

Tentamen i SF2715 Tillämpad kombinatorik, 6 hp

Onsdagen den 13 januari 2010 kl. 08:00–13:00

Lösningsförslag

1. För $1 \leq i \leq n$, sätt $b_i = a_i - a_{i-1}$. Notera att

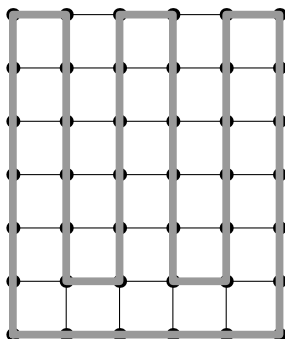
$$a_{i-1} \leq a_i \leq a_{i-1} + 1 \iff 0 \leq a_i - a_{i-1} \leq 1 \iff 0 \leq b_i \leq 1.$$

Vidare har vi att

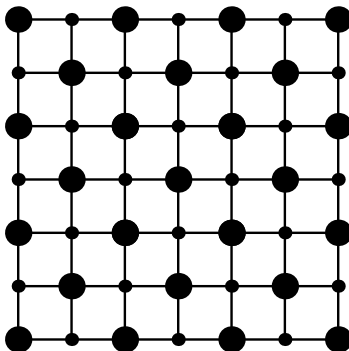
$$\sum_{i=1}^n b_i = \sum_{i=1}^n (a_i - a_{i-1}) = \sum_{i=1}^n a_i - \sum_{i=0}^{n-1} a_i = a_n - a_0 = k.$$

De givna villkoren är alltså ekvivalenta med att följderna $(b_1, \dots, b_n)$ innehåller exakt k ettor och $n - k$ nollor. Det finns $\binom{n}{k}$ sådana följder.

2. I den första grafen har vi exempelvis följande Hamiltoncykel:



Observera att den andra grafen är bipartit; i nedanstående figur går alla kanter mellan ett litet och ett stort hörn. Eftersom antalet stora hörn är 25 och antalet små hörn är 24 kan grafen inte ha en Hamiltoncykel.



3. En permutation av mängden $\{1, 2, \dots, 2n-1\}$ kan inte ha fler än en cykel av längd n . De permutationer vi ska räkna har alltså en unik sådan cykel. Vi kan välja elementen i cykeln på $\binom{2n-1}{n}$ olika sätt, och dessa element kan sedan ordnas i cykeln på $(n-1)!$ olika sätt. Det finns slutligen $(n-1)!$ olika sätt att bilda cykler av de återstående $n-1$ elementen. Multiplikationsprincipen ger att det sökta antalet permutationer är

$$\binom{2n-1}{n} \cdot (n-1)! \cdot (n-1)! = \frac{(2n-1)! \cdot (n-1)! \cdot (n-1)!}{(n-1)! \cdot n!} = \frac{(2n-1)!}{n}.$$

4. (a) För en given partition, studera den delmängd som innehåller elementet n . Vi har två möjligheter:

- * n bildar en egen delmängd. Det finns då a_{n-1} sätt att bilda en partition med önskade egenskaper av de återstående $n-1$ elementen.
- * n tillhör en delmängd av storlek 2, alltså en delmängd på formen $\{x, n\}$ för något x . Vi har då $n-1$ möjligheter för x och sedan a_{n-2} sätt att bilda en partition av de återstående $n-2$ elementen.

Summering ger att

$$a_n = a_{n-1} + (n-1)a_{n-2}.$$

- (b) Vi noterar att

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n \geq 1} \frac{a_n x^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= a_1 + \sum_{n \geq 2} \frac{a_{n-1} x^{n-1}}{(n-1)!} + \sum_{n \geq 2} \frac{a_{n-2} x^{n-1}}{(n-2)!} \\ &= 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{a_n x^n}{n!} + \sum_{n \geq 0} \frac{a_n x^n}{n!} \cdot x \\ &= (1+x)f(x). \end{aligned}$$

Sätt $f(x) = e^{x+x^2/2}g(x)$. Vi ser att

$$\begin{aligned} (1+x)f(x) &= f'(x) \\ &= (1+x)e^{x+x^2/2}g(x) + e^{x+x^2/2}g'(x) \\ &= (1+x)f(x) + e^{x+x^2/2}g'(x). \end{aligned}$$

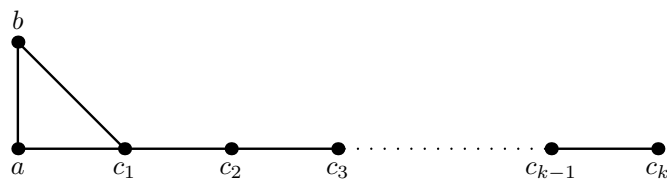
Alltså är $g'(x) = 0$, det vill säga $g(x) = C$ för någon konstant C . Eftersom

$$1 = a_0 = f(0) = C$$

måste vi ha att $C = 1$. Alltså är

$$f(x) = e^{x+x^2/2}.$$

5. (a) Följande graf har önskade egenskaper:



Vi kan nämligen färga a , b och c_1 på $r(r-1)(r-2)$ sätt. För $2 \leq i \leq k$ har vi sedan att c_i måste ha en annan färg än c_{i-1} , vilket innebär att vi har $r-1$ möjligheter för c_i för $2 \leq i \leq k$. Multiplikation ger det önskade resultatet.

- (b) Anta att $r(r-1)(r-2)(r^2-7r+11)$ är det kromatiska polynomet $f_G(r)$ till någon graf G . Då är $f_G(r) \geq 0$ för varje $r \geq 1$, ty $f_G(r)$ är lika med antalet färgningar med färgerna $1, \dots, r$. Nu har vi dock att

$$f_G(3) = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot (3^2 - 7 \cdot 3 + 11) = -6 < 0,$$

vilket är omöjligt. Alltså existerar ingen sådan graf G .

6. (a) Låt $(a_1, a_2, \dots, a_{14})$ och $(b_1, b_2, \dots, b_{14})$ vara följder i C . För att visa att C är linjär räcker det att visa att summan av de två följderna tillhör C . Denna summa är lika med följden

$$(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_{14} + b_{14}).$$

Sätt $c_k = a_k + b_k$ för $1 \leq k \leq 14$. Vi ser att

$$\begin{aligned} c_k &= a_k + b_k \\ &= (a_{k-1} + a_{k-4}) + (b_{k-1} + b_{k-4}) \\ &= (a_{k-1} + b_{k-1}) + (a_{k-4} + b_{k-4}) \\ &= c_{k-1} + c_{k-4} \end{aligned}$$

för $5 \leq k \leq 14$. Alltså har vi att summan tillhör C .

- (b) Eftersom $a_5, \dots, a_{14}$ är entydigt bestämda av a_1, a_2, a_3, a_4 består C av $2^4 = 16$ kodord. Generatormatrisen ska alltså ha fyra rader. Som rader i matrisen kan vi välja de kodord som börjar med $(1, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$ och $(0, 0, 0, 1)$. Genom att använda rekursionen $a_k = a_{k-1} + a_{k-4}$ får vi att dessa kodord är

$$\begin{aligned} &(1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0) \\ &(0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1) \\ &(0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1) \\ &(0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0) \end{aligned}$$

En generatormatris ges alltså av

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- (c) Denna uppgift kan man lösa på åtminstone två sätt. Enligt uppgiftsformuleringen består C av alla binära följder $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_{14})$ sådana att $a_k = a_{k-1} + a_{k-4}$ för $5 \leq k \leq 14$. Detta innebär precis att $\mathbf{a}$ tillhör C om och endast om $M \cdot \mathbf{a}^T$ är noll, där

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per definition är M en kontrollmatris för C .

Man kan även utgå från generatormatrisen i (b). Skriver vi denna på formen $[I_4|A]$ erhåller vi att $[A^T|I_{10}]$ är en kontrollmatris för C , där I_4 och I_{10} betecknar enhetsmatriser av storlek 4 respektive 10.

7. Vi använder Burnsidess lemma. Den aktuella gruppen är C_8 , den cykliska gruppen med åtta element. För varje gruppelament vill vi räkna antalet färgningar som fixeras av gruppelamentet.

- * Identiteten. Detta element fixerar alla färgningar. Antalet färgningar med k röda regioner är $\binom{8}{k}2^{8-k}$, ty vi kan välja de röda regionerna på $\binom{8}{k}$ olika sätt och sedan färga var och en av de återstående regionerna på två olika sätt. Antalet färgningar är därmed

$$\binom{8}{0}2^8 + \binom{8}{1}2^7 + \binom{8}{2}2^6 = 256 + 8 \cdot 128 + 28 \cdot 64 = 3072.$$

- * Rotation $\pm 45^\circ$ (2 element). De enda färgningar som fixeras av dessa element är de som använder en enda färg. Eftersom vi inte får använda färgen röd på fler än två regioner är oktagonerna antingen helgrön eller helblå. Antalet fixerade färgningar är alltså lika med 2.
- * Rotation $\pm 90^\circ$ (2 element). Numrera regionerna från 1 till 8 ordnade medsols. För att en färgning ska fixeras av den givna rotationen måste regionerna 1, 3, 5, 7 ha samma färg. Detsamma gäller regionerna 2, 4, 6, 8. Eftersom högst två regioner får vara röda kan vi inte ha några röda regioner alls, vilket medför att vi har $2 \cdot 2 = 4$ färgningar.
- * Rotation $\pm 135^\circ$ (2 element). Precis som i fallet med rotation $\pm 45^\circ$ får vi bara 2 fixerade färgningar.
- * Rotation 180° . I detta fall måste motstående regioner ha samma färg. Om ingen region är rödfärgad får vi $2^4 = 16$ möjligheter. Om två regioner är rödfärgade får vi $4 \cdot 2^3 = 32$ möjligheter. Totalt får vi $16 + 32 = 48$ möjligheter.

Burnsidess lemma ger att antalet ekvivalensklasser av färgningar är

$$\frac{1}{8} (3072 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 48) = \frac{3136}{8} = 392.$$