SF2715 Applied Combinatorics
Extra exercises with solutions, Part 4

Jakob Jonsson

May 10, 2011

Ö Övningsuppgifter

These supplementary exercises are unfortunately still in Swedish. You are welcome to ask questions (to Svante) if there is something you don't understand.

Ö.1 Cykliska binära följder, del 1

Låt $n \geq 1$, och betrakta två binära följder av längd n som ekvivalenta om den ena kan erhållas från den andra via en rotation; se Exempel 1 i avsnitt 3 i Notes 4. Beräkna antalet banor (ekvivalensklasser) av följder med exakt k ettor i följande fall:

(a) $(n, k) = (8, 4)$.

(b) $(n, k) = (9, 6)$.

(c) Godtyckligt par (n, k) sådant $1 \leq k < n$ och $\gcd(n, k) = 1$.

Svårighetsgrad: D

Ö.2 Par av hörn i en kvadrat med fyra löv

Den dihedrala gruppen D_4 verkar på grafen H i Figur Ö.2 genom rotation och spegling. Låt X vara mängden av 2-färgningar av H som uppfyller följande villkor:

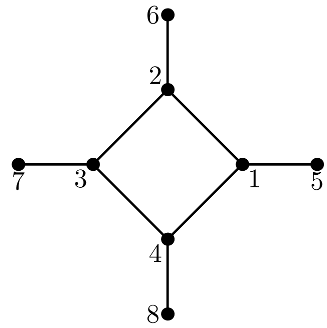
- Exakt två hörn har färgen 1, och dessa två hörn är inte sammanbundna.

(Detta innebär att de två hörnen med färgen 1 utgör en oberoende mängd; se övningsuppgift 20 i häftet till del III.) Beräkna antalet banor av tillåtna färgningar.

Svårighetsgrad: C

Ö.3 Kantfärgningar av kuben, del 1

I avsnitt 2 av Notes 4 beskrev vi hur rotationer av kuben ger upphov till grupper av permutationer dels av kubens åtta hörn och dels av kubens sex sidor. I denna uppgift betraktar vi motsvarande grupp av permutationer av kubens tolv kanter.



Figur 1: Grafen H i uppgift Ö.2.

(a) Ange cykelstrukturen för de 24 gruppelementen med avseende på hur de verkar på de tolv kanterna.

(b) Två färgningar av kanterna är ekvivalenta om den ena färgningen kan överföras i den andra via en rotation av kuben. För $r \geq 1$, använd Burnsides lemma för att beräkna antalet banor av färgningar av kanterna med färgerna $\{1, \ldots, r\}$. Vad blir antalet för $r = 2$? Vi har inga restriktioner angående färgningen av intilliggande kanter.

Svårighetsgrad: B

Ö.4 Samband mellan färgningar och urvalsproblem

Visa att vi har bijektioner mellan följande par:

(a)
- Märkta r-färgningar av den kompletta grafen K_n.
- Följder av längd n utan upprepning med element från en mängd med r element.

(b)
- Omärkta r-färgningar av den kompletta grafen K_n.
- Delmängder av storlek n till en mängd med r element.

(c)
- Märkta r-färgningar av den tomma grafen O_n.
- Följder av längd n med element från en mängd med r element (upprepning är tillåten).

(d)
- Omärkta r-färgningar av den tomma grafen O_n.
- Multimängder av storlek n över en mängd med r element.

(Se avsnitt 1 i häfte I för detaljer om de fyra olika typerna av följder.)

Svårighetsgrad: D

Ö.5 Omärkta färgningar av tomma grafer

Använd (d) i uppgift Ö.4 för att visa att

$$\frac{1}{n!} \sum_{\pi \in S_n} r^{\gamma(\pi)} = \binom{n+r-1}{n},$$

där $\gamma(\pi)$ är lika med antalet cykler i cykeluppdelningen för π. (Koefficienterna i polynomet $\sum_{\pi \in S_n} r^{\gamma(\pi)}$ är absolutbeloppen av Stirlingtalen av första slaget.)

Svårighetsgrad: D

Ö.6 Cykliska binära följder, del 2

Använd samma beteckningar som i uppgift Ö.1 och Exempel 1 i avsnitt 4 i Notes 4. För $0 \leq k \leq n$, beräkna antalet banor av följder med exakt k ettor i följande fall:

(a) $n = 8$.

(b) $n = 9$.

(c) n godtyckligt primtal.

Svårighetsgrad: C

Ö.7 Kantfärgningar av kuben, del 2

Använd samma beteckningar som i uppgift Ö.3. För $0 \leq k \leq 12$, beräkna antalet ekvivalensklasser av 2-färgningar av de tolv kanterna i kuben sådana att exakt k kanter får färgen 1.

Svårighetsgrad: B

Ö.8 Matriser under gruppverkan, del 1

Betrakta två $m \times n$-matriser A och B som ekvivalenta om man kan erhålla B från A genom att kasta om ordningen på raderna och på kolonnerna. Observera att vi kan identifiera en binär $m \times n$-matris med en färgning av mängden $\{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\}$; se avsnitt 2 i Notes 4.

(a) Använd en direkt metod för att beräkna antalet ekvivalensklasser av binära 2×3-matriser med k ettor för $0 \leq k \leq 6$.

(b) Ange en gruppverkan vars banor svarar mot ekvivalensklasserna.

(c) Lös uppgift (a) med hjälp av cykelindexsatsen.

Svårighetsgrad: (a): E, (b): B, (c): B

Ö.9 Matriser under gruppverkan, del 2

Betrakta nu två $m \times n$-matriser A och B som ekvivalenta om man kan erhålla B från A genom att rotera raderna och kolonnerna cykliskt.

(a) Ange en gruppverkan vars banor svarar mot ekvivalensklasserna.

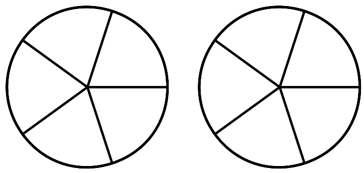
(b) Beräkna antalet banor av binära 3×4-matriser med k ettor för $0 \leq k \leq 12$.

Svårighetsgrad: B

Ö.10 Två cirkelskivor indelade i fem tårtbitar

Två cirkelskivor är indelade i fem identiska tårtbitar som i Figur 2. Vi kan rotera var och en av cirkelskivorna med heltalsmultiplar av 360/5 grader, och vi kan kombinera varje tänkbar rotation med att byta plats på de två skivorna. Detta ger en verkan på de två cirkelskivorna med en grupp G av storlek $2 \cdot 2^5 = 50$. För $0 \leq k \leq 10$, beräkna antalet ekvivalensklasser av mängder med k tårtbitar, där två mängder A och B betraktas som ekvivalenta om det finns ett gruppelement som avbildar A på B.

Svårighetsgrad: A



Figur 2: Två cirkelskivor indelade i fem identiska tårtbitar.

Lösningsförslag till övningsuppgifter, del IV

Obs! Preliminär version!

Ö.1. Vi använder oss av den formel som vi härledde i avsnitt 3 av Notes 4, nämligen att antalet banor av följder av längd n med k ettor ges av

$$\frac{1}{n}\sum_r \binom{[n,r]}{k\cdot[n,r]/n},$$

där vi summerar över alla $r \in \{0,\dots,n-1\}$ sådana att k är delbart med $n/[n,r]$. Precis som tidigare skriver vi $[n,r] = \gcd(n,r)$.

(a) $(n,k) = (8,4)$. Vi har att $k = 4$ är delbart med $n/[n,r] = 8/[8,r]$ om och endast om r är jämnt. Det sökta antalet är alltså

$$\begin{aligned} &\frac{1}{8}\left(\binom{[8,0]}{4\cdot[8,0]/8} + \binom{[8,2]}{4\cdot[8,2]/8} + \binom{[8,4]}{4\cdot[8,4]/8} + \binom{[8,6]}{4\cdot[8,6]/8}\right) \\ = \;&\frac{1}{8}\left(\binom{8}{4} + \binom{2}{1} + \binom{4}{2} + \binom{2}{1}\right) = \frac{70+2+6+2}{8} = 10. \end{aligned}$$

(b) $(n,k) = (9,6)$. Vi har att $k = 6$ är delbart med $n/[n,r] = 9/[9,r]$ om och endast om r är delbart med 3. Det sökta antalet är alltså

$$\begin{aligned} &\frac{1}{9}\left(\binom{[9,0]}{6\cdot[9,0]/9} + \binom{[9,3]}{6\cdot[9,3]/9} + \binom{[9,6]}{6\cdot[9,6]/9}\right) \\ = \;&\frac{1}{9}\left(\binom{9}{6} + \binom{3}{2} + \binom{3}{2}\right) = \frac{84+3+3}{9} = 10. \end{aligned}$$

(c) $[n,k] = 1$. Vi har att k är delbart med $n/[n,r]$ om och endast om $n = [n,r]$, ty $[n,k] = 1$. Den enda möjligheten är $r = 0$, vilket ger att det sökta antalet är

$$\frac{1}{n}\binom{[n,0]}{k\cdot[n,0]/n} = \frac{1}{n}\binom{n}{k}.$$

Detta kan man även inse utan Burnsides lemma, ty varje bana innehåller exakt n följder.

(Observera att vi i (c) får ett bevis för att $\binom{n}{k}$ är delbart med k om $[n,k] = 1$.)

Ö.2. Vi löser problemet med Burnsides lemma (det är förstås tillåtet att använda mer direkta metoder). Låt oss beräkna $\mathrm{fix}(g)$ för varje $g \in D_4$.

- Identiteten (1 element). Detta element fixerar alla hörn, vilket innebär att $\mathrm{fix}(g)$ är lika med antalet par av olika hörn som inte är sammanbundna. Det finns sammanlagt $\binom{8}{2} = 28$ par av hörn och 8 kanter, vilket innebär att $\mathrm{fix}(g) = 28 - 8 = 20$.

- Rotation $\pm 90°$ (2 element). I detta fall är g antingen $(1234)(5678)$ eller $(1432)(5876)$. I en tillåten färgning måste antingen alla eller inga hörn i varje cykel ha färgen 1. Vi får därmed att $\mathrm{fix}(g) = 0$, ty vi kan inte få en hörnmängd av storlek 2.

- Rotation 180° (1 element). I detta fall är $g = (13)(24)(57)(68)$. Observera att hörnen i varje cykel ej är sammanbundna. Detta innebär att $\mathrm{fix}(g) = 4$.
- Spegling i vågrät eller lodrät linje (2 element). Vi har då att g är antingen $(12)(34)(56)(78)$ eller $(14)(23)(58)(67)$. I båda fallen består precis två av cyklerna av hörn som ej är sammanbundna, vilket innebär att $\mathrm{fix}(g) = 2$.
- Spegling i diagonal (2 element). I detta sista fall har vi att g är antingen $(13)(2)(4)(57)(6)(8)$ eller $(24)(1)(3)(68)(5)(7)$. Studera det första fallet. För att få en tillåten färgning som fixeras av g kan vi välja de två elementen med färgen 1 antingen från en av 2-cyklerna eller från två av 1-cyklerna. Det finns $2 + \binom{4}{2} = 8$ sådana möjligheter. Dock utgör $(2, 6)$ och $(4, 8)$ kanter, varför vi måste räkna bort dessa två möjligheter. Slutsatsen blir att $\mathrm{fix}(g) = 6$.

Summering ger att antalet banor är lika med

$$\frac{1}{|D_4|} \sum_{g \in D_4} \mathrm{fix}(g) = \frac{1}{8} (1 \cdot 20 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 6) = \frac{40}{8} = 5.$$

Ö.3.

(a) Låt oss studera de fem olika typerna av rotation:

- Identiteten (1 element). Denna rotation fixerar alla kanter, vilket innebär att cykelstrukturen är 1^{12}.
- Rotation 180° runt x-, y- eller z-axeln (3 element). Eftersom vi roterar ett halvt varv kommer vi tillbaka till utgångspunkten efter två rotationer. Varje cykel har alltså längd 1 eller 2. Eftersom ingen kant fixeras blir cykelstrukturen 2^6.
- Rotation ±90° runt x-, y- eller z-axeln (6 element). I detta fall bildar de fyra kanterna till sidan vid den givna axeln en cykel, de fyra kanterna till den motstående sidan en cykel och de övriga fyra kanterna en cykel. Cykelstrukturen blir därmed 4^3.
- Rotation 180° runt axeln $e_i \pm e_j$, $i < j$ (6 element). Rotationen sker runt en linje som går genom två motstående kanter. Dessa två kanter är de enda som fixeras, vilka innebär att cykelstrukturen blir $2^5 1^2$.
- Rotation ±120° runt axeln $e_1 \pm e_2 \pm e_3$ (8 element). Denna rotation sker runt en linje genom två motstående hörn. Ingen kant fixeras av rotationen, utan vi får cykler av storlek 3. Cykelstrukturen blir 3^4.

(b) För att kunna använda Burnsides lemma behöver vi först beräkna $\mathrm{fix}(g)$, alltså antalet färgningar som fixeras av g, för varje gruppelement g. Enligt Lemma 3.1 i Notes 4 ges detta antal av r^k, där k är antalet cykler i cykeluppdelningen i g. Enligt (a) har vi därmed följande tabell.

Cykelstruktur	Antal g	$\mathrm{fix}(g)$
1^{12}	1	r^{12}
2^6	3	r^6
4^3	6	r^3
$2^5 1^2$	6	r^7
3^4	8	r^4

Burnsides lemma ger därmed att antalet banor av färgningar är lika med

$$\frac{1}{24}\left(r^{12}+3\cdot r^{6}+6\cdot r^{3}+6\cdot r^{7}+8r^{4}\right)=\frac{r^{3}(r^{9}+6r^{4}+3r^{3}+8r+6)}{24}.$$

I specialfallet $r=2$ får vi att antalet banor är lika med

$$\frac{2^{3}(2^{9}+6\cdot 2^{4}+3\cdot 2^{3}+8\cdot 2+6)}{24}=\frac{512+96+24+16+6}{3}=218.$$

Ö.4.

(a) Varje tillåten färgning $c:\{1,\dots,n\}\to\{1,\dots,r\}$ av K_n ger upphov till en följd

$$(c(1),c(2),\dots,c(n))$$

utan upprepning, och varje sådan följd av element från mängden $\{1,\dots,r\}$ ger på motsvarande sätt upphov till en tillåten färgning av K_n.

(b) Vi kan lösa denna uppgift utan att använda Sats **??**. Notera först att en färgning av K_n är tillåten om och endast om alla n hörn får olika färg. Automorfigruppen på K_n är nu den symmetriska gruppen S_n. Detta innebär att två färgningar av K_n är ekvivalenta om och endast om exakt samma uppsättning färger används i de två färgningarna. Vi sluter oss till att antalet omärkta färgningar med r färger är lika med antalet sätt att välja ut en mängd bestående av n av de r färgerna.

(c) Varje färgning $c:\{1,\dots,n\}\to\{1,\dots,r\}$ av O_n ger upphov till en följd

$$(c(1),c(2),\dots,c(n)),$$

och varje sådan följd av element från $\{1,\dots,r\}$ ger på motsvarande sätt upphov till en färgning av O_n.

(d) Vi kan resonera precis som i (b). Alla tänkbara färgningar av O_n är tillåtna, och två färgningar är O_n är ekvivalenta om och endast om varje färg används exakt lika många gånger i de båda färgningarna. Slutsatsen är att antalet omärkta färgningar med r färger är lika med antalet sätt att välja ut en multimängd bestående av n färger från en mängd med r färger.

Ö.5. Burnsides lemma ger att antalet omärkta färgningar av O_n med r färger är lika med

$$\frac{1}{n!}\sum_{\pi\in S_n}\mathrm{fix}(\pi),$$

där $\mathrm{fix}(\pi)$ är lika med antalet färgningar som fixeras av π. Lemma 3.1 i Notes 4 ger att $\mathrm{fix}(\pi)=r^{\gamma(\pi)}$. Enligt uppgift Ö.4 är antalet omärkta färgningar lika med antalet multimängder av storlek n över en mängd av storlek r. Detta antal är $\binom{n+r-1}{n}$, vilket avslutar beviset.

Ö.6. Låt a_k vara antalet banor av följder med exakt k ettor. Vi använder oss av den formel som vi härledde i avsnitt 4 av Notes 4, nämligen att

$$\sum_{k=0}^{n}a_k t^k=Z(C_n;1+t,\dots,1+t^n)=\frac{1}{n}\sum_{r=0}^{n-1}(1+t^{n/\gcd(n,r)})^{\gcd(n,r)}.$$

(a) $n = 8$. Vi har att

$$\begin{aligned}
&\gcd(8,1) = \gcd(8,3) = \gcd(8,5) = \gcd(8,7) = 1,\\
&\gcd(8,2) = \gcd(8,6) = 2,\\
&\gcd(8,4) = 4,\\
&\gcd(8,0) = 8.
\end{aligned}$$

Detta ger att

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{8} a_k t^k &= \frac{1}{8}\left(4(1+t^8) + 2(1+t^4)^2 + (1+t^2)^4 + (1+t)^8\right)\\
&= 1 + t + 4t^2 + 7t^3 + 10t^4 + 7t^5 + 4t^6 + t^7 + t^8.
\end{aligned}$$

(b) $n = 9$. Vi har att $\gcd(9, r) = 1$ för $r \in \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$, $\gcd(9, r) = 3$ för $r \in \{3, 6\}$ och $\gcd(9, 0) = 9$. Detta ger att

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{9} a_k t^k &= \frac{1}{9}\left(6(1+t^9) + 2(1+t^3)^3 + (1+t)^9\right)\\
&= 1 + t + 4t^2 + 10t^3 + 14t^4 + 14t^5 + 10t^6 + 4t^7 + t^8 + t^9.
\end{aligned}$$

(c) n ett primtal. Vi har att $\gcd(n, r) = 1$ för $1 \le r \le n-1$ och $\gcd(n, 0) = n$. Detta ger att

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} a_k t^k &= \frac{1}{n}\left((n-1)(1+t^n) + (1+t)^n\right)\\
&= 1 + t^n + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n}\binom{n}{k} t^k.
\end{aligned}$$

Ö.7. Enligt lösningen till uppgift Ö.3 har vi att cykelindexet för gruppen är lika med

$$\frac{1}{24}\left(s_1^{12} + 3s_2^6 + 6s_4^3 + 6s_2^5 s_1^2 + 8s_3^4\right).$$

Låt f_k vara antalet banor med exakt k ettor. Cykelindexsatsen ger att talen f_k uppfyller identiteten

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{6} f_k t^k\\
= &\frac{1}{24}\left((1+t)^{12} + 3(1+t^2)^6 + 6(1+t^4)^3 + 6(1+t^2)^5(1+t)^2 + 8(1+t^3)^4\right).
\end{aligned}$$

En jobbig uträkning ger att detta är lika med

$$\begin{aligned}
&1 + t + 5t^2 + 13t^3 + 27t^4 + 38t^5 + 48t^6 + 38t^7 + 27t^8\\
&+ 13t^9 + 5t^{10} + t^{11} + t^{12}.
\end{aligned}$$

Ö.8.

(a) Låt f_k vara antalet banor av matriser med exakt k ettor. Direkt inspektion ger att $f_0 = f_1 = f_5 = f_6 = 1$. Vidare har vi att $f_2 = f_3 = f_4 = 3$. Nedan anger vi en representant för varje ekvivalensklass; inom parentes till höger om representanten står antalet element i klassen. Observera för varje fixerat k att summan av dessa antal är lika med binomialkoefficienten $\binom{6}{k}$.

$$
\begin{array}{llll}
k=2: & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{(6)} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{(3)} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{(6)} \\
k=3: & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{(2)} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{(12)} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{(6)} \\
k=4: & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{(6)} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{(3)} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{(6)}
\end{array}
$$

(b) Produktgruppen $S_2 \times S_3$ ger en gruppverkan på binära 2×3-matriser; ett gruppelement (g, h) avbildar matrisen M på matrisen M' med egenskapen att

$$M'_{i,j} = M_{g(i),h(j)}.$$

Detta inser man genom att använda observationen att binära 2×3-matriser kan identifieras med 2-färgningar av mängden $\{1, 2\} \times \{1, 2, 3\}$. I paret (g, h) svarar g mot en omkastning av raderna, medan h svarar mot en omkastning av kolonnerna.

(c) $S_2 \times S_3$ består av tolv element, som vi kan dela in i sex olika klasser enligt följande:

Cykelindex	Antal element	Beskrivning
s_1^6	1	identiteten
s_3^2	2	rotation av kolonnerna
$s_2^2 s_1^2$	3	byte av två kolonner
s_2^3	1	radbyte
s_6	2	radbyte och rotation av kolonnerna
s_2^3	3	radbyte och byte av två kolonner

Vi får därmed att cykelindexet är lika med

$$Z(S_2 \times S_3; s_1, s_2, \ldots, s_6) = \frac{1}{12}\left(s_1^6 + 2s_3^2 + 3s_2^2 s_1^2 + s_2^3 + 2s_6 + 3s_2^3\right).$$

Cykelindexsatsen ger att antalet banor f_k med k ettor uppfyller identiteten

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{6} f_k t^k &= Z(S_2 \times S_3; 1+t, 1+t^2, \ldots, 1+t^6) \\
&= \frac{1}{12}\big((1+t)^6 + 2(1+t^3)^2 + 3(1+t^2)^2(1+t)^2 \\
&\quad + (1+t^2)^3 + 2(1+t^6) + 3(1+t^2)^3\big) \\
&= 1 + t + 3t^2 + 3t^3 + 3t^4 + t^5 + t^6.
\end{aligned}
$$

Detta ger att $f_0 = f_1 = f_5 = f_6 = 1$ och $f_2 = f_3 = f_4 = 3$.

Ö.9.

(a) Man kan resonera som i (b) i föregående uppgift. Den här gången tillåter vi enbart rotation, vilket innebär att den aktuella gruppen är produktgruppen $C_3 \times C_4$.

(b) $C_3 \times C_4$ består av tolv element, som vi kan dela in i sex olika klasser enligt följande:

Cykelindex	Antal gruppelement	Radrotation	Kolonnrotation
s_1^{12}	1	0	0
s_4^3	2	0	± 1
s_2^6	1	0	2
s_3^4	2	± 1	0
s_{12}	4	± 1	± 1
s_6^2	2	± 1	2

I de två kolonnerna till höger anger vi hur många steg gruppelementen roterar rader och kolonner. Vi får därmed att cykelindexet är lika med

$$Z(C_3 \times C_4; s_1, s_2, \ldots, s_{12}) = \frac{1}{12}\left(s_1^{12} + 2s_4^3 + s_2^6 + 2s_3^4 + 4s_{12} + 2s_6^2\right).$$

Cykelindexsatsen ger att antalet banor f_k med k ettor uppfyller identiteten

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{12} f_k t^k &= Z(C_3 \times C_4; 1+t, 1+t^2, \ldots, 1+t^{12}) \\ &= \frac{1}{12}\big((1+t)^{12} + 2(1+t^4)^3 + (1+t^2)^6 \\ &\quad + 2(1+t^3)^4 + 4(1+t^{12}) + 2(1+t^6)^2\big).\end{aligned}$$

Efter långrandiga uträkningar kan man konstatera att detta är lika med

$$\begin{aligned}&1 + t + 6t^2 + 19t^3 + 43t^4 + 66t^5 + 80t^6 + 66t^7 + 43t^8 \\ &+ 19t^9 + 6t^{10} + t^{11} + t^{12}.\end{aligned}$$

Ö.10. Först räknar vi ut $z(g) = z(g; s_1, \ldots, s_{10})$ för varje $g \in G$. Låt oss beteckna tårtbitarna till vänster med $(0,0), \ldots, (0,4)$ och tårtbitarna till höger med $(1,0), \ldots, (1,4)$, ordnade medurs. Ett gruppelement g är entydigt bestämt av värdena $g(0,0)$ och $g(1,0)$. Om $g(0,0) = (i,k)$ har vi nämligen att $g(0,j) = (i, (k+j) \bmod 5)$ för $1 \le j \le 4$, och på samma sätt är $g(1,j)$ entydigt bestämt av $g(1,0)$. Vi delar in gruppelementen med avseende på värdena på $g(0,0)$ och $g(1,0)$:

- $g(0,0) = (0,0)$ och $g(1,0) = (1,0)$ (1 element). Detta innebär att g är identiteten. Detta gruppelement fixerar samtliga tårtbitar, så $z(g) = s_1^{10}$.

- $g(0,0) = (0,j)$, där $1 \le j \le 4$, och $g(1,0) = (1,0)$ (4 element). I detta fall bildar tårtbitarna till vänster en cykel, medan vi har en cykel för varje tårtbit till höger. Alltså är $z(g) = s_5 s_1^5$.

- $g(0,0) = (0,0)$ och $g(1,0) = (1,j)$, där $1 \le j \le 4$ (4 element). Detta fall är analogt med föregående fall, vilket innebär att $z(g) = s_5 s_1^5$.

- $g(0,0) = (0,j)$ och $g(1,0) = (1,k)$, där $1 \leq j \leq 4$, $1 \leq k \leq 4$ (16 element). Här får vi två cykler med fem element, det vill säga $z(g) = s_5^2$.

- $g(0,0) = (1,j)$ och $g(1,0) = (0,(5-j) \bmod 5)$, $0 \leq j \leq 5$ (5 element). I detta fall får vi att

$$g^2(0,a) = g(1,(j+a) \bmod 5) = (0,(j+a+5-j) \bmod 5) = (0,a)$$

  för alla a. På samma sätt ser vi att $g^2(1,a) = (1,a)$ för alla a. Alla cykler har alltså längd 2, vilket ger att $z(g) = s_2^5$.

- $g(0,0) = (1,j)$ och $g(1,0) = (0,k)$, $0 \leq j \leq 5$, $(j+k) \bmod 5 \in \{1,2,3,4\}$ (20 element). Vi ser att

$$g^2(0,0) = g(1,j) = (0,(j+k) \bmod 5) = (0,a),$$

  där $a \in \{1,2,3,4\}$. Analogt har vi att $g^2(1,0) = (1,a)$. Detta innebär att g^2 består av två cykler av längd 5. Slutsatsen är att g består av en enda cykel av längd 10, vilket ger att $z(g) = s_{10}$.

Summering ger att

$$Z(G; s_1, \ldots, s_{10}) = \frac{1}{50}\left(s_1^{10} + 8s_5 s_1^5 + 16s_5^2 + 5s_2^5 + 20s_{10}\right).$$

Cykelindexsatsen ger att antalet banor av storlek k är lika med koefficienten framför t^k i $Z(G; 1+t, 1+t^2, \ldots, 1+t^{10})$. Ersätter vi s_i med $1+t^i$ i ovanstående uttryck får vi att

$$\begin{aligned}
& Z(G; 1+t, 1+t^2, \ldots, 1+t^{10}) \\
= \ & \frac{1}{50}\left((1+t)^{10} + 8(1+t^5)(1+t)^5 + 16(1+t^5)^2 + 5(1+t^2)^5 + 20(1+t^{10})\right) \\
= \ & 1 + t + 3t^2 + 4t^3 + 6t^4 + 6t^5 + 6t^6 + 4t^7 + 3t^8 + t^9 + t^{10}.
\end{aligned}$$