5B1305 Tillämpad kombinatorik, VT 2007
Tentamen 22 maj klockan 14.00–19.00

Inga hjälpmedel är tillåtna. Inklusive bonus kan man få 29 poäng. Preliminära betygsgränser: 12 poäng ger minst betyget 3, 17 poäng ger minst betyget 4 och 22 poäng garanterar betyget 5. Klockan 19.00 kommer lösningsförslag att finnas på hemsidan. Lycka till!

1. (2p) Bestäm det kromatiska polynomet för den kompletta bipartita grafen $K_{2,n}$, där n är ett positivt heltal.

2. (2p) RSK-algoritmen avbildar som bekant permutationer på tablåpar. Antag att permutationen $3451627 \in S_7$ (enradsform) avbildas på paret (S, T). Det finns en permutation i S_7 som avbildas på (S, S). Vilken?

3. (2p) Antag att C är den minsta linjära binära kod som innehåller orden $(1,1,0,1,0,0,1)$, $(1,0,0,0,1,0,1)$, $(0,0,1,1,1,0,0)$ och $(1,0,1,1,0,0,1)$. Finn en checkmatris för den duala koden $C^{\perp}$.

4. (2p) Låt m, n, r och s vara positiva heltal. Visa att

$$\sum_{k=-m}^{n} \binom{r}{m+k}\binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{m+n}.$$

Var god vänd!

5. (4p) Låt $G = (V, E)$ vara en sammanhängande planär graf som inte är ett träd i vilken varje cykel har längd minst c, där $c \geq 3$. Visa att

$$|E| \leq \frac{c(|V| - 2)}{c - 2}.$$

6. (4p) Låt a_n vara antalet permutationer $\pi \in S_n$ sådana att $\pi^3 = \mathrm{id}$. Visa att den exponentiella genererande funktionen uppfyller

$$\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n!} x^n = e^{x + x^3/3}.$$

7. (4p) De åtta hörnen i en kub ska färgas med tre färger: gult, rött och blått. Alla färger måste inte användas. Hur många färgningar[1] har precis fyra blå hörn?

8. (4p) Låt som vanligt $p(n)$ beteckna antalet heltalspartitioner av det naturliga talet n. Visa att antalet partitioner av n där varje del har storlek minst 2 är $p(n) - p(n-1)$ om $n \geq 1$.

[1]Färgningar som endast skiljer sig åt genom en rotation av kuben betraktar vi förstås som likadana.

LÖSNINGSFÖRSLAG

1. Säg att bipartitionen av hörnmängden ges av $V = \{a, b\} \cup \{x_1, \dots, x_n\}$. En proper hörnfärgning med x färger har antingen samma färg på a och b eller olika färg på a och b. Färgningen kan sedan kompletteras genom att $x_1, \dots, x_n$ färgas oberoende av varandra i färger som inte upptas av a och b. Det finns alltså $x(x-1)^n$ färgningar av den förra typen och $x(x-1)(x-2)^n$ av den senare. Alltså: $f_{K_{2,n}}(x) = x(x-1)^n + x(x-1)(x-2)^n$.

2. Applikation av RSK ger att S är tablån

1	2	5	6	7
3	4			

.

Den inversa RSK-proceduren applicerad på (S, S) ger sedan permutationen 3412567.

3. Koden C är tydligen $\mathbb{Z}_2$-spannet av de givna vektorerna, d.v.s. radrummet till matrisen

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Elementära radoperationer påverkar inte radrummet; rad 2 plus rad 3 blir rad 4, så C är också radrummet till

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Raderna i G är linjärt oberoende, så G är en generatormatris för C, d.v.s. en checkmatris för $C^\perp$.

4. Om vi substituerar $l = k + m$ och $p = m + n$, så blir identiteten som vi vill visa

$$\sum_{l=0}^{p} \binom{r}{l} \binom{s}{p-l} = \binom{r+s}{p}.$$

HL är antalet sätt att välja p människor bland r kvinnor och s män. Om vi bestämmer att l av människorna måste vara kvinnor kan vi göra detta val på

$$\binom{r}{l} \binom{s}{p-l}$$

sätt. Summerar vi över alla l får vi alla val, varför HL = VL. $\square$

5. Tag en inbäddning av G i planet. Låt α vara antalet par (region, kant) där kanten ligger i regionens rand. Å ena sidan vidrör varje kant högst två regioner, så $\alpha \leq 2|E|$. Å andra sidan innebär de givna restriktionerna på grafen att varje region rör minst c kanter, varför $\alpha \geq c|F|$, där F betecknar mängden av regioner. Alltså gäller $2|E| \geq c|F|$.

Eulers sats ger nu

$$2 = |V| - |E| + |F| \leq |V| - |E| + 2|E|/c,$$

vilket ger den sökta olikheten efter lite pysslande. □

6. En permutation $\pi \in S_n$ uppfyller $\pi^3 = \mathrm{id}$ om och endast om alla icke-fixerade punkter till π ligger i 3-cykler. Givet π av sökt typ har vi alltså antingen $\pi(n) = n$ eller ligger n i en 3-cykel i π. Det finns a_{n-1} permutationer av det förra slaget. Av det senare finns det $(n-1)(n-2)a_{n-3}$, ty vi kan välja elementen som ska ingå i samma cykel som n på $(n-1)(n-2)$ sätt. Resten av permutationen är en permutation av samma slag på $n-3$ element. Vi drar slutsatsen att $a_n = a_{n-1} + (n-1)(n-2)a_{n-3}$ om $n \geq 3$. Begynnelsevillkoren är $a_0 = a_1 = a_2 = 1$. Vi får

$$G(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n!}x^n = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \sum_{n\geq 3} \frac{a_{n-1}}{n!}x^n + \sum_{n\geq 3} \frac{a_{n-3}}{(n-3)!n}x^n.$$

Derivering med avseende på x ger

$$G'(x) = 1 + x + G(x) - x - 1 + x^2G(x) = (1 + x^2)G(x).$$

Denna diffekvation har lösningen $G(x) = Ae^{x+x^3/3}$, där A är någon konstant. Eftersom $A = G(0) = a_0 = 1$ har $G(x)$ det sökta utseendet. □

7. Kubens rotationsgrupp verkar på mängden av hörn med följande cykelindex:

- Identiteten fixerar alla hörn, så cykelindex är s_1^8.
- Rotation 90° i en axel som går genom ett par av motstående sidor delar upp hörnen i 4-cykler, så cykelindex blir s_4^2. Det finns 6 sådana rotationer.
- Rotation 180° i en axel som går genom ett par av motstående sidor delar upp hörnen i 2-cykler, varför cykelindex är s_2^4. Tre sådana rotationer finns.
- Rotation 180° i en axel som går genom ett par av motstående kanter delar upp hörnen i 2-cykler. Även här blir cykelindex s_2^4. Vi har 6 rotationer av detta slag.
- Rotation 120° i en axel som går genom ett par av motstående hörn delar upp hörnen i två fixpunkter och resten 3-cykler, så att cykelindex blir $s_1^2 s_3^2$. Gruppen innehåller 8 sådana element.

Vi drar slutsatsen att gruppens cykelindex för denna verkan är

$$Z(G; s_1, s_2, s_3, s_4) = (s_1^8 + 6s_4^2 + 9s_2^4 + 8s_1^2 s_3^2)/24.$$

Om vi låter färgen blå ha vikt 1 och de övriga vikt 0 fås vikträkningspolynomet $a(t) = 2 + t$ och

$$Z(G; a(t), a(t^2), \dots) = ((2+t)^8+6(2+t^4)^2+9(2+t^2)^4+8(2+t)^2(2+t^3)^2)/24.$$

Svaret är koefficienten framför t^4 i detta polynom. Denna koefficient är

$$\left(2^4\binom{8}{4} + 6 \cdot 4 + 9 \cdot 2^2 \cdot \binom{4}{2} + 8 \cdot 2^2 \cdot 2^2\right) / \, 24 = 62.$$

8. *Metod 1.* Låt $q(n)$ vara antalet partitioner av n där varje del har storlek minst 2. Den genererande funktionen uppfyller

$$\sum_{n \geq 1} q(n)x^n = \prod_{i \geq 2} \frac{1}{1 - x^i}.$$

Å andra sidan har vi

$$\sum_{n \geq 1} (p(n) - p(n-1))x^n = \sum_{n \geq 1} p(n)x^n - x \sum_{n \geq 0} p(n)x^n =$$

$$= \prod_{i \geq 1} \frac{1}{1 - x^i} - 1 - x \prod_{i \geq 1} \frac{1}{1 - x^i} = (1 - x) \prod_{i \geq 1} \frac{1}{1 - x^i} - 1 = \prod_{i \geq 2} \frac{1}{1 - x^i} - 1,$$

så förutom konstanttermen är de båda serierna lika. □

Metod 2. Det finns en bijektion från partitioner av n som har minst en del av storlek 1 till partitioner av $n - 1$. Bijektionen konstrueras genom att ta bort en del av storlek 1. Det finns alltså precis $p(n - 1)$ partitioner av n som har en del av storlek 1 och därför $p(n) - p(n - 1)$ partitioner som inte har det. □