

# SF2715 Applied Combinatorics

## Extra exercises and solutions, Part 3

Jakob Jonsson

May 5, 2011

### Ö Övningsuppgifter

These extra exercises are in Swedish. If you have trouble understanding please contact the course leader Svante.

#### Ö.1 Minimalt uppspännande träd i gittergraf

I gittergrafen  $G_{r,k}$  (se Notes 3), ge alla horisontella (vågräta) kanter vikten 1 och alla vertikala (lodräta) kanter vikten 2. Beräkna totalvikten på ett minimalt uppspännande träd i  $G_{r,k}$ .

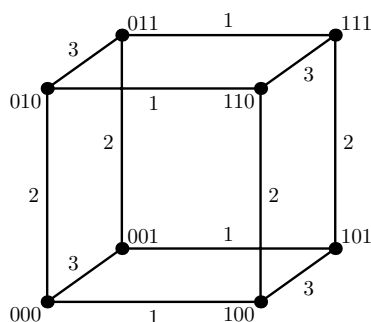
*Svårighetsgrad:* D

#### Ö.2 Minimalt uppspännande träd i hyperkub

Låt  $n \geq 1$ , och låt  $H_n$  ha som hörn alla binära ord av längd  $n$ . Två hörn är sammanbundna om och endast om de skiljer sig åt på exakt en position. Detta innebär att  $H_n$  har formen av en  $n$ -dimensionell hyperkub. Se Figur 1 för fallet  $n = 3$ , då vi får den 3-dimensionella kuben. Definiera kantvikter genom att ge vikten  $k$  till varje kant som går mellan två binära ord som skiljer sig åt på position  $k$  (räknat från vänster). Visa att ett minimalt uppspännande träd har totalvikten  $2^{n+1} - n - 2$ .

*Ledning:* Använd induktion över  $n$ .

*Svårighetsgrad:* B-C



Figur 1: Grafen  $H_3$  med kantvikter som i uppgift Ö.2.

### Ö.3 Unikt minimalt uppspännande träd

Låt  $G = (V, E)$  vara en sammanhängande graf med reellvärda kantvikter  $\{w(e) : e \in E\}$  sådana att det inte finns två kanter med exakt samma vikt. Vi har alltså att  $w(e) \neq w(e')$  om  $e \neq e'$ .

- (a) Visa att  $G$  har ett unikt minimalt uppspännande träd.

*Ledning:* Studera två uppspännande träd  $T$  och  $U$ . Låt  $e$  vara minimal med avseende på vikt sådan att  $e$  bara finns med i ett av träden, säg  $T$ . Visa att  $U + e$  innehåller ett uppspännande träd med lägre vikt än  $U$ .

- (b) Visa att följande två egenskaper hos ett uppspännande träd i  $G$  är ekvivalenta:
- $T$  är det minimala uppspännande trädet i  $G$ .
  - Varje kant  $e$  i  $G$  som ej tillhör  $T$  har maximal vikt bland de kanter som ingår i den unika cykeln i  $T + e$ .

*Svårighetsgrad:* A-B

### Ö.4 Hamiltoncykler i bipartita grafer

Låt  $G$  vara en bipartit graf. Det finns med andra ord en partition  $\{A, B\}$  av  $G$ 's hörnmängd sådan att alla kanter i  $G$  har en ändpunkt i  $A$  och en ändpunkt i  $B$ . Anta att  $G$  har en Hamiltoncykel. Visa att  $|A| = |B|$ .

*Svårighetsgrad:* E

### Ö.5 Hamiltoncykler i gittergrafer

- (a) Hitta en Hamiltoncykel i var och en av gittergraferna  $G_{4,6}$  och  $G_{5,6}$  (se Notes 3).
- (b) Anta att  $r$  och  $k$  båda är udda. Visa att  $G_{r,k}$  inte innehåller någon Hamiltoncykel.

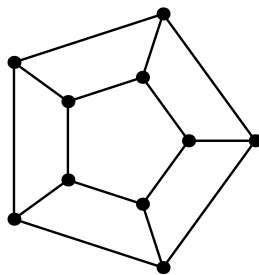
*Svårighetsgrad:* (a): E, (b): C

### Ö.6 Hamiltoncykler och perfekta matchningar

En *perfekt matchning* i en graf med  $2m$  hörn är en mängd  $M$  bestående av  $m$  kanter sådana att varje hörn i grafen finns med i exakt en kant i  $M$ .

- (a) Anta att  $G$  är en graf med  $2m$  hörn sådan att  $G$  innehåller en Hamiltoncykel. Visa att man kan hitta två perfekta matchningar  $M_1$  och  $M_2$  i  $G$  sådana att  $M_1 \cap M_2 = \emptyset$  (det vill säga ingen kant finns med i både  $M_1$  och  $M_2$ ).
- (b) Anta nu att  $G$  innehåller en Hamiltoncykel och att varje hörn i  $G$  har exakt tre grannar. Visa att det finns en partition  $\{M_1, M_2, M_3\}$  av kantmängden i  $G$  sådan att  $M_1, M_2, M_3$  alla är perfekta matchningar.
- (c) För grafen i Figur 2, hitta en partition  $\{M_1, M_2, M_3\}$  av kantmängden sådan att  $M_1, M_2, M_3$  alla är perfekta matchningar.

*Svårighetsgrad:* (a): D, (b): C, (c): C



Figur 2: Grafen i uppgift Ö.6 (c).

## Ö.7 Grafer med Hamiltonstig men utan Hamiltoncykler

Låt  $G$  vara en graf på hörnmängden  $\{1, \dots, n\}$ . Anta att  $G$  har en kant mellan  $i$  och  $i + 1$  för  $1 \leq i \leq n - 1$ . Detta innebär att  $G$  innehåller Hamiltonstigen  $(1, 2, 3, \dots, n)$ . Anta vidare att  $G$  inte har någon Hamiltoncykel.

- Visa att det inte finns något hörn  $i$ ,  $3 \leq i \leq n - 1$ , sådant att både kanten  $(1, i)$  och kanten  $(i - 1, n)$  finns med i  $G$ .
- Visa att det inte finns hörn  $i$  och  $j$ ,  $2 \leq i < j \leq n - 1$ , sådana att kanterna  $(1, i)$ ,  $(j, n)$  och  $(i - 1, j + 1)$  alla finns med i  $G$ .
- Visa att det inte finns hörn  $i$  och  $j$ ,  $2 \leq i < j \leq n - 1$ , sådana att kanterna  $(1, j)$ ,  $(i, n)$  och  $(i - 1, j - 1)$  alla finns med i  $G$ .

Ledning: Rita!

Svårighetsgrad: D

## Ö.8 Gasledningar

I Figur 3 illustreras ett nätverk av gasledningar mellan två länder  $S$  och  $T$ ; varje lednings kapacitet anges i hundratals miljoner kubikmeter gas per vecka. Alla ledningar kan användas i båda riktningarna.

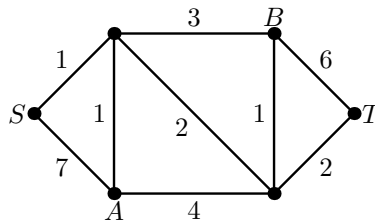
- Ange ett maximalt flöde i nätverket, och visa att flödet är maximalt.
- För att täcka sina framtida behov på 800 miljoner kubikmeter importerad gas per vecka trycker landet  $T$  på för en ny ledning mellan länderna  $A$  och  $B$ . Vilken kapacitet behövs på denna nya ledning för att uppnå det önskade flödet?

Svårighetsgrad: E

## Ö.9 Flöden i nätverk med flera sänkor

I denna uppgift får du använda dig av att det finns en känd metod för att beräkna ett maximalt flöde i ett nätverk med exakt en källa och exakt en sänka.

- Låt  $D$  vara ett nätverk med en källa  $s$  och flera sänkor  $t_1, \dots, t_r$ , alla skilda från  $s$ . Med ett flöde i  $D$  menar vi ett flöde med nettoflöde 0 i alla hörn  $v \notin \{s, t_1, \dots, t_r\}$ , och storleken på flödet är nettoflödet ut ur  $s$ . Ange en metod för att bestämma ett maximalt flöde i  $D$ .



Figur 3: Nätverket i uppgift Ö.8.

- (b) För givna icke-negativa parametrar  $p_1, \dots, p_r$ , ange en metod för att hitta ett flöde med egenskapen att nettoflödet till  $t_i$  är exakt  $p_i$  för  $1 \leq i \leq r$ , under förutsättning att ett sådant flöde existerar.

*Svårighetsgrad:* C

### Ö.10 Maximala flöden med olika riktningar mellan två givna hörn

Syftet med denna uppgift är att visa att det kan finnas två hörn  $a$  och  $b$  i ett nätverk med egenskapen att tecknet på  $f(a, b)$  beror på valet av maximalt flöde  $f$  (och alltså inte är entydigt bestämt av kanternas kapacitet). Med  $f(a, b)$  menas här flödet från  $a$  till  $b$  längs en kant de delar. Om flödet går åt andra hållet så blir alltså  $f(a, b)$  negativ.

- (a) Låt  $D$  vara definierad som i Figur 4. Visa att det finns tre maximala flöden  $f_1, f_2$  och  $f_3$  sådana att  $f_1(a, b) > 0$ ,  $f_2(a, b) = 0$  och  $f_3(a, b) < 0$ .

*Ledning:* Hitta först ett maximalt flöde, och utgå sedan från detta flöde för att konstruera flöden med de önskade egenskaperna.

- (b) Konstruera ett nätverk av storlek två med bara fyra hörn  $s, t, a$  och  $b$  sådant att det finns tre maximala flöden  $f_1, f_2$  och  $f_3$  sådana att  $f_1(a, b) > 0$ ,  $f_2(a, b) = 0$  och  $f_3(a, b) < 0$ . Som vanligt är  $s$  källan och  $t$  sänkan.

*Svårighetsgrad:* (a): C, (b): B

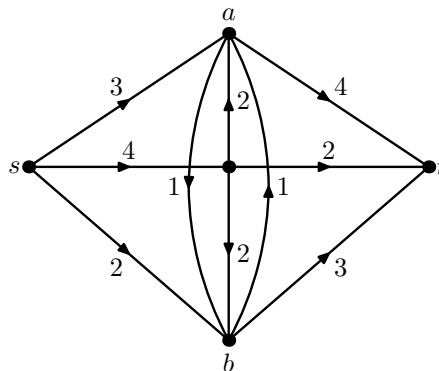
### Ö.11 Konstruktion av bipartit graf med flödesalgoritm

Låt  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$  och  $B = \{b_1, \dots, b_m\}$  vara två mängder av hörn, och låt  $c_1, \dots, c_n$  och  $d_1, \dots, d_m$  vara icke-negativa heltal sådana att

$$\sum_{i=1}^n c_i = \sum_{j=1}^m d_j.$$

Man vill bilda en bipartit graf med kanter från hörnen i  $A$  till hörnen i  $B$  så att hörnet  $a_i$  har exakt  $c_i$  grannar i  $B$  för alla  $i$  och så att hörnet  $b_j$  har exakt  $d_j$  grannar i  $A$  för alla  $j$ . Formulera detta problem som problemet att hitta ett maximalt flöde i ett nätverk, och ange vilka egenskaper detta flöde måste ha för att vi ska få en bipartit graf med önskade egenskaper. (Du behöver bara formulera problemet, inte lösa det.)

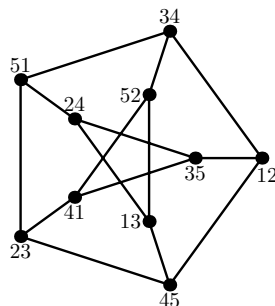
*Svårighetsgrad:* B-C



Figur 4: Nätverket i uppgift Ö.10.

## Ö.12 Knesergrafer

Låt  $n \geq 2k$ . Bilda en graf  $H_{n,k}$  med ett hörn för varje delmängd till  $\{1, \dots, n\}$  av storlek  $k$  och med en kant mellan två hörn  $A$  och  $B$  om och endast om  $A$  och  $B$  är disjunkta.  $H_{n,k}$  är en så kallad *Knesergraf*. Se Figur 5 för Knesergraf  $H_{5,2}$ , även kallad *Petersengrafen*.



Figur 5: Petersengrafen  $H_{5,2}$ , den mest välkända Knesergraf. Vi skriver  $ab$  för att beteckna hörnet  $\{a, b\}$ .

(a) Visa att varje hörn i  $H_{n,k}$  har  $\binom{n-k}{k}$  grannar.

(b) Låt  $(A, B, C)$  vara en stig i  $H_{n,k}$ . Visa att

$$|A \setminus C| \leq n - 2k.$$

(c) Mer allmänt, låt  $(A_1, A_2, \dots, A_{2i+1})$  vara en stig i  $H_{n,k}$ , där  $i \geq 1$ . Visa att

$$|A_1 \setminus A_{2i+1}| \leq i(n - 2k).$$

Dra slutsatsen att det inte finns någon cykel av udda längd i  $H_{n,k}$  vars längd understiger  $\frac{n}{n-2k}$ .

*Ledning:* Använd följande olikhet för ändliga mängder:

$$|X \setminus Z| \leq |X \setminus Y| + |Y \setminus Z|.$$

*Svårighetsgrad:* (a): E, (b): E, (c): A-B

## Lösningsförslag till övningsuppgifter, del 3

**Ö.1.** Mängden av kanter med vikt 1 innehåller inga cykler, vilket innebär att det finns ett uppspännande träd som innehåller samtliga kanter med vikt 1. Det finns  $r(k-1)$  sådana kanter. Eftersom ett träd på  $rk$  hörn innehåller  $rk-1$  kanter behöver vi ytterligare  $(rk-1) - r(k-1) = r-1$  kanter för att få ett uppspännande träd. Dessa kanter har alla vikt 2, vilket innebär att totalvikten på ett minimalt uppspännande träd är

$$1 \cdot r(k-1) + 2 \cdot (r-1) = rk + r - 2.$$

**Ö.2.** För  $n=1$  har vi en graf med två hörn 0 och 1 och en kant med vikten 1. Det enda uppspännande trädet har uppenbarligen vikten 1.

Låt  $n \geq 2$  och använd induktion. För  $i=0,1$ , låt  $H_{n,i}$  vara den inducerade delgrafen av  $H_n$  bestående av alla hörn som slutar med  $i$ . Observera att vi kan identifiera  $H_{n,i}$  med  $H_{n-1}$ ; identifiera hörnet  $b_1b_2 \dots b_{n-1}i$  i  $H_{n,i}$  med hörnet  $b_1b_2 \dots b_{n-1}$  i  $H_{n-1}$ . I synnerhet har ett minimalt uppspännande träd i  $H_{n,i}$  samma vikt som ett minimalt uppspännande träd i  $H_{n-1}$ . Induktion ger att denna vikt är lika med

$$2^n - (n-1) - 2 = 2^n - n - 1.$$

Den giriga algoritmen (*greedy algorithm*) ger att ett minimalt uppspännande träd i  $H_n$  har minsta möjliga antal kanter med maximal vikt  $n$ . Plockar vi bort alla kanter med vikt  $n$  från  $H_n$  får vi en graf bestående av två sammanhängande komponenter som är precis  $H_{n,0}$  och  $H_{n,1}$ . Vi får alltså ett minimalt uppspännande träd i  $H_n$  genom att först välja ett minimalt uppspännande träd i var och en av graferna  $H_{n,0}$  och  $H_{n,1}$  och sedan lägga till en enda kant med vikt  $n$  som sammanbinder dessa båda grafer. Totalvikten för ett sådant träd blir

$$2(2^n - n - 1) + n = 2^{n+1} - 2n - 2 + n = 2^{n+1} - n - 2.$$

### Ö.3.

- (a) Låt  $T$  och  $U$  vara två olika uppspännande träd i  $G$ . Vi vill visa att högst ett av dessa träd är minimalt. Detta medför att det finns ett unikt minimalt uppspännande träd i  $G$ .

Sortera kanterna i  $T$  och  $U$  i växande ordning med avseende på vikten som  $(e_1, \dots, e_{n-1})$  respektive  $(f_1, \dots, f_{n-1})$ . Låt  $k$  vara minimalt sådant att  $e_k \neq f_k$ . Vi kan anta att  $w(e_k) < w(f_k)$ ; fallet då  $w(f_k) < w(e_k)$  är analogt. Studera grafen  $U + e_k$ . I denna graf finns en unik cykel som innehåller kanten  $e_k$ . Denna cykel måste innehålla någon kant  $f_j$  sådan att  $j \geq k$ , ty kantmängden  $\{f_1, \dots, f_{k-1}, e_k\} = \{e_1, \dots, e_{k-1}, e_k\}$  innehåller ingen cykel;  $T$  är ett träd. I synnerhet har vi att  $w(e_k) < w(f_j)$ . Plockar vi bort  $f_j$  från  $U + e_k$  får vi ett uppspännande träd  $U'$  vars totalvikt är strikt lägre än totalvikten på trädet  $U$ . Slutsatsen är att  $U$  inte är minimalt.

- (b) För den ena riktningen, anta att det finns en kant  $e$  i  $G \setminus T$  sådan att den unika cykeln i  $T + e$  innehåller en kant  $f$  sådan att  $w(e) < w(f)$ . Då är

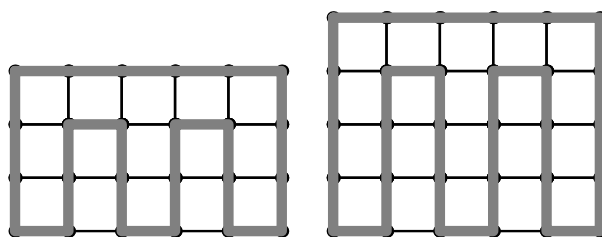
$(T + e) - f$  ett uppspännande träd till  $G$  med lägre totalvikt än  $T$ . Alltså är  $T$  inte minimalt.

För den andra riktningen, anta att  $T$  inte är minimalt. Låt  $U$  vara ett minimalt uppspännande träd i  $G$ . (Enligt (a) är  $U$  unikt.) Precis som i lösningen till (a) sorterar vi kanterna i  $T$  och  $U$  i växande ordning med avseende på vikten som  $(e_1, \dots, e_{n-1})$  respektive  $(f_1, \dots, f_{n-1})$ . Låt  $k$  vara minimalt sådant att  $e_k \neq f_k$ . Enligt lösningen till (a) kan vi inte ha att  $w(e_k) < w(f_k)$ , ty detta skulle innebära att  $U$  inte är minimalt. Alltså är  $w(e_k) > w(f_k)$ . Den unika cykeln i  $T + f_k$  kan inte enbart bestå av kanter från mängden  $\{e_1, \dots, e_{k-1}, f_k\} = \{f_1, \dots, f_{k-1}, f_k\}$ , ty detta är en delmängd till kantmängden till  $U$ . Alltså innehåller cykeln en kant  $e_j$  sådan att  $j > k$ . Eftersom  $w(e_j) > w(e_k) > w(f_k)$  drar vi slutsatsen att  $f_k$  inte har maximal vikt i den unika cykeln i  $T + f_k$ .

**Ö.4.** Låt  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  vara en Hamiltoncykel. Eftersom varje kant sammanbinder ett hörn från  $A$  och ett hörn från  $B$  kommer vartannat hörn att tillhöra  $A$  och vartannat hörn att tillhöra  $B$ . Om  $v_1$  tillhör  $A$  kommer alltså alla  $v_i$  sådana att  $i$  är udda att tillhöra  $A$  och alla övriga hörn att tillhöra  $B$ . Dessutom har vi en kant mellan  $v_1$  och  $v_n$ , vilket innebär att  $v_n$  tillhör  $B$  om  $v_1$  tillhör  $A$ . I synnerhet är  $n$  jämnt, och  $|A| = |B| = n/2$ .

**Ö.5.**

- (a) Se Figur 6 för exempel på Hamiltoncykler i  $G_{4,6}$  och  $G_{5,6}$ . (Det finns förstås många andra möjligheter.)
- (b) Notera att  $G_{r,k}$  är bipartit. Detta ser man direkt om man placerar grafen på ett schackbräde som i Figur 7; varje kant går mellan en grå och en vit ruta. När  $r$  och  $k$  är udda är även  $rk$  udda. I synnerhet har vi ett udda antal hörn i  $G_{r,k}$ , vilket innebär att antalet grå rutor inte är lika med antalet vita rutor. Enligt föregående uppgift innebär detta att det inte finns någon Hamiltoncykel i  $G_{r,k}$ .



Figur 6: Hamiltoncykler i  $G_{4,6}$  (till vänster) och  $G_{5,6}$  (till höger).

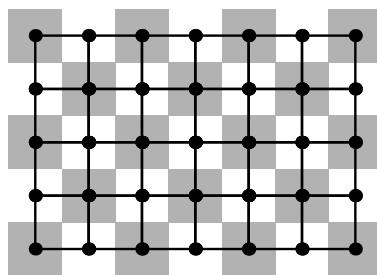
**Ö.6.**

- (a) Låt  $(v_1, \dots, v_{2m})$  vara en Hamiltoncykel i  $G$ . Då utgör kantmängderna

$$M_1 = \{(v_1, v_2), (v_3, v_4), \dots, (v_{2m-1}, v_{2m})\}$$

och

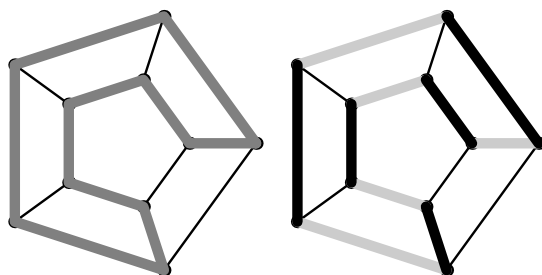
$$M_2 = \{(v_2, v_3), (v_4, v_5), \dots, (v_{2m-2}, v_{2m-1}, (v_{2m}, v_1)\}$$



Figur 7: Gittergrafen  $G_{5,7}$  ritad på ett schackbräde.

perfekta matchningar i  $G$ , och de två mängderna har inga gemensamma kanter.

- (b) Låt än en gång  $(v_1, \dots, v_{2m})$  vara en Hamiltoncykel i  $G$ . Definiera kantmängderna  $M_1$  och  $M_2$  precis som i (a), och låt  $M_3$  vara mängden av kanter i  $G$  som inte finns med i vare sig  $M_1$  eller  $M_2$ . Vi har att  $M_3$  är en perfekt matchning. För varje hörn i  $G$  finns det nämligen exakt tre kanter i  $G$  som innehåller hörnet. Eftersom precis en av dessa kanter är med i  $M_1$  och precis en är med i  $M_2$  återstår precis en kant som är med i  $M_3$ . Detta är ekvivalent med att  $M_3$  är en perfekt matchning.
- (c) Vi löser problemet genom att använda metoden i (b). Först hittar vi en Hamiltoncykel i grafen; se bilden till vänster i Figur 8. Denna Hamiltoncykel kan vi sedan dela upp i två perfekta matchningar  $M_1$  och  $M_2$ , och de kanter som ej är med i cykeln bildar en tredje matchning  $M_3$ . I bilden till höger i Figur 8 har vi markerat  $M_1$  med tjocka svarta kanter,  $M_2$  med tjocka gråa kanter och  $M_3$  med tunna svarta kanter.

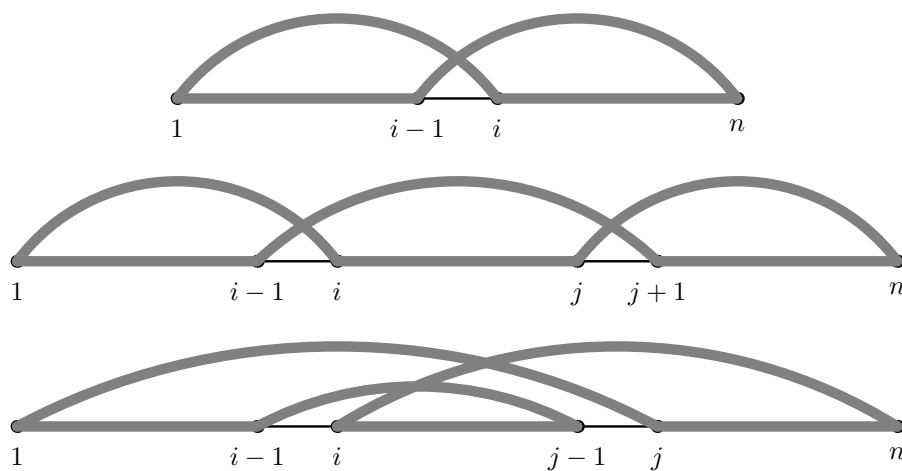


Figur 8: Till vänster en Hamiltoncykel i grafen i uppgift Ö.6 (c). Till höger en uppdelning av kanterna i tre perfekta matchningar.

**Ö.7.** Låt  $P$  vara Hamiltonstigen  $(1, 2, 3, \dots, n)$ .

- (a) Om  $(1, i)$  och  $(i-1, n)$  fanns med i  $G$  skulle vi få en Hamiltoncykel genom att gå framåt i  $P$  från 1 till  $i-1$ , hoppa från  $i-1$  till  $n$ , gå baklänges i  $P$  från  $n$  till  $i$  och hoppa tillbaka från  $i$  till 1. Se den första bilden i Figur 9 för en illustration.

- (b) Den här gången skulle vi få en Hamiltoncykel genom att gå framåt i  $P$  från 1 till  $i - 1$ , hoppa från  $i - 1$  till  $j + 1$ , gå framåt i  $P$  från  $j + 1$  till  $n$ , hoppa från  $n$  till  $j$ , gå bakåt i  $P$  från  $j$  till  $i$  och hoppa tillbaka från  $i$  till 1. Se den andra bilden i Figur 9 för en illustration.
- (c) Här skulle vi få en Hamiltoncykel genom att gå framåt i  $P$  från 1 till  $i - 1$ , hoppa från  $i - 1$  till  $j - 1$ , gå bakåt från  $j - 1$  till  $i$ , hoppa från  $i$  till  $n$ , gå bakåt från  $n$  till  $j$  och hoppa tillbaka från  $j$  till 1. Se den tredje bilden i Figur 9 för en illustration.



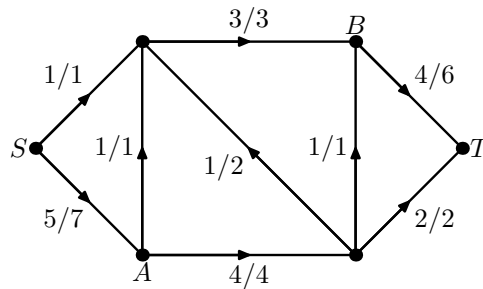
Figur 9: TBD uppgift Ö.7.

### Ö.8.

- (a) I Figur 10 har vi markerat ett maximalt flöde och i vilka riktningar de olika kanterna används. Beteckningen  $a/b$  vid en given kant betyder att flödet genom kanten är  $a$  och att kapaciteten är  $b$  (uttryckt i enheten hundra miljoner kubikmeter per vecka). Värdet på flödet från  $S$  till  $T$  är som synes 6. Att flödet är maximalt kan man se genom att studera snittet av kanter som skiljer länderna  $B$  och  $T$  från de fyra andra länderna. Detta snitt har uppenbarligen värdet 6 och utnyttjas maximalt. Detsamma gäller snittet som skiljer länderna  $S$  och  $A$  från de fyra övriga länderna.
- (b) För att uppnå ett flöde på 8 (uttryckt i enheten hundra miljoner kubikmeter per vecka) behöver man öka totalflödet från  $S$  till  $T$  med 2. Som man kan se i Figur 10 finns det utrymme att öka flödet såväl från  $S$  till  $A$  som från  $B$  till  $T$  med just denna mängd. Ledningen från  $A$  till  $B$  ska alltså ha kapaciteten 2 för att tillgodose  $T$ 's behov.

### Ö.9.

- (a) Bilda ett nytt nätverk  $D'$  genom att lägga till ett nytt hörn  $t$  och dra en riktad kant från  $t_i$  till  $t$  för  $1 \leq i \leq r$ . Ge kanten  $(t_i, t)$  så pass hög kapacitet att den överstiger den totala kapaciteten in i  $t_i$  (alltså i praktiken



Figur 10: Nätverket i uppgift Ö.8.

obegränsad kapacitet). Vi vet hur man bestämmer ett maximalt flöde i  $D'$  med källa  $s$  och sänka  $t$ .

För ett flöde  $f'$  i  $D'$  får vi ett flöde  $f$  i  $D$  genom att plocka bort de tillagda kanterna. Omvänt kan vi utvidga ett flöde  $f$  i  $D$  till ett flöde  $f'$  i  $D'$  genom att definiera  $f'(t_i, t)$  att vara nettoflödet in i  $t_i$ . Detta ger en bijektion mellan flöden i  $D$  och flöden i  $D'$ , och uppenbarligen bevaras storleken under denna bijektion, ty storleken ges av flödet ut ur  $s$ .

För att sammanfatta bestämmer vi att maximalt flöde i  $D$  genom att först bestämma ett maximalt flöde i  $D'$  med källa  $s$  och sänka  $t$  på sedvanligt vis och sedan plocka bort de tillagda kanterna.

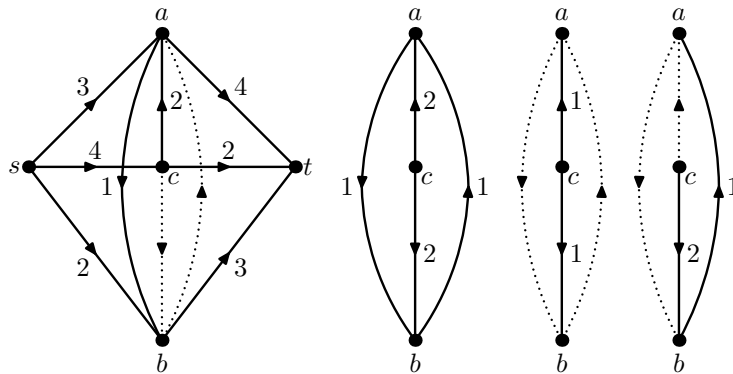
- (b) Gör precis som i (a), men definiera kapaciteten för  $(t_i, t)$  i  $D'$  att vara  $p_i$ . Med hjälp av bijektionen i (a) mellan flöden i  $D$  och  $D'$  ser vi att vi har ett flöde i  $D$  med önskade egenskaper precis då motsvarande flöde i  $D'$  utnyttjar kapaciteten i kanten  $(t_i, t)$  maximalt för  $1 \leq i \leq r$ . Detta innebär att vårt problem är lösbart om och endast om det finns ett maximalt flöde i  $D'$  av storlek  $\sum_{i=1}^r p_i$ .

### Ö.10.

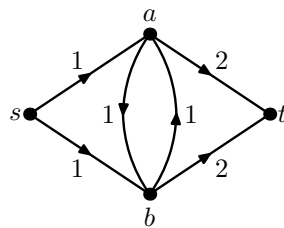
- (a) Vi hittar först ett godtyckligt maximalt flöde  $f$ , säg det längst till vänster i Figur 11. Att flödet är maximalt inses genom att notera att storleken på flödet är 9, vilket är lika med storleken på snittet bestående av kanterna som utgår från  $s$  och även storleken på snittet bestående av kanterna som går in i  $t$ . Eftersom  $f(a, b) = +1 > 0$  kan vi välja  $f_1 = f$ .

Vi vill nu hitta  $f_2$  och  $f_3$ . Notera att varje maximalt flöde utnyttjar kapaciteten hos kanterna vid  $s$  och  $t$  maximalt. Vår enda frihet är därmed flödet genom kanterna mellan hörnen  $a$ ,  $b$  och  $c$ . Vi illustrerar detta delnätverk i den andra bilden från vänster i Figur 11. I ett maximalt flöde är flödet in i  $c$  från  $s$  lika med 4 och flödet ut ur  $c$  till  $t$  lika med 2. Det totala nettoflödet från  $c$  till  $a$  och  $b$  i delnätverket är alltså  $+2$ . På samma sätt får vi att det totala nettoflödet från  $a$  till  $b$  och  $c$  är  $-1$ , liksom det totala nettoflödet från  $b$  till  $a$  och  $c$ . Vi kan därmed definiera  $f_2$  och  $f_3$  som i den tredje respektive fjärde bilden i Figur 11.

- (b) Se Figur 12 för ett nätverk med önskade egenskaper. Vi överlåter till läsaren att hitta tre maximala flöden  $f_1$ ,  $f_2$  och  $f_3$  sådana att  $f_1(a, b) > 0$ ,  $f_2(a, b) = 0$  och  $f_3(a, b) < 0$ .



Figur 11: Längst till vänster ett maximalt flöde  $f_1$  i uppgift Ö.10 (a) sådant att  $f_1(a, b) > 0$ . Tvåa från vänster det delnätverk som erhålls om vi tar bort källan och sänkan. Till höger flöden  $f_2$  och  $f_3$  sådana att  $f_2(a, b) = 0$  och  $f_3(a, b) < 0$ .



Figur 12: Exempel på ett nätverk med egenskaper som i uppgift Ö.10 (b).

**Ö.11.** Definiera ett nätverk med hörnmängd  $\{s, t\} \cup A \cup B$  på följande vis: Dra en riktad kant från varje hörn i  $A$  till varje hörn i  $B$ , och ge denna kant kapaciteten 1. Dra även en riktad kant från  $s$  till vart och ett av hörnen i  $A$ , och ge kanten från  $s$  till  $a_i$  vikten  $c_i$ . Dra slutligen en riktad kant från vart och ett av hörnen i  $B$  till  $t$ , och ge kanten från  $b_j$  till  $t$  kapaciteten  $d_j$ . Problemet att konstruera en bipartit graf med önskade egenskaper är ekvivalent med att hitta ett maximalt flöde i detta nätverk sådant att alla kanter ut ur  $s$  och in i  $t$  utnyttjas maximalt.

(Se 18.1.4 (Gale-Rysers sats) i Cameron om du vill fördjupa dig i det här problemet.)

### Ö.12.

- Studera ett hörn  $A$  i  $H_{n,k}$ . Per definition är  $A$  en delmängd till  $\{1, \dots, n\}$  med  $k$  element. Ett annat hörn  $B$  är granne med  $A$  om och endast om  $B$  är en delmängd till  $X = \{1, \dots, n\} \setminus A$  med  $k$  element. Eftersom  $X$  innehåller  $n - k$  element finns det  $\binom{n-k}{k}$  sådana hörn.
- Eftersom  $B$  och  $A \cup C$  är disjunkta och  $|A| = |B| = |C| = k$  måste vi ha att

$$|A \setminus C| = |A \cup C| - |C| \leq (n - |B|) - k = n - 2k.$$

- (c) Använd induktion över  $i$ . För  $i = 1$  får vi olikheten som vi visade i (c). Anta att  $i \geq 2$ , och använd induktion. Genom att använda ledningen till uppgiften med  $X = A_1$ ,  $Y = A_{2i-1}$  och  $Z = A_{2i+1}$  erhåller vi att

$$|A_1 \setminus A_{2i+1}| \leq |A_1 \setminus A_{2i-1}| + |A_{2i-1} \setminus A_{2i+1}|.$$

Induktion ger att  $|A_1 \setminus A_{2i-1}| \leq (i-1)(n-2k)$  och  $|A_{2i-1} \setminus A_{2i+1}| \leq n-2k$ , vilket kombinerat med ovanstående medför att

$$\begin{aligned} |A_1 \setminus A_{2i+1}| &= |A_1 \setminus A_{2i-1}| + |A_{2i-1} \setminus A_{2i+1}| \\ &\leq (i-1)(n-2k) + (n-2k) = i(n-2k). \end{aligned}$$

Anta nu att  $(A_1, \dots, A_{2i+1})$  är en cykel. Detta innebär att  $A_1$  och  $A_{2i+1}$  är disjunkta, vilket medför att  $|A_1 \setminus A_{2i+1}| = |A_1| = k$ . Instoppat i ovanstående olikhet får vi att

$$k \leq i(n-2k) \iff i \geq \frac{k}{n-2k} \iff 2i+1 \geq \frac{n}{n-2k}.$$

Alltså innehåller cykeln minst  $\frac{n}{n-2k}$  element.