

Modelltentamen

Denna modelltentamen är tänkt att illustrera svårighetsgraden på en riktig tentamen. Att en viss typ av uppgift dyker upp här innebär inte att en liknande uppgift är vare sig mer eller mindre sannolik att dyka upp på en riktig tentamen.

1. Definiera $a_0 = 0$ och $a_n = 4a_{n-1} - 2^{n-1}$ för $n \geq 1$. Beräkna den genererande funktionen

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n.$$

Ditt svar ska vara ett ändligt uttryck utan summationstecken.

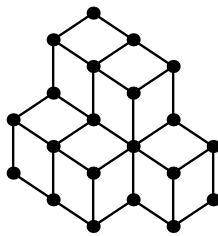
(3p)

2. För en mängd M av partitioner av talet n , definiera konjugatet till M att vara mängden $\{\lambda^T : \lambda \in M\}$, där λ^T betecknar konjugatet till partitionen λ . Beskriv konjugatet till följande mängder:

- (a) Mängden av alla partitioner av n med egenskapen att alla delar är olika stora.
- (b) Mängden av alla partitioner av n med egenskapen att den näst största delen är högst hälften så stor som den största delen.

(3p)

3. Låt G vara grafen i nedanstående figur. Avgör om G är Hamiltonsk. Ditt svar ska motiveras med en explicit Hamiltoncykel eller ett bevis för att Hamiltoncykler saknas.



(3p)

4. Avgör om den linjära binära koden C med kontrollmatris

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

är 1-rättande. Bestäm en generatormatris till C .

(3p)

5. För varje $n \geq 3$, beräkna antalet surjektiva funktioner från $\{1, \dots, n\}$ till $\{1, \dots, n-2\}$, alltså funktioner f med egenskapen att samtliga element i $\{1, \dots, n-2\}$ finns med bland funktionsvärdena $f(1), \dots, f(n)$.

(6p)

6. Låt $\{a_n : n \geq 0\}$ vara en godtycklig talföljd. Definiera talföljden $\{b_n : n \geq 0\}$ som $b_0 = 1$ och

$$b_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-k-1} b_k.$$

för $n \geq 1$. Uttryck $g(x) = \sum_{n \geq 0} b_n x^n$ som en funktion av $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$.

(6p)

7. (a) Konstruera en planär graf med egenskapen att varje hörn i grafen är sammanbundet med exakt fyra andra hörn. Det ska tydligt framgå att din graf är planär.

(2p)

- (b) Visa att det inte finns någon planär bipartit graf med egenskapen att varje hörn är sammanbundet med exakt fyra andra hörn.

(4p)

8. Studera mängden av färgningar av hörnen i en sexhörning med färgerna röd, grön och blå med egenskapen att högst två hörn har färgen grön. Intelligande hörn får ha samma färg.

- (a) Beräkna antalet färgningar med egenskaper som ovan.

(2p)

- (b) Betrakta två färgningar som ekvivalenta om den ena färgningen kan överföras i den andra via en rotation av sexhörningen. Speglingar är ej tillåtna. Beräkna antalet ekvivalensklasser av färgningar med egenskaper som ovan.

(4p)

Lösningsförslag

1. Vi har att

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n \geq 0} a_n x^n = a_0 + \sum_{n \geq 1} a_n x^n = \sum_{n \geq 1} (4a_{n-1} - 2^{n-1}) x^n \\ &= \sum_{m \geq 0} (4a_m - 2^m) x^{m+1} = 4x \sum_{m \geq 0} a_m x^m - x \sum_{m \geq 0} (2x)^m \\ &= 4xf(x) - \frac{x}{1-2x}. \end{aligned}$$

Från detta drar vi slutsatsen att $f(x)(1-4x) = -x/(1-2x)$, det vill säga

$$f(x) = \frac{-x}{(1-4x)(1-2x)}.$$

2. (Formuleringen av denna uppgift var nog lite diffus.)

- (a) Alla delar i en partition λ är olika stora om och endast om alla nollskilda kolumner i konjugatet λ^T är olika långa. Att kolumn $i+1$ i λ^T är kortare än kolumn i är ekvivalent med att det finns någon del i λ^T som är exakt lika med i . Detta gäller för $1 \leq i \leq m$, där m är antalet delar i λ .

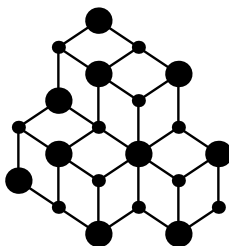
Slutsats: Den sökta mängden består av alla partitioner μ av n med egenskapen att det finns minst en del av storlek i för $1 \leq i \leq m$, där m är storleken på den största delen i μ .

- (b) Den näst största delen i λ är högst hälften så stor som den största delen om och endast om kolumn 2 är högst hälften så lång som kolumn 1 i λ^T . Detta innebär att minst hälften av raderna i diagrammet för λ^T bara innehåller en enda ruta, vilket är ekvivalent med att minst hälften av delarna i λ^T är lika med 1.

Slutsats: Den sökta mängden består av alla partitioner av n med egenskapen att minst hälften av delarna är lika med 1.

(3p)

3. Observera att G är bipartit; i nedanstående figur går alla kanter mellan ett litet och ett stort hörn. Eftersom antalet stora hörn är 10 och antalet små hörn är 11 kan grafen inte ha en Hamiltoncykel.



(Däremot går det att konstruera Hamiltonstigar i grafen. Detta lämnas som övning.)

4. En linjär binär kod är 1-rättande om och endast om alla kolumner i kontrollmatrisen är nollskilda och alla par av kolumner är olika. Så är fallet här, vilket innebär att C är 1-rättande.

För att bestämma en generatormatris till C använder vi först elementära radoperationer för att få kontrollmatrisen på formen $[I_4|X]$, där X är en 4×5 -matris:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ & \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ & \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ & \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En generatormatris ges nu av $[-X^T|I_5]$, där X^T är transponatet till X . Eftersom koden är binär behöver vi inte bry oss om minustecknet framför X^T , och generatormatrisen blir

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Vi delar upp i två fall:

* Något tal $k \in \{1, \dots, n-2\}$ förekommer 3 gånger bland funktionsvärdena $f(1), \dots, f(n)$, och övriga tal förekommer precis en gång. Vi kan välja k på $n-2$ sätt. De tre tal a, b och c som uppfyller $f(a) = f(b) = f(c) = k$ kan vi välja på $\binom{n}{3}$ sätt. Sedan finns det $(n-3)!$ sätt att definiera f på $\{1, \dots, n\} \setminus \{a, b, c\}$ så att alla värden i $\{1, \dots, n-2\} \setminus \{k\}$ antas precis en gång. Multiplikation ger att det totala antalet funktioner i det här fallet är

$$(n-2) \cdot \binom{n}{3} \cdot (n-3)! = \frac{(n-2)}{6} \cdot n! .$$

* Två tal $k, m \in \{1, \dots, n-2\}$ förekommer 2 gånger var bland funktionsvärdena $f(1), \dots, f(n)$, och övriga tal förekommer precis en gång. Vi antar att $k < m$. Vi kan välja k och m på $\binom{n-2}{2}$ sätt. De fyra tal a, b, c och d som uppfyller $f(a) = f(b) = k$ och $f(c) = f(d) = m$ kan vi välja på $\binom{n}{2} \binom{n-2}{2}$ sätt. Sedan finns det $(n-4)!$ sätt att definiera f på $\{1, \dots, n\} \setminus \{a, b, c, d\}$ så att alla värden i $\{1, \dots, n-2\} \setminus \{k, m\}$ antas precis en gång. Multiplikation ger att det totala antalet funktioner i det här fallet är

$$\binom{n-2}{2} \cdot \binom{n}{2} \cdot \binom{n-2}{2} \cdot (n-3)! = \frac{(n-2)(n-1)}{8} \cdot n! .$$

Det totala antalet är

$$\frac{(n-2)}{6} \cdot n! + \frac{(n-2)(n-1)}{8} \cdot n! = (n-2) \left(\frac{1}{6} + \frac{n-1}{8} \right) \cdot n!$$

6. (Jag insåg i efterhand att svårighetsgraden på denna uppgift är aningen för låg för att motsvara 6 poäng på en tentamen.)

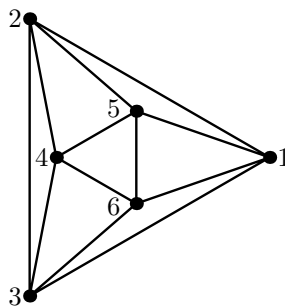
Vi har att

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{n \geq 0} b_n x^n = 1 + \sum_{n \geq 1} b_n x^n \\ &= 1 + \sum_{n \geq 1} \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-k-1} b_k \cdot x^{n-k-1} \cdot x^k \cdot x \\ &= 1 + \sum_{k \geq 0} \sum_{n \geq k+1} a_{n-k-1} x^{n-k-1} \cdot b_k x^k \cdot x \\ &= 1 + \sum_{k \geq 0} \sum_{m \geq 0} a_m x^m \cdot b_k x^k \cdot x = 1 + f(x)g(x)x. \end{aligned}$$

Vi drar slutsatsen att

$$g(x)(1 - xf(x)) = 1 \iff g(x) = \frac{1}{1 - xf(x)}.$$

7. (a) Följande graf har önskade egenskaper:



- (b) Anta att G är en planär bipartit graf med önskade egenskaper. Låt F vara antalet regioner (inklusive den obegränsade regionen), låt E vara antalet kanter och låt V vara antalet hörn. Vi kan anta att G är sammanhängande; annars studerar vi bara varje enskild komponent för sig. Eulers formel ger att

$$F = E - V + 2.$$

Eftersom varje hörn är med i exakt fyra kanter och varje kant innehåller exakt två hörn måste vi ha att

$$V = E/2.$$

Räkna nämligen antalet par (v, e) sådana att v är ett hörn innehållit i e . Om vi summerar över e för varje fixt v och sedan summerar över e erhåller vi $4V$. Om vi vänder på summationsordningen får vi $2E$.

Vi drar slutsatsen att

$$F = E/2 + 2 \iff 2F = E + 4.$$

Eftersom G är bipartit är varje region begränsad av minst fyra kanter. Detta ger att $4F$ är en nedre begränsning på antalet par (e, f) sådana att e är en kant i begränsningen till regionen f . Dock är varje kant med i begränsningen till högst två regioner, vilket innebär att antalet par (e, f) som ovan är högst $2E$. Slutsatsen är att $4F \leq 2E$, det vill säga $2F \leq E = 2F - 4$, vilket är en motsägelse.

8. (a) Vi delar in i fall:

- * Inget hörn är grönt. Vi har då $2^6 = 64$ färgningar.
- * Ett hörn är grönt. Det finns sex sätt att välja det gröna hörnet och sedan 2^5 sätt att färga övriga hörn, alltså $6 \cdot 2^5 = 192$ färgningar.
- * Två hörn är gröna. Det finns $\binom{6}{2} = 15$ sätt att välja de två gröna hörnen och sedan 2^4 sätt att färga övriga hörn, alltså $15 \cdot 2^4 = 240$ färgningar.

Totalt har vi alltså

$$64 + 192 + 240 = 496$$

färgningar.

(b) Gruppen C_6 verkar på sexhörningen via rotation. Vi använder Burnside's lemma för att lösa uppgiften. För varje gruppelament $g \in C_6$ behöver vi räkna ut $\text{fix}(g)$, alltså antalet färgningar som fixeras av g . Vi har sex gruppelament:

- * Identiteten. Detta element bevarar alla färgningar, vilket ger att $\text{fix}(g) = 496$ enligt (a).
- * Rotation ± 1 steg. Dessa båda element består av en enda cykel, så de bevarar enbart färgningar där alla färger är lika. Eftersom vi har högst två gröna hörn måste alla hörn vara antingen röda eller blåa, vilket ger $\text{fix}(g) = 2$.
- * Rotation ± 2 steg. Dessa båda element består av två cykler med vardera tre element. Vi kan färga var och en av cyklerna blå eller röd, men ingen cykel kan färgas grön. Slutsatsen är att $\text{fix}(g) = 2^2 = 4$.
- * Rotation 3 steg. Detta element består av tre cykler med vardera två element. Högst en av cyklerna kan färgas grön, medan övriga måste färgas röd eller blå. Detta innebär att $\text{fix}(g) = 2^3 + 3 \cdot 2^2 = 20$.

Burnside's lemma ger att antalet ekvivalensklasser är

$$\frac{1}{|C_6|} \sum_{g \in C_6} \text{fix}(g) = \frac{1}{6} (496 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 20) = \frac{528}{6} = 88.$$