$\frac{12}{3} \cdot 2^9 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{6} \cdot 512 = 220 \cdot 512 = 112640.$$

(b) Studera den generaliserade versionen av *Vem vet mest?* med n deltagare och k finalister. Det finns $\binom{n}{k}$ sätt att välja finalisterna och 2^{n-k} sätt att fördela övriga $n-k$ deltagare mellan de båda första omgångarna. Antalet möjligheter är alltså

$$\binom{n}{k} \cdot 2^{n-k}.$$

Ett annat sätt att räkna är att låta r vara antalet deltagare som avancerar till andra omgången. För ett fixerat r har vi $\binom{n}{r}$ möjligheter för dessa r deltagare. Bland de r deltagarna i andra omgången går k deltagare vidare till finalen, vilket kan ske på $\binom{r}{k}$ sätt. Summerar vi över r får vi det totala antalet möjligheter. Eftersom $k \leq r \leq n$ drar vi slutsatsen att

$$\binom{n}{k} \cdot 2^{n-k} = \sum_{r=k}^{n} \binom{n}{r}\binom{r}{k}.$$

(c) Vi har att

$$\begin{aligned}
\sum_{r=k}^{n} \binom{n}{r}\binom{r}{k} &= \sum_{r=k}^{n} \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!} \cdot \frac{r!}{k! \cdot (r-k)!} \\
&= \sum_{r=k}^{n} \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \cdot \frac{(n-k)!}{(n-r)! \cdot (r-k)!} \\
&= \sum_{r=k}^{n} \binom{n}{k}\binom{n-k}{r-k} = \binom{n}{k} \sum_{r=k}^{n} \binom{n-k}{r-k} \\
[m = r-k] \quad &= \binom{n}{k} \sum_{m=0}^{n-k} \binom{n-k}{m} = \binom{n}{k} 2^{n-k}.
\end{aligned}$$

Ö.6. (Uppdaterad 2 augusti 2009.)

(a) Denna uppgift kan lösas på flera sätt.

Ett sätt är att studera de positioner i följden där värdet ökar, alltså de index p som har egenskapen att $y_{p+1} > y_p$. Enligt förutsättningarna finns alla tal mellan 1 och n finns med i följden, och följden är växande. Alltså finns det precis en position p_1 sådan att $y_{p_1} = 1$ och $y_{p_1+1} = 2$, en position p_2 sådan att $y_{p_2} = 2$ och $y_{p_2+1} = 3$ och så vidare upp till en sista position p_{n-1} sådan att $y_{p_{n-1}} = n-1$ och $y_{p_{n-1}+1} = n$. Om exempelvis följden är lika med $(1, 1, 1, \mathbf{1}, \mathbf{2}, 3, 3, \mathbf{3}, 4)$ får vi att $p_1 = 4$, $p_2 = 5$ och $p_3 = 8$. Den resulterande mängden $\{p_1, \dots, p_{n-1}\}$ är en delmängd av storlek $n-1$ till mängden $\{1, \dots, k-1\}$. Varje sådan mängd svarar på ovan beskrivna sätt mot en följd med egenskaper som i uppgiften, vilket innebär att antalet följder är $\binom{k-1}{n-1}$.

Ett annat sätt är att sluta sig till att antalet sökta följder är lika med antalet följder av positiva heltal $x_1, \dots, x_n$ sådana att

$$x_1 + \cdots + x_n = k;$$

x_i är lika med antalet förekomster av talet i i följden $(y_1, \dots, y_k)$ (jämför med beviset av Lemma 3.7.2 i Cameron). Sätter vi $w_i = x_i - 1$ för $1 \leq i \leq n$ erhåller vi antalet följder av ickenegativa heltal $w_1, \dots, w_n$ sådana att

$$w_1 + \cdots + w_n = k - n.$$

Vänsterledet är nämligen lika med

$$(x_1 - 1) + \cdots (x_n - 1) = (x_1 + \cdots + x_n) - n = k - n.$$

Sätt $k' = k - n$. Lemma 3.7.3 i Cameron ger nu att det sökta antalet är

$$\binom{n + k' - 1}{k'} = \binom{k-1}{k-n} = \binom{k-1}{n-1}.$$

(Försök gärna hitta en variant på beviset för Lemma 3.7.3 som går att använda direkt på följden $(x_1, \dots, x_n)$.)

(b) Vi löser denna uppgift med hjälp av samma omformulering som i den andra metoden i föregående uppgift. Först konstaterar vi att antalet följder med de givna egenskaperna är lika med antalet följder $(x_1, \dots, x_n)$ sådana att $x_1 + \cdots + x_n = k$ och $x_i \in \{1, 2\}$ för varje i. Precis som ovan är x_i antalet förekomster av talet i i följden $(y_1, \dots, y_k)$. Sätter vi än en gång $w_i = x_i - 1$ erhåller vi att det sökta antalet ges av antalet följder $(w_1, \dots, w_n)$ sådana att

$$w_1 + \cdots + w_n = k - n$$

och $w_i \in \{0, 1\}$ för varje i. I en summa som denna har vi att $k - n$ av talen $w_1, \dots, w_n$ är ettor och att övriga $2n - k$ tal är nollor. De $k - n$ ettorna kan väljas på $\binom{n}{k-n}$ olika sätt, vilket är det sökta antalet.

Ö.7. (Uppdaterad 2 augusti 2009.) Studera en heltalsföljd av det andra slaget, alltså en följd $(b_1, b_2, \ldots, b_k)$ sådan att

$$1 \leq b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_k \leq n.$$

Bilda en ny heltalsföljd $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ genom att sätta

$$a_i = b_i + i - 1.$$

Detta innebär att

$$a_i - a_{i-1} = (b_i + i - 1) - (b_{i-1} + i - 2) = b_i - b_{i-1} + 1 \geq 1 > 0.$$

Eftersom vi dessutom har att $a_1 = b_1 \geq 1$ och $a_k = b_k + k - 1 \leq n + k - 1$ får vi att

$$1 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_k \leq n + k - 1.$$

I synnerhet är $(a_1, \ldots, a_k)$ en följd av det första slaget.

Omvänt erhåller vi en följd av det andra slaget från en följd av det första slaget genom att subtrahera $i - 1$ från det i:te elementet; beviset för detta använder samma uträkningar som ovan. Alltså har vi en bijektion mellan de båda mängderna av följder, vilket avslutar beviset.

Att antalet följder är $\binom{n+k-1}{k}$ följer direkt av att antalet följder av det första slaget är lika med antalet delmängder av storlek k till en mängd av storlek $n + k - 1$; se diskussionen i Notes 1 för fallet då ordningen ej spelar roll och upprepning ej är tillåten.

Ö.8. Den genererande funktionen för summan efter ett tärningskast är uppenbarligen

$$x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 = \frac{x - x^7}{1 - x} = \frac{x(1 - x^6)}{1 - x}.$$

Multiplikationsprincipen ger att den genererande funktionen för summan efter k tärningskast är

$$(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^k = \frac{(x - x^7)^k}{(1 - x)^k} = \frac{x^k(1 - x^6)^k}{(1 - x)^k}.$$

För att beräkna $a_{10,3}$ kan vi notera att den genererande funktionen är

$$\begin{aligned} & (x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^3 \\ = \; & (x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 4x^5 + 5x^6 + 6x^7 + 5x^8 + 4x^9 + 3x^{10} + 2x^{11} + x^{12}) \cdot \\ & (x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6). \end{aligned}$$

Koefficienten framför x^{10} är

$$3 + 4 + 5 + 6 + 5 + 4 = 27.$$

Ö.9.

(a) Antalet sätt att få n klave på r försök, under förutsättningen att det sista försöket ska ge klave, är lika med antalet sätt att välja $n-1$ element från en mängd med $r-1$ element. Detta antal är lika med $\binom{r-1}{n-1}$.

(b) Vi kan använda multiplikationsprincipen för att beräkna den eftersökta genererande funktionen. Vi kan nämligen se slantsinglingen som ett spel bestående av n omgångar, där en omgång pågår tills resultatet av en slantsingling blir klave. Poängen efter en omgång är antalet slantsinglingar i omgången, inklusive den sista. Den genererande funktionen för en omgång är

$$x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots = \frac{x}{1-x},$$

ty det finns bara ett sätt att få i poäng, nämligen genom att få krona $i-1$ gånger och sedan avsluta med klave. Multiplikationsprincipen ger därmed att den genererande funktionen för n omgångar blir $\frac{x^n}{(1-x)^n}$.

En alternativ lösning är att använda induktion över n genom att derivera vänster- och högerled i den formel vi vill visa. Detaljerna överlåts med glädje till den intresserade läsaren.

Ö.10. Vi kan använda multiplikationsprincipen genom att se termerna t, $2u$ och $3v$ som poängsummorna i tre olika omgångar i ett spel. Den genererande funktionen för den första poängsumman är

$$1 + x + x^2 + \cdots = \frac{1}{1-x},$$

ty t kan anta varje ickenegativt värde på precis ett sätt. Den genererande funktionen för den andra poängsumman är

$$1 + x^2 + x^4 + \cdots = \frac{1}{1-x^2},$$

ty $2u$ kan anta varje jämnt ickenegativt värde på precis ett sätt. På samma sätt erhåller vi att den genererande funktionen för den tredje poängsumman är

$$1 + x^3 + x^6 + \cdots = \frac{1}{1-x^3}.$$

Multiplikationsprincipen ger att den genererande funktionen för totalsumman är

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}.$$

Kommentar. Det vi gjorde i denna uppgift var att räkna antalet partitioner av talet n i delar av storlek 1, 2 och 3. I del II av denna kurs kommer vi att titta mer på partitioner av tal.

Ö.11.

(a) *Metod 1.* Låt T_n beteckna mängden av tillåtna ord av längd n. Låt vidare $a_{n,k}$ beteckna antalet tillåtna ord av längd n som slutar med k. Vi noterar att

$$a_n = 2a_{n-1,0} + 3a_{n-1,1} + 3a_{n-1,2} = 2a_{n-1} + a_{n-1,1} + a_{n-1,2}.$$

Vi har faktorn 2 framför $a_{n-1,0}$ därför att ett ord i T_{n-1} som slutar med 0 kan utvidgas till ett ord i T_n genom att antingen lägga till 1 eller 2. På liknande sätt resonerar vi oss fram till faktorerna framför $a_{n-1,1}$ och $a_{n-1,2}$. För den sista förenklingen använder vi oss av att $a_{n-1,0}+a_{n-1,1}+a_{n-1,2} = a_{n-1}$.

Vidare har vi att

$$a_{n-1,1} = a_{n-1,2} = a_{n-2},$$

ty varje tillåtet ord av längd $n-2$ kan utvidgas till ett ord av längd $n-1$ genom att lägga till 1 eller 2. Summerar vi får vi

$$a_n = 2a_{n-1} + a_{n-1,1} + a_{n-1,2} = 2a_{n-1} + 2a_{n-2}.$$

Metod 2. Med matrismetoden i Notes 1 får vi matrisen

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

vars karakteristiska polynom är lika med

$$\chi_M(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 - 2\lambda.$$

Detta ger rekursionen

$$a_n - 2a_{n-1} - 2a_{n-2} = 0 \iff a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2}$$

för $n \geq 4$. Man kontrollerar enkelt att ekvationen även gäller för $n = 3$.

(b) Vi ser att

$$\begin{aligned}
& A(x) - a_1x - a_2x^2 = \sum_{n\geq 3} a_nx^n \\
= \quad & \sum_{n\geq 3}(2a_{n-1} + 2a_{n-2})x^n \\
= \quad & \sum_{n\geq 3} 2a_{n-1}x^{n-1} \cdot x + \sum_{n\geq 3} 2a_{n-2}x^{n-2} \cdot x^2 \\
= \quad & \sum_{n\geq 2} a_nx^n \cdot 2x + \sum_{n\geq 1} a_nx^n \cdot 2x^2 \\
= \quad & (A(x) - a_1x) \cdot 2x + A(x) \cdot 2x^2 \\
= \quad & -2a_1x^2 + A(x)(2x + 2x^2) \\
\iff \quad & A(x)(1 - 2x - 2x^2) = a_1x + (a_2x^2 - 2a_1)x^2. \\
\iff \quad & A(x) = \frac{a_1x + (a_2x^2 - 2a_1)x}{1 - 2x - 2x^2} = \frac{3x + 2x^2}{1 - 2x - 2x^2}.
\end{aligned}$$

Ö.12. Först nämner vi att matrismetoden i Notes 1 ger en rekursion som relaterar a_n till inte bara a_{n-1} och a_{n-2} utan även till a_{n-3}:

$$a_n = a_{n-1} + 3a_{n-2} + a_{n-3}.$$

Man kan ändå lösa uppgiften med denna metod genom att i (b) visa att den genererande funktionen $A(x)$ uppfyller

$$A(x) = \frac{3x + 4x^2 + x^3}{1 - x - 3x^2 - x^3} = \frac{(3x + x^2)(1 + x)}{(1 + x)(1 - 2x - x^2)} = \frac{3x + x^2}{1 - 2x - x^2}.$$

Ur den förenklade nämnaren kan vi nu utläsa att

$$a_n - 2a_{n-1} - a_{n-2} = 0.$$

Vi presenterar dock en annan lösning på problemet:

(a) Låt $a_{n,k}$ beteckna antalet tillåtna ord av längd n som slutar med k. Med samma resonemang som i föregående uppgift kommer vi fram till att

$$a_n = 2a_{n-1,0} + 2a_{n-1,1} + 3a_{n-1,2} = 2a_{n-1} + a_{n-1,2}.$$

Vidare har vi att

$$a_{n-1,2} = a_{n-2,0} + a_{n-2,1} + a_{n-2,2} = a_{n-2},$$

ty vi kan alltid lägga till 2 till ett tillåtet ord. Summerar vi får vi

$$a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}.$$

(b) Med samma metod som i föregående uppgift kommer vi fram till att

$$\sum_{n \geq 1} a_n x^n = \frac{3x + x^2}{1 - 2x - x^2}.$$

Ö.13. (Uppdaterad 24 mars 2009.) Denna uppgift är lätt att lösa med matrismetoden i Notes 1 (jämför med metod 2 i lösningen till uppgift Ö.11). Vi använder oss av den den andra av våra två lösningsmetoder för att illustrera ett problem som ibland uppstår med lösningsmetoden.

Låt $a_{n,k}$ beteckna antalet tillåtna ord av längd n som slutar med k. Precis som i uppgift Ö.11 får vi att

$$a_n = 2a_{n-1,0} + 3a_{n-1,1} + 3a_{n-1,2} = 2a_{n-1} + a_{n-1,1} + a_{n-1,2}.$$

Den här gången är dock

$$a_{n-1,1} + a_{n-1,2} = a_{n-2,0} + 2a_{n-2,1} + 2a_{n-2,2},$$

vilket inte ser så bra ut. Högerledet kan nämligen inte skrivas som en konstant gånger a_{n-2}, ty konstanten framför $a_{n-2,0}$ inte är lika med konstanten framför $a_{n-2,1}$ och $a_{n-2,2}$.

Vi har dock att

$$a_{n-1,0} = a_{n-2,0} + a_{n-2,1} + a_{n-2,2} = a_{n-2},$$

vilket ser ut att vara mer användbart. Vi kan nämligen konstatera att

$$a_n = 2a_{n-1,0} + 3a_{n-1,1} + 3a_{n-1,2} = 3a_{n-1} - a_{n-1,0} = 3a_{n-1} - a_{n-2}.$$

(Om man inte lyckas hitta en omskrivning som ovan kan man försöka ansätta

$$\begin{aligned} a_n &= 2a_{n-1,0} + 3a_{n-1,1} + 3a_{n-1,2} \\ &= (2+k)a_{n-1} - ka_{n-1,0} - (k-1)a_{n-1,1} - (k-1)a_{n-1,2}, \end{aligned}$$

och sedan försöka bestämma k så att

$$\begin{aligned} & ka_{n-1,0} + (k-1)a_{n-1,1} + (k-1)a_{n-1,2} \\ = \;& m(a_{n-2,0} + a_{n-2,1} + a_{n-2,2}) = ma_{n-2} \end{aligned}$$

för någon konstant m. Detta ger nämligen ekvationen

$$a_n = (2+k)a_{n-1} - ma_{n-2}.)$$

Ö.14.

(a) Med metoden i Notes 1 får vi matrisen

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

vars karakteristiska polynom är lika med

$$\chi_M(\lambda) = \lambda^4 - 3\lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda - 1.$$

Detta ger den önskade rekursionen

$$\begin{aligned} & a_{n+4} - 4a_{n+3} + 3a_{n+2} + 2a_{n+1} - a_n = 0 \\ \Longleftrightarrow\quad & a_{n+4} = 4a_{n+3} - 3a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n. \end{aligned}$$

(b) Vi visar först att $F_{2k+4} = 3F_{2k+2} - F_{2k}$ för $k \geq 0$. Detta följer av att

$$\begin{aligned} F_{2k+4} &= F_{2k+3} + F_{2k+2} = (F_{2k+2} + F_{2k+1}) + F_{2k+2} \\ &= F_{2k+2} + (F_{2k+2} - F_{2k}) + F_{2k+2} = 3F_{2k+2} - F_{2k}. \end{aligned}$$

Vi använder nu denna identitet för att visa att $a_n = F_{2n+2}$ för $n \geq 1$. Det är givet i uppgiften att detta gäller för $1 \leq n \leq 4$. För $n \geq 5$ ger induktion att

$$\begin{aligned} a_n &= 4a_{n-1} - 3a_{n-2} - 2a_{n-3} + a_{n-4} \\ &= 8F_{2n} - 6F_{2n-2} - 4F_{2n-4} + 2F_{2n-6} \\ &= 8F_{2n} - 6F_{2n-2} - 4F_{2n-4} - 2F_{2n-6} + 6F_{2n-8} \\ &= 8F_{2n} - 8F_{2n-2} + 2F_{2n-4} \\ &= 8F_{2n} - 8F_{2n-2} - 2F_{2n} + 6F_{2n-2} \\ &= 6F_{2n} - 2F_{2n-2} = 2F_{2n+2}. \end{aligned}$$

Ö.15. Ge en ruta värdet 1 om en bricka ligger på rutan och värdet 0 annars. Låt x vara värdet på rutan längst till höger i den övre raden, och låt y vara värdet på rutan längst till höger i den nedre raden. Notera att de möjliga värdena på ordet xy är 00, 01, 10 och 11. Den sista kombinationen är tillåten, ty rutorna har ingen gemensam kant.

Anta nu att vi lägger till en ruta längst till höger på varje rad. Vi noterar att om $xy = 00$ kan vi placera brickor hur vi vill på de två nya rutorna. Om $xy = 10$ kan vi inte placera någon bricka på den övre nya rutan. Detta innebär att 10 bara kan följas av 00 och 01 och inte av 10 eller 11. Om slutligen $xy = 01$ eller 11 kan vi inte placera några brickor alls på de nya rutorna, vilket innebär att 01 och 11 bara kan följas av 00. Metoden i Notes 1 ger därmed matrisen

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Med viss möda kommer man fram till att

$$\chi_M(\lambda) = \lambda^4 - \lambda^3 - 3\lambda^2 - \lambda.$$

Detta ger rekursionen

$$a_n = a_{n-1} + 3a_{n-2} + a_{n-3}$$

för $n \geq 5$. (Ekvationen visar sig stämma även för $n = 4$, men detta behöver ej visas.)

Ö.16.

(a) Vi säger att en mängd har typ i om kardinaliteten för mängden är kongruent med i modulo 3. Vi noterar att följande gäller:

- För varje delmängd X till $\{1, \ldots, n\}$ av typ 0 är de två mängderna X och $X \cup \{n+1, n+2, n+3\}$ delmängder till $\{1, \ldots, n+3\}$ av typ 0.
- För varje delmängd X till $\{1, \ldots, n\}$ av typ 1 är de tre mängderna $X \cup \{n+1, n+2\}$, $X \cup \{n+1, n+3\}$ och $X \cup \{n+2, n+3\}$ delmängder till $\{1, \ldots, n+3\}$ av typ 0.
- För varje delmängd X till $\{1, \ldots, n\}$ av typ 2 är de tre mängderna $X \cup \{n+1\}$, $X \cup \{n+2\}$ och $X \cup \{n+3\}$ delmängder till $\{1, \ldots, n+3\}$ av typ 0.

Detta ger alla delmängder till $\{1, \ldots, n+3\}$ av typ 0, vilket innebär att

$$\beta_{n+3,0} = 2\beta_{n,0} + 3\beta_{n,1} + 3\beta_{n,2}.$$

Eftersom $\beta_{n,0} + \beta_{n,1} + \beta_{n,2} = 2^n$ drar vi slutsatsen att

$$\beta_{n+3,0} = 3 \cdot 2^n - \beta_{n,0}.$$

På samma sätt visar man att

$$\begin{aligned} \beta_{n+3,1} &= 3 \cdot 2^n - \beta_{n,1}, \\ \beta_{n+3,2} &= 3 \cdot 2^n - \beta_{n,2}. \end{aligned}$$

(b) Använd induktion över m. Vi studerar först fallet $k = 0$. För $m = 0$ har vi att

$$\left(8^m + 2(-1)^m\right)/3 = 1,$$

och det finns mycket riktigt en delmängd av typ 0 till den tomma mängden, nämligen den tomma mängden själv. Anta att vi har bevisat att $\beta_{3m,0} = \left(8^m + 2(-1)^m\right)/3$. Med hjälp av (a) erhåller vi att

$$\begin{aligned} \beta_{3m+3,0} &= 3 \cdot 2^{3m} - \beta_{3m,0} = 3 \cdot 8^m - \left(8^m + 2(-1)^m\right)/3 \\ &= \left(8 \cdot 8^m - 2(-1)^m\right)/3 = \left(8^{m+3} + 2(-1)^{m+1}\right)/3. \end{aligned}$$

Induktion ger det önskade resultatet. Bevisen för $\beta_{3m,1}$ och $\beta_{3m,2}$ är analoga.

Kommentar: Ett algebraiskt bevis ges i lösningen till uppgift 3.5 i Cameron på kursbokens hemsida.

Ö.17. För givet $n \geq 2$ är det sista talet $2n$ hopparat med antingen $2n-1$ eller $2n-2$:

- $2n$ är hopparat med $2n-1$. Vi får en tillåten hopparning av $1, \ldots, 2n-2$ om vi plockar bort $2n-1$ och $2n$. Det finns a_{n-1} sådana hopparningar.

- $2n$ är hopparat med $2n-2$. $2n-1$ måste då vara hopparat med $2n-3$, ty $2n-1$ kan bara paras ihop med $2n-3$, $2n-2$ och $2n$, och $2n-2$ och $2n$ är redan hopparade med varandra. Plockar vi bort $2n-3$, $2n-2$, $2n-1$ och $2n$ får vi en tillåten hopparning av $1, \ldots, 2n-4$. Det finns a_{n-2} sådana hopparningar.

Summerar vi får vi att $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.

Ö.18. Vi använder samma metod som i föregående uppgift. För givet $n \geq 3$ är det sista talet $2n$ hopparat med antingen $2n-1$, $2n-2$ eller $2n-3$.

- $2n$ är hopparat med $2n-1$. Med samma resonemang som i föregående uppgift kommer vi fram till att det finns a_{n-1} hopparningar med denna egenskap.
- $2n$ är hopparat med $2n-2$. Vi ser att $2n-1$ är hopparat med antingen $2n-3$ eller $2n-4$.
  - $2n-1$ är hopparat med $2n-3$. Plockar vi bort $2n-3$, $2n-2$, $2n-1$ och $2n$ får vi en tillåten hopparning av $1, \ldots, 2n-4$. Det finns a_{n-2} sådana hopparningar.
  - $2n-1$ är hopparat med $2n-4$. Låt b_n vara antalet hopparningar med denna egenskap. Vi återkommer till b_n senare.
- $2n$ är hopparat med $2n-3$. Den här gången är $2n-1$ hopparat med antingen $2n-2$ eller $2n-4$.
  - $2n-1$ är hopparat med $2n-2$. Plockar vi bort $2n-3$, $2n-2$, $2n-1$ och $2n$ får vi en tillåten hopparning av $1, \ldots, 2n-4$. Det finns a_{n-2} sådana hopparningar.
  - $2n-1$ är hopparat med $2n-4$. Då måste $2n-2$ vara hopparat med $2n-5$, ty $2n-4$, $2n-3$, $2n-1$ och $2n$ är redan hopparade. Plockar vi bort $2n-5, \ldots, 2n$ får vi en tillåten hopparning av $1, \ldots, 2n-6$. Det finns a_{n-3} sådana hopparningar.

Vi drar slutsatsen att

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + a_{n-3} + b_n. \tag{1}$$

Vi måste nu analysera b_n. Om vi plockar bort $2n-4$, $2n-2$, $2n-1$ och $2n$ ser vi att b_n är antalet tillåtna hopparningar av talen $1, 2, \ldots, 2n-6, 2n-5, 2n-3$. Vårt mål är att hitta ett rekursivt uttryck för b_n genom att studera talet $2n-3$. Detta tal kan bara paras ihop med $2n-5$ och $2n-6$.

- $2n-3$ är hopparat med $2n-5$. Det finns uppenbarligen a_{n-3} sådana hopparningar.
- $2n-3$ är hopparat med $2n-6$. Tar vi bort $2n-3$ och $2n-6$ återstår $1, 2, 3, \ldots, 2n-8, 2n-7, 2n-5$, vilket ger b_{n-1} hopparningar.

Vi sluter oss till att $b_n = b_{n-1} + a_{n-3}$, det vill säga

$$b_{n-1} = b_n - a_{n-3}. \tag{2}$$

Om vi skiftar alla index ett steg i ekvationen (1) och använder ekvationen (2) får vi att

$$a_{n-1} = a_{n-2} + 2a_{n-3} + a_{n-4} + b_{n-1} = a_{n-2} + a_{n-3} + a_{n-4} + b_n.$$

Lös nu ut b_n ur denna ekvation och stoppa in i (1); detta ger

$$\begin{aligned}
a_n &= a_{n-1} + 2a_{n-2} + a_{n-3} + b_n \\
&= a_{n-1} + 2a_{n-2} + a_{n-3} + a_{n-1} - (a_{n-2} + a_{n-3} + a_{n-4}) \\
&= 2a_{n-1} + a_{n-2} - a_{n-4}.
\end{aligned}$$

Ö.19.

(a) Låt $k \geq 1$. För varje givet i mellan 1 och n, studera de följder $(b_1, \ldots, b_k)$ som har egenskapen att $b_k = i$. Dessa följder har egenskapen att

$$1 \leq b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_{k-1} \leq i,$$

vilket innebär att det finns $a_{i,k-1}$ sådana följder. Slutsatsen är att

$$a_{n,k} = \sum_{i=1}^{n} a_{i-1,k-1}.$$

Summerar vi över k får vi att

$$\begin{aligned} A_n(x) &= \sum_{k \geq 0} a_{n,k} x^k = a_{n,0} + \sum_{k \geq 1} \sum_{i=1}^{n} a_{i,k-1} x^k \\ &= 1 + x \sum_{i=1}^{n} \sum_{k \geq 1} a_{i,k-1} x^{k-1} = 1 + x \sum_{i=1}^{n} A_i(x). \end{aligned}$$

(b) Använd induktion över n. Basfallet $n = 1$ överlåts till läsaren. För $n \geq 2$ får vi att

$$\begin{aligned} A_n(x)(1-x) &= \; = 1 + x \sum_{i=1}^{n-1} A_i(x) = 1 + x \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{(1-x)^i} \\ &= 1 + x \frac{\frac{1}{(1-x)^n} - \frac{1}{1-x}}{\frac{1}{1-x} - 1} \\ &= 1 + \frac{1}{(1-x)^{n-1}} - 1 = \frac{1}{(1-x)^{n-1}}. \end{aligned}$$

Division med $1 - x$ ger den önskade identiteten.

Ö.20. Låt c_n vara antalet icke-skärande hopparningar av $1, \ldots, 2n$. Låt $n \geq 1$. För en given hopparning, låt k vara sådant att $2n$ är hopparad med k; vi har att $1 \leq k \leq 2n-1$. Villkoret att inga linjestycken får korsa varandra innebär att punkterna $1, 2, \ldots, k-1$ måste vara hopparade med varandra, och analogt för punkterna $k+1, k+2, \ldots, 2n-1$. I synnerhet är $k-1$ och $2n-1-k$ jämna, det vill säga k är udda och alltså på formen $k = 2i+1$ för något i sådant att $0 \leq i \leq n-1$. Det finns nu c_i hopparningar av punkterna $1, 2, \ldots, 2i$ och c_{n-i-1} hopparningar av punkterna $2i+2, 2i+3, \ldots, 2n-1$, förutsatt att vi definierar $c_0 = 1$. Summerar vi över i får vi ekvationen

$$c_n = \sum_{i=0}^{n-1} c_i c_{n-i-1}.$$

Eftersom $c_0 = 1$ kan vi dra slutsatsen att c_n är det n:te Catalantalet C_n.

Ö.21. Låt c_n vara det sökta antalet sätt. Vi använder ledningen: För en given svit partier, låt $k \geq 1$ vara minimalt sådant att A och B har vunnit precis lika många partier efter $2k$ omgångar. Från omgång 1 till omgång $2k-1$ har A hela tiden en ledning med minst ett parti. Om vi bortser från den första omgången, som A nödvändigtvis vinner, kommer A därmed att ha vunnit minst lika många partier som B från omgång 2 till omgång $2k-1$. Det finns c_{k-1} möjliga sätt detta kan ske på. Eftersom ställningen är lika efter $2k$ omgångar kommer A att ha vunnit minst lika många partier som B från omgång $2k+1$ till omgång $2n$. Det finns c_{n-k} sätt detta kan ske på. Möjliga värden på k är $1, \ldots, n$, vilket ger rekursionen

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} c_{k-1} c_{n-k} = \sum_{k=0}^{n-1} c_k c_{n-1}.$$

Precis som i föregående uppgift kan vi nu dra slutsatsen att c_n är lika med det n:te Catalantalet.